

Studio su modello matematico e controllo su modello analogico di un moto filtrante a superficie libera in regime vario*

G. CURTO, G. UMITÀ**

SOMMARIO: Utilizzando un procedimento alle differenze finite per la risoluzione della equazione differenziale di Boussinesq, già applicato in precedenti studi ed ora svolto in modo più generale, gli AA. costruiscono un modello matematico del moto piano di filtrazione a superficie libera in regime vario che si realizza in un filtro di lunghezza finita, alimentato a monte su un fronte verticale permeabile e delimitato da due piani impermeabili, uno orizzontale di base ed uno verticale all'estremo. I risultati del modello matematico sono confrontati con quelli di un modello analogico, del tipo Hele-Shaw. Dal confronto risulta che, se si opera una opportuna scelta dei passi spaziale e temporale, i risultati del calcolo sono molto soddisfacenti, nel senso che i profili calcolati scartano solo di qualche percento dai profili sperimentali. I risultati vengono presentati in un abaco adimensionale, il quale consente il tracciamento dei profili liquidi nel filtro durante tutto il moto vario, una volta assegnate le caratteristiche geometriche ed idrauliche del sistema.

1. Premesse

Lo studio oggetto di questa memoria fa parte di una serie di ricerche sui moti filtranti a superficie libera in regime vario, che ormai da alcuni anni si vanno conducendo a Palermo [CURTO, 1968-69, 1969, 1970-71, 1973; CUSMANO, UMITÀ, 1974; JAPPELLI, FICARRA, SAMPERI, 1973; SANTORO, 1974; SANTORO, 1974], con finalità applicative diverse, ma con metodologia che sta assumendo una fisionomia sempre più definita; anche se ovviamente le difficoltà crescono via via che dagli schemi più elementari si passa a quelli più complessi per geometria del mezzo e condizioni ai limiti [JAPPELLI, 1973].

Di ogni moto in esame, precisamente, si costruisce un *modello matematico*, al fine principale di ricavare l'evolversi della linea libera nel tempo, appoggiandosi all'equazione di Boussinesq, che viene trattata con metodi numerici alle differenze finite, opportunamente adattati alle diverse condizioni geometriche e al contorno che si devono affrontare.

I risultati del modello matematico vengono paragonati con quelli di un *modello analogico*, del tipo Hele-Shaw; dal confronto si trae il giudizio se il modello matematico è adatto oppure no a rappresentare il moto in esame.

* La ricerca è stata eseguita sotto gli auspici dell'ENEL (Ente Nazionale per l'Energia Elettrica).

** Prof. Ing. Giuseppe CURTO, Istituto di *Idraulica* della Università di Palermo.

Dott. Ing. Guido UMITÀ, Istituto di *Ingegneria Geotecnica e Mineraria* della Università di Palermo.

L'impostazione generale ed il modello matematico sono opera comune dei due Autori. G. Curto ha svolto le esperienze sul modello Hele-Shaw e G. Umiltà ha elaborato il programma di calcolo e sviluppato i calcoli automatici.

Il moto che viene qui preso in considerazione si svolge nell'ammasso poroso, supposto indeformabile, che è schematicamente rappresentato nella fig. 1, delimitato da due piani impermeabili, uno orizzontale di base ed uno verticale all'estremo, e da un fronte verticale permeabile all'inizio, attraverso il quale il filtro si alimenta delle acque di un serbatoio.

