

Un semplice modello per le interfacce tra sabbie e superfici solide

Giuseppe Mortara

Sommario

La nota riguarda la modellazione del comportamento di interfaccia tra sabbie e superfici metalliche. In particolare, il modello rappresenta la semplificazione di una precedente formulazione dell'Autore. Dopo il confronto tra le due formulazioni si riporterà la procedura di determinazione dei parametri e sarà effettuato il confronto tra alcune prove sperimentali e le previsioni del modello. Keywords: comportamento di interfaccia, prove sperimentali, modello costitutivo.

Introduzione

Il comportamento di interfaccia tra i terreni e le strutture è di fondamentale importanza per quelle opere che basano il loro comportamento sull'interazione attrittiva tra la superficie strutturale ed il terreno. L'argomento ha avuto un forte sviluppo negli ultimi 40 anni sia dal punto di vista sperimentale [YOSHIMI e KISHIDA, 1981; UESUGI e KISHIDA, 1986; JOHNSTON *et al.*, 1987; CICHY *et al.*, 1987; TABUCANON *et al.*, 1995; FAKHARIAN e EVGIN, 1997; MORTARA *et al.*, 2007] sia dal punto di vista teorico [BOULON, 1988; BOULON e NOVA, 1990; MORTARA, 2001; GHIONNA e MORTARA, 2002; BOULON *et al.*, 2003; MORTARA *et al.*, 2010; SABERI *et al.*, 2016]. Importanti contributi sperimentali, quali quelli di WERNICK [1978] e di SCHLOSSER and GUILLOUX [1981], hanno evidenziato che durante prove di sfilamento di inclusioni rigide la tensione normale all'interfaccia subisce una variazione dettata dal comportamento volumetrico dell'interfaccia stessa. Pertanto, il comportamento viene determinato non solo dalle caratteristiche locali del contatto ma anche dal terreno adiacente all'interfaccia che svolge un importante ruolo di confinamento. Tale confinamento si traduce in una condizione al contorno di rigidità normale all'interfaccia che per un'inclusione cilindrica infinita che si espande in un mezzo elastico lineare e isotropo ha il seguente valore

$$k = - \frac{\Delta\sigma_n}{\Delta r} = \frac{2G}{R} \quad (1)$$

* DICEAM, Università Mediterranea di Reggio Calabria, Italy

essendo k la rigidità normale, G il modulo elastico del mezzo e R il raggio dell'inclusione. A causa di tale condizione al contorno, quindi, si verifica un aumento o una diminuzione della tensione normale all'interfaccia $\Delta\sigma_n$ che è proporzionale all'espansione o alla contrazione Δr del terreno adiacente all'inclusione.

La definizione in laboratorio del comportamento elementare che tenga conto dell'equazione (1) è rappresentata dall'apparecchiatura di taglio diretto a rigidità normale imposta di interfaccia [BOULON *et al.*, 1986; JOHNSTON *et al.*, 1987] che differisce dall'apparecchiatura di taglio diretto tradizionale per (i) la sostituzione di parte del provino con una piastra di materiale strutturale e (ii) l'applicazione di una condizione di rigidità in testa al provino. I risultati delle prove riescono a cogliere qualitativamente il comportamento osservato in prove su ancoraggi e pali modello [WERNICK, 1978; LEHANE *et al.*, 1993; LEHANE *et al.*, 2012].

La modellazione del comportamento delle interfacce tra terreni granulari ed inclusioni solide è fortemente basata sulla corretta interpretazione del comportamento volumetrico, dato che da esso deriva la variazione della tensione normale, e pertanto della tensione tangenziale, al contatto tra terreno e struttura.

Modello costitutivo

Il modello costitutivo presentato in questa nota, che si basa sulla teoria della elastoplasticità, deriva da una precedente formulazione dall'Autore [MORTARA, 2001; GHIONNA e MORTARA, 2002]. Le variabili del modello sono le tensioni normale σ_n e tangenziale τ e gli spostamenti normale v e tangenziale w .

Il precedente modello si basava su una superficie di plasticizzazione del tipo:

$$f = \tau - \alpha \sigma_n^\beta \quad (2)$$

dove β è un parametro costitutivo che rappresenta la curvatura delle superfici di plasticizzazione e α è la funzione di incrudimento. La funzione α dipende del parametro di incrudimento w_n così definito:

$$w_n = \frac{w^p}{w_p^p} \quad (3)$$

dove w^p è la componente plastica dello spostamento tangenziale e w_p^p rappresenta lo spostamento tangenziale plastico in condizioni di picco, cioè per il massimo valore del rapporto tensionale $\eta = \tau/\sigma_n$. La funzione di incrudimento è la seguente:

$$\alpha = \alpha_c [(w w_n + 1)^\psi - 2] \exp(-c_1 w_n^{c_2}) + \alpha_c \quad (4)$$

dove c_1 e c_2 , che sono dati da:

$$c_1 = \exp\left\{\frac{\alpha_c}{\alpha_p - \alpha_c} [(w + 1)^\psi - 2]\right\} \quad (5)$$

$$c_2 = \frac{\alpha_c}{\alpha_p - \alpha_c} \frac{\omega \psi}{c_1 \exp(c_1)} (w + 1)^{\psi-1} \quad (6)$$

sono determinati dalle condizioni $\alpha = \alpha_p$ e $d\alpha/dw_n = 0$ per $w_n = 1$ cioè in condizioni di picco. Nelle equazioni (4), (5) e (6) α_c , α_p , ω e ψ sono parametri costitutivi.

Lo spostamento tangenziale plastico in condizioni di picco viene determinato dalla seguente relazione lineare in funzione della tensione normale:

$$w_p^p = \xi \sigma_n + \zeta \quad (7)$$

dove ξ e ζ sono parametri costitutivi.

Una peculiarità del modello riguarda l'assunzione di una legge sforzi-dilatanza bilineare. L'equazione della generica retta viene rappresentata nel piano $d - \eta$ dall'equazione:

$$\eta = ad + b \quad (8)$$

dove la dilatanza viene definita dal rapporto tra l'incremento dello spostamento normale plastico e l'incremento dello spostamento tangenziale plastico ($d = \dot{w}^p / \dot{w}_p^p$).

Il potenziale plastico che deriva dall'integrazione della precedente equazione è lo stesso del modello di NOVA e WOOD [1979]

$$g = \tau - \frac{b}{1+a} \left[1 + a \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{ug}} \right)^{-\frac{1+a}{a}} \right] = 0 \quad (9)$$

dove:

$$\sigma_{ug} = \sigma_n \left[\frac{\eta(1+a) - b}{ab} \right]^{\frac{a}{1+a}} \quad (10)$$

è il valore della tensione normale per il quale la dilatanza si annulla. Si osservi, infatti, che per $\sigma_n = \sigma_{ug}$ l'equazione (9) si riduce a $\tau = b\sigma_n$ e quindi per la (8) si ha $d=0$.

L'assunzione di una legge sforzi-dilatanza doppia comporta che si avranno due rette nel piano $d-\eta$ aventi rispettivamente pendenze a_1 e a_2 ed intercette $b_1 = \rho\eta_c$ e $b_2 = \eta_c$, e in relazione alle condizioni di hardening e softening, dove η_c rappresenta il rapporto tensionale allo stato critico e $\rho < 1$ caratterizza le diverse pendenze delle rette. Le due rette convergono nel punto di picco avente coordinate d_{max} , η_p essendo η_p il rapporto tensionale a rottura e d_{max} la dilatanza massima (si osservi che, per le convenzioni della meccanica delle terre, la dilatanza massima venga in realtà rappresentata dal minimo valore che questa variabile assume). Quest'ultima viene determinata dalla seguente relazione in funzione della tensione normale:

$$d_{max} = (\mu\sigma_n + \nu) \frac{\sigma_{n0}}{\sigma_n} \quad (11)$$

dove σ_{n0} è la tensione normale iniziale e μ e ν sono due parametri costitutivi. Chiaramente, il parametro ν deve assumere valore negativo per l'osservazione fatta precedentemente sulla dilatanza massima.

Il modello viene completato dall'assunzione di comportamento elastico lineare definito dalla seguente matrice di rigidezza:

$$D = \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \quad (12)$$

dove K_n e K_s sono parametri del modello che rappresentano rispettivamente le rigidezze elastiche normale e tangenziale.