Per fissare le idee su una situazione concreta, sarà considerato il caso in cui inizialmente nel serbatoio di alimentazione, e di conseguenza in tutto il filtro, non sia contenuta dell'acqua, e che il moto vario sia provocato dal riempimento del serbatoio, il cui livello si porta alla quota H in un tempo molto piccolo, e quindi con una velocità elevatissima a paragone di quella con cui avanzerà successivamente la corrente filtrante. Queste limitazioni però non riguardano il modello matematico che si può facilmente estendere a si-

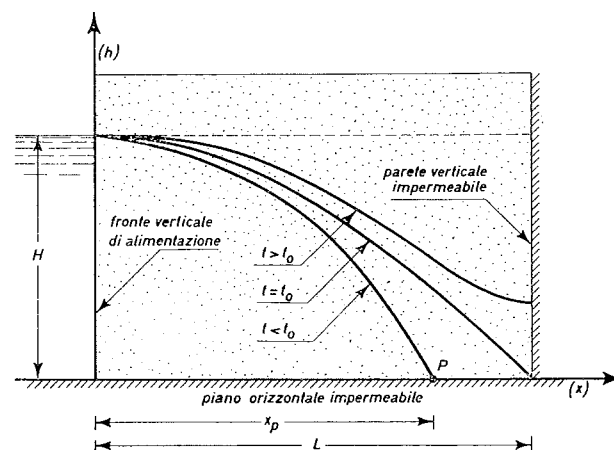


Fig. 1. - Schema dell'ammasso poroso.

tuazioni diverse, per ciò che riguarda la linea libera iniziale nel filtro e la legge di innalzamento nel serbatoio.

Il moto presenta caratteristiche diverse, e di conseguenza diverso risulta l'approccio matematico, nelle due fasi in cui esso si può distinguere.

La prima fase si sviluppa fra l'istante iniziale e l'istante t_0 , in cui l'estremità P della corrente che avanza raggiunge la parete verticale impermeabile; in questa fase la presenza della suddetta parete non si fa evidentemente sentire e l'avanzamento della linea libera avviene come nel *filtro indefinito* che è stato già largamente studiato [CURTO, 1968-69; CURTO, 1969], e risolto.

La seconda fase, successiva all'istante t_0 , costituisce l'oggetto di questa memoria: essa dura finché la linea libera assume la posizione di riposo orizzontale, alla stessa quota, se si trascura la capillarità, del livello nel serbatoio.

La realizzazione del modello matematico di questa seconda fase del moto non sarebbe stata possibile se non si fosse prima risolta la fase precedente.

Le ragioni sono principalmente due: una, molto evidente, è costituita dal fatto che la configurazione finale della prima fase, cioè la linea libera all'istante t_0 , costituisce la condizione iniziale della seconda; l'altra è tipica del modello matematico adottato, per il quale la linea libera, che chiameremo *effettiva*, in un istante t immediatamente successivo a t_0 , si determina, come sarà spiegato dettagliatamente in seguito, con un procedimento che presuppone, almeno in un primo periodo, la conoscenza della linea libera che si sarebbe realizzata se la parete impermeabile di valle non ci fosse stata; quest'ultima sarà indicata come la *linea libera del filtro indefinito*.

In ciò che segue richiameremo dapprima le relazioni fondamentali del *filtro indefinito*, ottenute, come si è detto, per via analitica, integrando la equazione di Boussinesq che regge il moto vario: poi riprenderemo il metodo numerico alle differenze finite, che è già stato utilizzato in precedenza, mostrandone più generali possibilità di applicazione; quindi descriveremo il modello matematico con cui abbiamo rappresentato il fenomeno del riempimento dell'ammasso permeabile di fig. 1, e sulla base del quale è stato redatto il programma di calcolo automatico; i risultati numerici saranno quindi confrontati con quelli sperimentali, ottenuti su un modello analogico del tipo Hele-Shaw.

Verificato il buon accordo tra risultati del calcolo e delle esperienze, mostreremo alla fine un abaco adimensionale costruito sulla base dei risultati del modello matematico, il quale risolve

praticamente il problema, consentendo in particolare di tracciare agevolmente i profili della corrente nel filtro in qualsiasi istante del transitorio.

2. Richiami delle relazioni fondamentali del filtro indefinito

L'equazione della linea libera nel filtro indefinito, riferita agli assi cartesiani (x, h) segnati in fig. 1, è stata ricavata e controllata sperimentalmente nelle memorie precedenti [CURTO, 1968-69; CURTO, 1969].

Essa risulta:

$$(1) \quad h = H - A \frac{x}{\sqrt{t}} - C \frac{x^2}{t}$$

I tempi t sono contati a partire dall'istante in cui viene sollevato il livello nel serbatoio di alimentazione; A e C sono fornite dalle seguenti espressioni:

$$(2) \quad A = 0,408 \sqrt{\frac{nH}{k}}$$

$$(3) \quad C = 0,125 \frac{n}{k}$$

essendo k ed n , rispettivamente, la permeabilità e la porosità del mezzo, supposte costanti in tutti i punti e nel tempo.

Dalla (1) si deduce facilmente la ascissa x_p dell'estremità P della linea libera, evidentemente funzione crescente del tempo. Risulta:

$$(4) \quad x_p = 1,632 \sqrt{\frac{kH}{n} t}$$

Da questa, ponendo x_p uguale L, si ricava immediatamente il tempo t_0 , definito nel paragrafo precedente:

$$(5) \quad t_0 = 0,375 \frac{nL^2}{kH}$$

3. La equazione del moto trattata alle differenze finite e le condizioni ai limiti

Il metodo numerico, come si è visto nelle precedenti memorie [CURTO 1970-71; SANTORO, 1974], si basa sulla sostituzione delle derivate $\frac{\partial h}{\partial t}$ e

$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}$, che compaiono nella ben nota equazione di Boussinesq

$$(6) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2n} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}$$

rispettivamente con i rapporti incrementali

$$\frac{h_{i,t+\Delta t} - h_{i,t}}{\Delta t}$$

e

$$\frac{(h_{i-1,t+\Delta t}^2 - h_{i,t+\Delta t}^2) - (h_{i,t}^2 - h_{i+1,t}^2)}{\Delta x^2}$$

Il significato dei simboli è chiaro se si fa riferimento alla fig. 2, in cui sono segnate le posizioni della linea libera all'istante generico t e a quello successivo $t + \Delta t$ e le altezze h in tre

$$(7) \quad 2B h_{i,t+\Delta t} - 2B h_{i,t} - h_{i-1,t+\Delta t}^2 + h_{i,t+\Delta t}^2 + h_{i,t}^2 - h_{i+1,t}^2 = 0$$

essendo

$$(8) \quad B \pm \frac{n \Delta x^2}{k \Delta t}$$

Dati k ed n e fissati i passi Δx , Δt , si calcola B con la (8). La (7) è allora una relazione tra quattro quote piezometriche, due al tempo generico t e le altre due al tempo successivo $t + \Delta t$.

$$(9) \quad h_{i-1,t+\Delta t} = \sqrt{2B (h_{i,t+\Delta t} - h_{i,t}) + h_{i,t+\Delta t}^2 + h_{i,t}^2 - h_{i+1,t}^2}$$

Risolviendo rispetto a $h_{i,t+\Delta t}$, si ottiene invece:

$$(10) \quad h_{i,t+\Delta t} = B + \sqrt{B^2 + 2B h_{i,t} - h_{i,t}^2 + h_{i-1,t+\Delta t}^2 + h_{i+1,t}^2}$$

Le (9) e (10) sono concettualmente equivalenti in quanto entrambe consentono, nota la linea libera al tempo generico t , di calcolare per punti la linea libera al tempo $t + \Delta t$ successivo. La differenza consiste solo nel fatto che la (9) presuppone la conoscenza anche di un punto $h_{i,t+\Delta t}$, all'istante $t + \Delta t$, che si trova a valle di quello $h_{i-1,t+\Delta t}$ che si sta calcolando, quindi consente di procedere da valle verso monte; mentre la (10) presupponendo la conoscenza anche della quota $h_{i-1,t+\Delta t}$ a monte di quella $h_{i,t+\Delta t}$ incognita, consente al contrario di procedere nel calcolo da monte verso valle.