Il modello appena definito necessita la determinazione di 12 parametri: K_n , K_s , μ , ν , ρ , α_p , α_c , β , ω , ψ , ξ , ζ . Lo sforzo maggiore nella derivazione dei parametri riguarda la determinazione della legge di incrudimento poiché è necessario plottare, per un numero sufficiente di valori dello spostamento normalizzato w_n , i dati sperimentali nel piano $\sigma_n - \tau$, ed interpretarli con la legge $\tau = \alpha \sigma_n^\beta$ per determinare i valori di β e della funzione $\alpha(w_n)$.

Il modello modificato dal precedente ne differisce sostanzialmente per due aspetti: l'espressione della superficie di plasticizzazione e la definizione della condizione di picco per la funzione di incrudimento. Inoltre, la derivazione dei parametri è molto più semplice come sarà mostrato nel paragrafo seguente. La superficie di plasticizzazione viene semplificata dalla seguente espressione:

$$f = \tau - \alpha \sigma_n \quad (13)$$

Il parametro α_p , che a dispetto del modello precedente rappresenta il rapporto tensionale a rottura

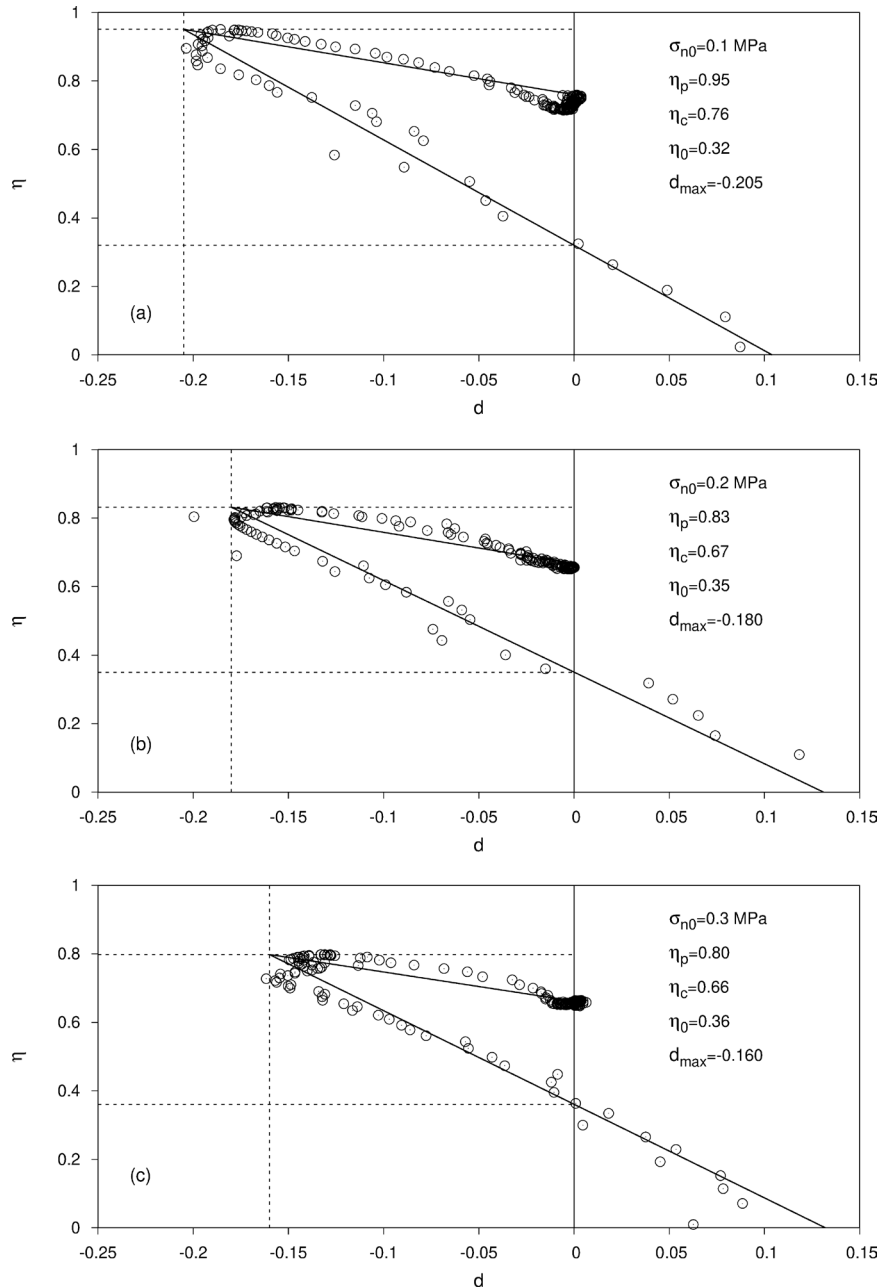


Fig. 1 – Determinazione dei parametri della relazione sforzi-dilatanza.