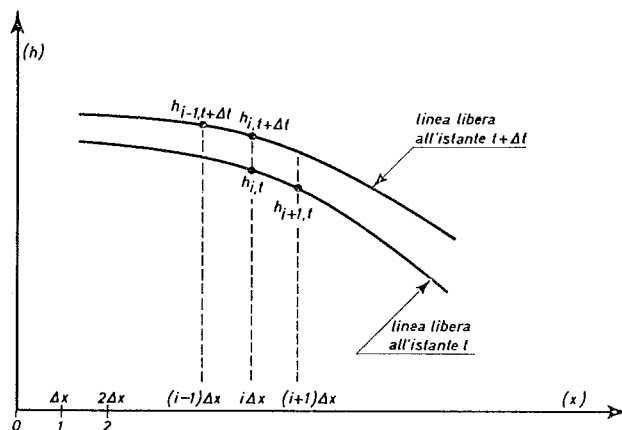


Fig. 2. - Definizione delle grandezze caratteristiche.

sezioni generiche di ascisse $(i-1)\Delta x$, $i\Delta x$, $(i+1)\Delta x$.

L'equazione differenziale della linea libera si trasforma nella seguente relazione:

La relazione può essere risolta rispetto a una qualsiasi delle quattro h .

Per le applicazioni al nostro problema interessa evidentemente, nota la linea libera a un dato e generico tempo t , valutarne la posizione al tempo successivo $t + \Delta t$; quindi interessa risolvere la (7) rispetto ad una delle due quote relative al tempo $t + \Delta t$.

Risolviendo rispetto a $h_{i-1,t+\Delta t}$, si ottiene:

Per risolvere il nostro problema occorre naturalmente associare all'equazione di Boussinesq le condizioni ai limiti.

Con riferimento alla seconda fase del moto, di cui ci stiamo occupando, dobbiamo considerare come istante iniziale il tempo t_0 dato dalla (5).

Allora la condizione iniziale si esprime:

$$(11) \quad \text{per } t = t_0$$

$$h_{i,t_0} = H - A \frac{\Delta x}{\sqrt{t_0}} i - C \frac{\Delta x^2}{t_0} i^2$$

Le condizioni al contorno sono due: esse esprimono, durante il moto vario, la invariabilità del carico H nella sezione di ascissa nulla ($i = 0$), e l'annullarsi della cadente piezometrica $\frac{\partial h}{\partial x}$ nella sezione terminale impermeabile ($i = N$, essendo N il rapporto tra la lunghezza L del filtro e il passo Δx).

La prima condizione si scrive, dunque immediatamente:

$$(12) \quad \text{per } i = 0 \quad h_{0,t} = H = \text{cost}$$

La seconda, passando alle differenze finite, si risolve nella eguaglianza delle quote piezometriche delle due ultime sezioni ($N - 1$ esima ed N esima), cioè:

$$(13) \quad \text{per } i = N \quad h_{N,t} = h_{N-1,t}$$

4. Il modello matematico

In questo paragrafo mostreremo come le relazioni del filtro indefinito, l'equazione del moto risolta alle differenze finite e le condizioni ai limiti, richiamate e discusse nei due paragrafi precedenti, vengono utilizzate per risolvere il problema del tracciamento della linea libera nel filtro in esame; cioè in definitiva descriveremo il modello matematico mediante il quale abbiamo rappresentato il fenomeno del riempimento dell'ammasso permeabile di fig. 1.

Riferiamoci agli schemi di fig. 3.

L'asse delle ascisse è stato diviso in N intervalli uguali Δx ; evidentemente risulta $\Delta x = L/N$. L'estremo dell'intervallo generico, di ascissa x , viene individuato da un numero intero $i = x/\Delta x$. Per quello che si vedrà tra breve, tali intervalli vengono riportati anche al di là dell'ascissa finale N dove è posta la parete verticale impermeabile.

Nello schema 3a) è rappresentata a tratto e punto la linea libera all'istante t_0 , di equazione (11).

Supponiamo che la parete impermeabile verticale non esista.

Allora la linea libera avanzerebbe nel filtro indefinito e la sua configurazione in ciascuno istante si potrebbe determinare tramite l'equazione (1).

La sua estremità raggiungerebbe l'ascissa $N + 1$, avanzando cioè del passo Δx , all'istante $t_0 + \Delta t$.

L'intervallo Δt si ricava facilmente differenziando la (4) e ponendo poi $t = t_0$.

Risulta:

$$(14) \quad \Delta t = 0,751 \frac{n L}{k H} \Delta x$$

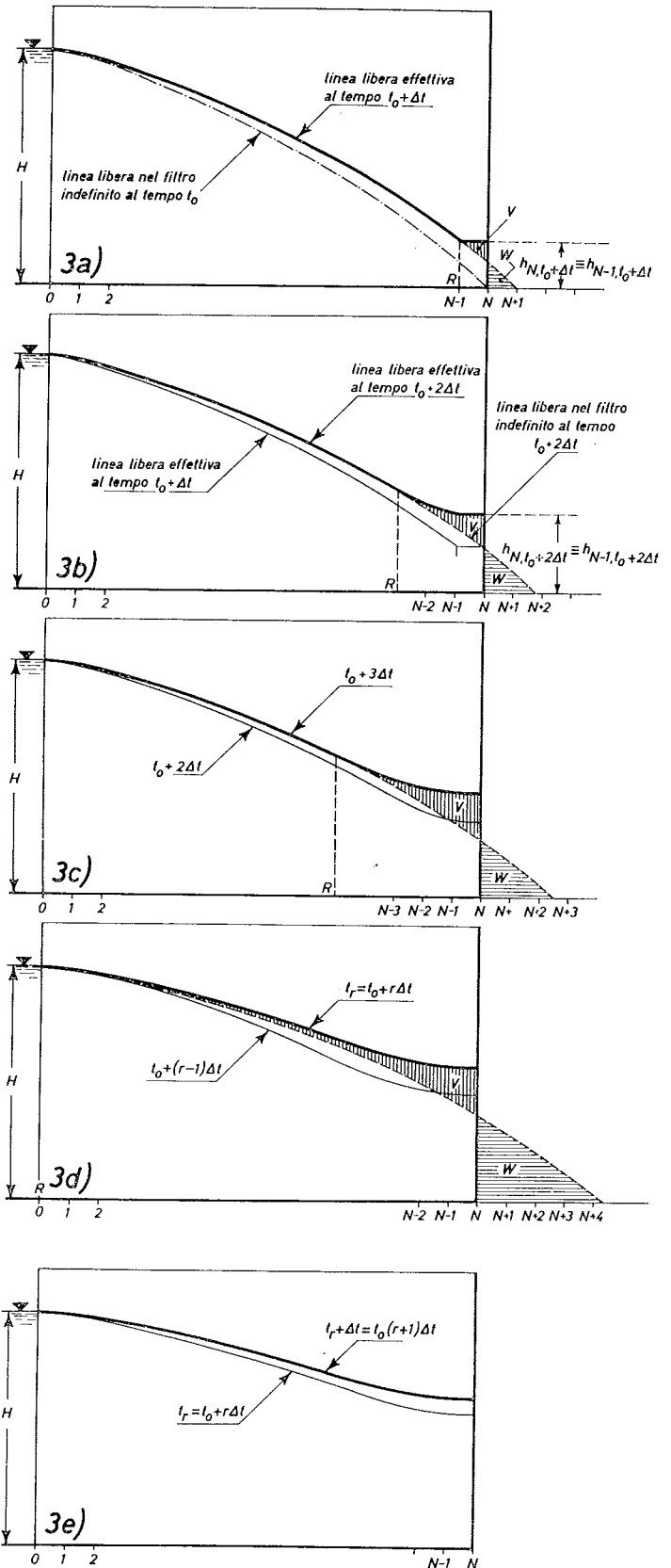


Fig. 3. - Rappresentazione schematica delle varie fasi del moto

Poiché in realtà la presenza dell'ostacolo impedisce questo avanzamento, il volume liquido W (1) indicato in fig. 3a) a valle di N , compreso tra il fondo e la linea libera del filtro indefinito al tempo $t_0 + \Delta t$, non avrà potuto in effetti attraversare la parete. Ce lo dovremo dunque ritrovare a monte di N , e precisamente in V , cioè nella zona compresa tra la parete verticale, la linea libera effettiva allo stesso tempo $t_0 + \Delta t$ e la contemporanea linea libera nel filtro indefinito.