Fig. 1 – Determination of parameters of the stress-dilatancy relationship.

ra ($\eta_p = \alpha_p$), viene invece determinato dalla seguente relazione:

$$\alpha_p = \alpha_c - r_d d_{max} \quad (14)$$

dove r_d è un parametro del modello. Pertanto, il rapporto tensoriale di picco dipende dalla dilatanza massima che, a sua volta, dipende dalla tensione normale. Ciò comporta che per elevati valori della tensione normale, per i quali i valori della dilatanza massima sono molto bassi, il rapporto tensoriale di picco tende al rapporto tensoriale allo stato critico [BOLTON, 1986]. Ne segue che i luoghi τ, σ determi-

nati dall'equazione (13) per valori costanti dello spostamento normalizzato w_n sono curvilinei nonostante l'eliminazione del parametro β dalla formulazione.

Il valore del parametro ψ del modello deve rispettare il seguente vincolo imposto dall'equazione (5):

$$\psi > \psi_{min} = \frac{\ln\left(\frac{\alpha_p + \alpha_c}{\alpha_c}\right)}{\ln(\omega + 1)} \quad (15)$$

Il fatto che nella formulazione modificata α_p risulti funzione della tensione normale, in base alle

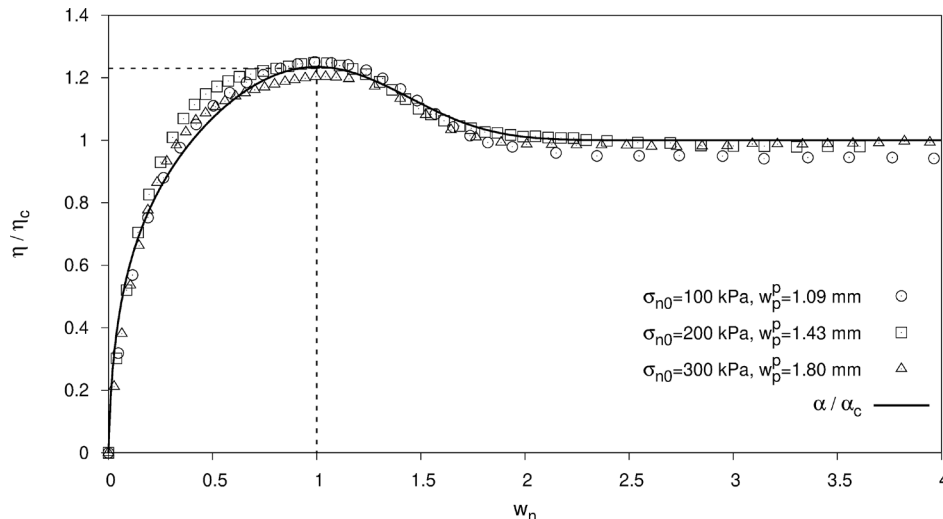


Fig. 2 – Determinazione dei parametri della funzione di incrudimento.

Fig. 2 – Determination of parameters of the hardening function.

equazioni (11) e (14), può essere tale da violare la (15). Pertanto, ψ non è più un parametro, come nel modello precedente, ma viene posto pari a:

$$\psi = c_\psi \psi_{min} \quad (16)$$

dove $c_\psi > 1$ è un nuovo parametro del modello.

Alla luce delle modifiche illustrate, il modello modificato necessita la determinazione di 11 parametri: K_n , K_s , μ , ν , ρ , α_c , r_d , ω , c_ψ , ξ , ζ .

Determinazione dei parametri

La determinazione dei parametri viene effettuata a partire da tre prove a tensione normale costante, nel seguito abbreviate come CNL (Constant Normal Load).

I dati sperimentali riportati nelle figure utilizzate nel seguito si riferiscono ad un'interfaccia tra la sabbia di Toyoura avente DR = 85% ed una piastra in alluminio avente rugosità massima $R_{max} = 60 \mu m$ [MORTARA, 2001]. Essendo $D_{50} = 0.24 mm$ per la sabbia utilizzata, la rugosità normalizzata risulta $R_n = 0.25$ e, pertanto, l'interfaccia può senz'altro ritenersi rugosa [KISHIDA e UESUGI, 1987].

Il primo aspetto da considerare è la determinazione dei parametri della legge sforzi-dilatanza. La figura 1 mostra le relazioni sperimentali $d - \eta$ per le tre prove CNL per le tensioni $\sigma_{n0} = 0.1 Mpa$ (Fig. 1a), $\sigma_{n0} = 0.2 Mpa$ (Fig. 1b) e $\sigma_{n0} = 0.3 Mpa$ (Fig. 1c). Per ogni figura sono riportati i valori del rapporto tensionale di picco η_p , del rapporto tensionale allo stato critico η_c e di quello relativo alla condizione $d = 0$ nella fase di incrudimento η_0 . Si può notare come la doppia relazione $d - \eta$ scelta interpreti in maniera soddisfacente i dati sperimentali.

La regressione lineare delle tre coppie di dati σ_n , d_{max} consente di determinare i parametri μ e ν che risultano essere:

$$\mu = 0.223 Mpa^{-1} \quad (17)$$

$$\nu = 0.493 \quad (18)$$

Inoltre, il valore del parametro ρ viene determinato dalla media dei tre valori η_0 / η_c . In base ai risultati abbiamo:

$$\rho = 0.493 \quad (19)$$

Il valore del parametro α_c viene posto pari alla media dei tre valori η_c mostrati nella figura 1. Risulta:

$$\alpha_c = 0.697 \quad (20)$$

Il valore del parametro r_d viene invece calcolato dalla media dei tre valori $-(\eta_p - \eta_c) / d_{max}$. In base ai valori mostrati risulta:

$$r_d = 0.913 \quad (21)$$

I parametri della legge di incrudimento vengono determinati sulla base del grafico $-\eta / \eta_p - w_n$ mostrato in figura 2.

La media dei valori $-\eta_p / \eta_c$ risulta pari a 1.24. Il valore del parametro c_ψ di primo tentativo viene posto pari a 1.05 ed il valore della costante ω viene determinato sovrapponendo i due grafici $w_n - \eta / \eta_p$ e $w_n - \alpha / \eta_c$. I valori di c_ψ e ω sono quelli che meglio interpretano i dati sperimentali. I due parametri risultano essere:

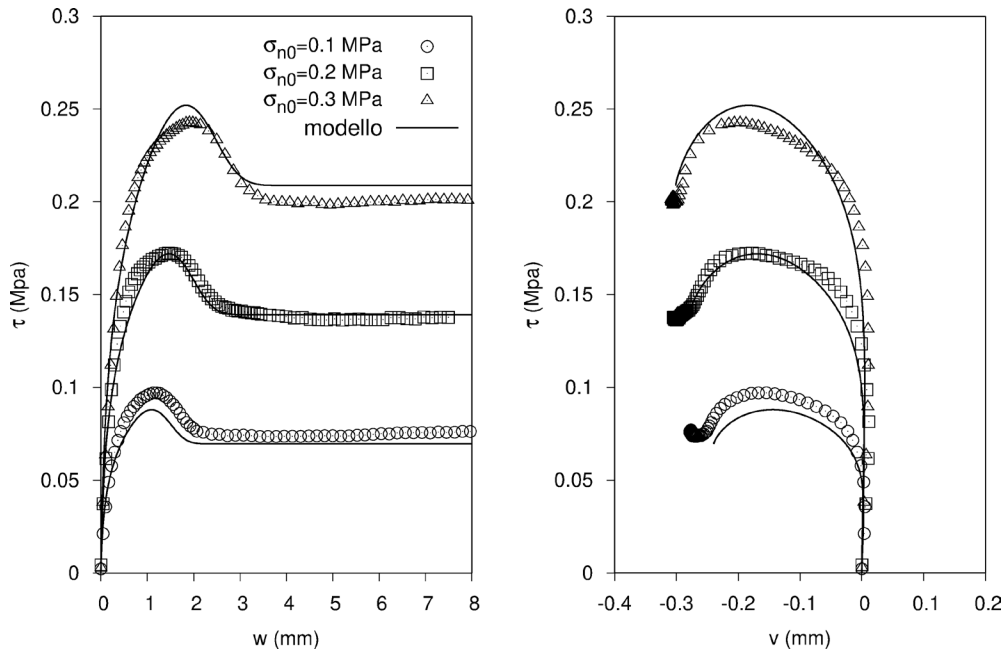


Fig. 3 – Simulazione delle prove CNL.

Fig. 3 – Simulation of the CNL tests.

$$\omega=150 \quad (22)$$

$$c_{\psi}=1.04 \quad (23)$$

La regressione lineare delle tre coppie di dati σ_n , w_p^b mostrate in figura 2 consente di determinare i parametri ξ e ζ che risultano essere:

$$\xi=3.500 \text{ mm} \quad (24)$$

$$\zeta=0.722 \text{ mm} \quad (25)$$

Infine, i valori delle rigidzze elastiche vengono stabiliti senza una determinazione sperimentale ma vengono fissati poiché il loro valore non determina variazioni significative nelle simulazioni a patto che esse abbiano un corretto ordine di grandezza [MORTARA, 2001]. Per i valori di K_n e K_s sono fissati i seguenti valori:

$$K_n = 10 \text{ MPa/mm} \quad (26)$$

$$K_s = 4 \text{ MPa/mm} \quad (27)$$

Interpretazione dei risultati

In questo paragrafo si riportano brevemente i risultati dell'integrazione del legame costitutivo ela-

stoplastico. Gli incrementi degli sforzi sono legati agli incrementi degli spostamenti dalla seguente relazione (si veda, ad esempio, NOVA e WOOD, 1979)

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_n \\ \dot{\tau} \end{bmatrix} = D^{ep} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (28)$$

dove:

$$D^{ep} = D - \frac{Dmn^T D}{H + n^T Dm} \quad (29)$$

essendo D la matrice elastica, m il gradiente del potenziale plastico, n il gradiente della superficie di plasticizzazione ed H il modulo di incrudimento.

La figura 3 mostra le simulazioni delle tre prove CNL che erano state eseguite per i tre valori della tensione normale iniziale $\sigma_{n0} = 0.1, 0.2, 0.3 \text{ MPa}$. Si può osservare come le previsioni del modello siano molto buone ma ciò non deve stupire poiché proprio dalle prove CNL sono stati determinati i parametri del modello (si vedano le Figg. 1 e 2).

La figura 4 mostra invece le simulazioni delle prove a rigidzza normale imposta (CNS, Constant Normal Stiffness). In particolare, le prove sperimentali si riferiscono ai tre valori della tensione normale iniziale visti in precedenza e a due valori della costante di rigidzza pari a $k = 0.5 \text{ MPa/mm}$ (Figg. 4a e 4b) e a $k = 1.0 \text{ MPa/mm}$ (Figg. 4c e 4d). I confronti sono riportati in termini di curve $w - \tau$ e $\sigma_n - \tau$. Gli stress-path delle prove (Figg. 4b e 4d) evidenziano dapprima una piccola diminuzione della tensione normale e successivamente il forte incremento dovuto all'accoppiamento tra il comportamento volumetrico e la condizione al contorno di rigidzza normale. Si può

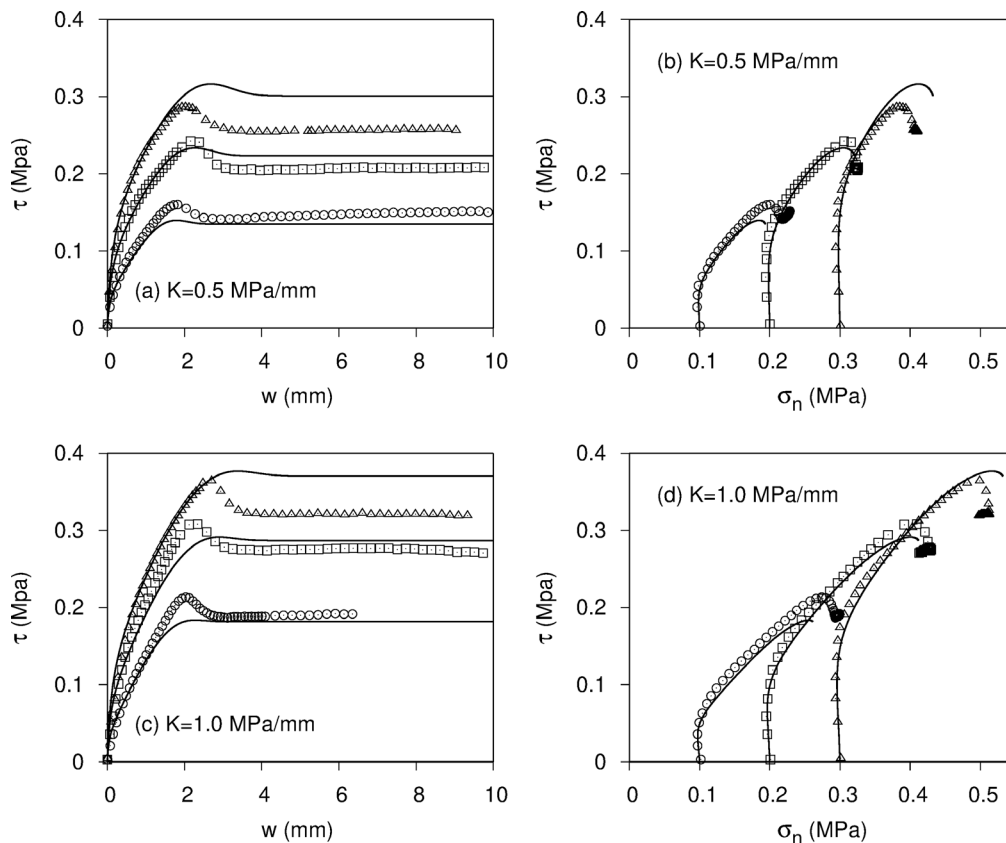


Fig. 4 – Simulazione delle prove CNS.

Fig. 4 – Simulation of the CNS tests.

notare che questa versione del modello non fornisce una perfetta interpretazione del softening. Il motivo risiede nella dilatanza massima: dall'equazione (14), infatti, si osserva che $\alpha_p - \alpha_c = -r_d d_{max}$ e, pertanto, se la dilatanza massima delle prove non viene bene interpretata dall'equazione (11) la differenza $\alpha_p - \alpha_c$ viene sottostimata a sua volta. Si può tuttavia notare come il confronto tra i dati sperimentali e il modello risulti soddisfacente.

Conclusioni

La nota ha riportato la formulazione di un modello costitutivo per le interfacce tra sabbie e superfici solide. In particolare, un modello esistente è stato semplificato ed è stata illustrata la procedura di determinazione dei parametri costitutivi che risulta, anch'essa, semplificata rispetto alla precedente. Infine, la nuova formulazione è stata validata confrontando le predizioni del modello con i risultati sperimentali. Rispetto al modello originale, la qualità delle predizioni risulta leggermente inferiore. Ciò è dovuto alla non perfetta interpretazione della dilatanza massima che è un aspetto di fondamentale importanza per il modello. Tuttavia, la capacità predittiva del modello è ancora buona e la procedura per la

determinazione dei parametri risulta molto semplificata rispetto al modello precedente.

Bibliografia

- BOLTON M.D. (1986) – *The strength and dilatancy of sands*. Géotechnique, 36, pp. 65-78.
- BOULON M. (1988) – *Contribution à la mécanique des interfaces sols-structures. Application au frottement latéral des pieux*. Diplôme d'habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- BOULON M., FORAY P. (1986) – *Physical and numerical simulation of lateral shaft friction along offshore piles in sand*. 3rd International Conference on Numerical Methods in Offshore Piling, Nantes, France, 21-22 May 1986, pp. 127-147.
- BOULON M., GHIONNA V.N., MORTARA G. (2003) – *A strain-hardening elastoplastic model for sand structure interface under monotonic and cyclic loading*. Mathematical and Computer Modelling, 37, pp. 623-630.
- BOULON M., NOVA R. (1990) – *Modelling of soil-structure interface behaviour, a comparison between elastoplastic and rate type laws*. Computers and Geotechnics, 9, pp. 21-46.
- BOULON M., PLYTAS C., FORAY P. (1986) – *Comportement d'interface et prévision du frottement latéral le long des*

- pieux et tirants d'ancrage*. Revue Française de Géotechnique, 35, pp. 31-48.
- CICHY W., BOULON M., DESRUES J. (1987) – *Etude expérimentale stéréophotogrammétrique des interfaces sols-fondations à la boîte de cisaillement direct*. 4ème Colloque franco-polonais de Mécanique des Sols Appliquée, Flavigny E. and Cordary D. (Eds.), Grenoble, France, 14-18 Septembre 1987, pp. 311-325.
- FAKHARIAN K., EVGIN E. (1997) – *Cyclic simple-shear behavior of sand-steel interfaces under constant normal stiffness condition*. ASCE, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 123, pp. 1096-1105.
- GHIIONNA V.N., MORTARA G. (2002) – *An elastoplastic model for sand-structure interface behaviour*. Géotechnique, 52, pp. 41-50.
- JOHNSTON I.W., LAM T.S.K., WILLIAMS A.F. (1987) – *Constant normal stiffness direct shear testing for socketed pile design in weak rock*. Géotechnique, 37, pp. 83-89.
- KISHIDA H., UESUGI M. (1987) – *Tests of the interface between sand and steel in the simple shear apparatus*. Géotechnique, 37, pp. 45-52.
- LEHANE B.M., JARDINE R.J., BOND A.J., FRANK R. (1993) – *Mechanism of shaft friction in sand from instrumented pile test*. ASCE, Journal of Geotechnical Engineering, 119, pp. 19-35.
- LEHANE B.M., SCHNEIDER J.A., LIM J.K., MORTARA G. (2012) – *Shaft friction from instrumented displacement piles in an uncemented calcareous sand*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 138, pp. 1357-1368.
- MORTARA G. (2001) – *An elastoplastic model for sand-structure interface behaviour under mono-tonic and cyclic loading*. Ph.D. Thesis, Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Politecnico di Torino.
- MORTARA G., FERRARA D., FOTIA G. (2010) – *Simple model for the cyclic behavior of smooth sand-steel interfaces*. ASCE, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 136, pp. 1004-1009.
- MORTARA G., MANGIOLA A., GHIIONNA V.N. (2007) – *Cyclic shear stress degradation and post-cyclic behaviour from sand-steel interface direct shear tests*. Canadian Geotechnical Journal, 44, pp. 739-752.
- NOVA R., WOOD D.M. (1979) – *A constitutive model for sand in triaxial compression*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 3, pp. 255-278.
- SABERI M., ANNAN C.D., KONRAD J.-M., LASHKARI A. (2016) – *A critical state two-surface plasticity model for gravelly soil-structure interfaces under monotonic and cyclic loading*. Computers and Geotechnics, 80, pp. 71-82.
- SCHLOSSER F., GUILLOUX A. (1981) – *Le frottement dans le renforcement des sols*. Revue Française de Géotechnique, 16, pp. 65-79.
- TABUCANON J.T., AIREY D.W., POULOS H.G. (1995) – *Pile skin friction in sands from constant normal stiffness tests*. ASTM, Geotechnical Testing Journal, 18, pp. 350-364.
- UESUGI M., KISHIDA H. (1986) – *Influential factors of friction between steel and dry sands*. Soils and Foundations, 26, pp. 33-46.
- WERNICK E. (1978) – *Skin friction of cylindrical anchors in non-cohesive soils*. Symposium on Soil Reinforcing e Stabilising Techniques in Engineering Practice, Sydney, Australia, 16-19 October 1978, pp. 201-219.
- YOSHIMI Y., KISHIDA T. (1981) – *A ring torsion apparatus for evaluating friction between soil and metal surfaces*. ASTM, Geotechnical Testing Journal, 4, pp. 145-152.

A simple model for the sand-surface interfaces

Summary

This note deals with the modelling of interfaces between sands and metallic surfaces. In particular, the model is a simplification of an Author's previous formulation. After the comparison between the two formulations, the procedure of calibration of parameters will be reported and the comparison is shown between experimental results and model predictions.