Poiché il tratto di quest'ultima linea tra le sezioni $N-1$ ed $N+1$ può con buona approssimazione confondersi, se si è scelto il passo Δx abbastanza piccolo, con un segmento rettilineo, e poiché per la (13) la linea libera effettiva nell'ultimo tratto ($N-1$, N) deve essere orizzontale, allora le due aree tratteggiate in fig. 3a) risultano triangolari.

Come conseguenza di tutto ciò si ha che la linea libera effettiva all'istante $t_0 + \Delta t$, segnata a tratto intero in fig. 3a), risulta coincidente con quella del filtro indefinito allo stesso istante, eccetto che nell'ultimo tratto in cui si presenta orizzontale.

Consideriamo adesso la linea libera nel filtro indefinito al tempo successivo $t_0 + 2\Delta t$ (fig. 3b).

Nello schema è riportata la linea libera effettiva all'istante precedente $t_0 + \Delta t$, che, per quel che si è detto prima, è nota.

Supponiamo di conoscere l'altezza $h_{N, t_0 + 2\Delta t}$ effettiva nella sezione finale all'istante considerato; per la condizione al contorno (13) questa ultima risulta eguale alla contemporanea altezza $h_{N-1, t_0 + 2\Delta t}$ nella sezione precedente.

Essendo noto allora un punto del profilo all'istante $t_0 + 2\Delta t$, e precisamente il punto di valle $h_{N-1, t_0 + 2\Delta t}$, e tutto il profilo all'istante precedente $t_0 + \Delta t$, possiamo applicare successivamente la (9) e calcolare quindi, procedendo *da valle verso monte*, la linea libera effettiva all'istante $t_0 + 2\Delta t$.

Man mano che si procede verso monte, la linea libera effettiva (segnata a tratto grosso in fig. 3b), si avvicina dal di sopra a quella nel filtro indefinito allo stesso istante, e in una certa sezione, di ascissa R , addirittura la taglia passando al di sotto.

Non potendo ovviamente la linea libera effettiva scendere al di sotto di quella del filtro indefinito allo stesso istante, allora, dalla sezione R all'indietro, fino alla sezione di alimentazione, la

(1) I volumi liquidi menzionati in tutta la memoria si riferiscono evidentemente all'unità di larghezza del filtro, e quindi equivalgono alle aree tratteggiate in fig. 3.

linea libera effettiva coincide con quella nel filtro indefinito.

La sezione R separa dunque il profilo effettivo in due tratti. Il primo, di equazione (1), coincide con il profilo che si avrebbe se l'ostacolo impermeabile non esistesse; si può dire che questo tratto non è stato ancora raggiunto dalla perturbazione che risale da valle verso monte propagandosi al di sopra del profilo nel filtro indefinito.

Il secondo tratto dipende invece dall'altezza del profilo nella sezione finale impermeabile, sicuramente maggiore di quella nel filtro indefinito. Si può dire dunque che, a differenza del primo tratto di corrente, questo secondo tratto è *governato da valle*, nel senso che tutte le grandezze caratteristiche del moto, e non solo il profilo, risentono della presenza della suddetta parete; la qual cosa, invece, si ripete, non avviene per il tratto di monte, che tale presenza non ha ancora *avvertito*, ed è influenzato soltanto dalle condizioni di alimentazione.

Il tracciamento del secondo tratto del profilo presuppone, come si è visto, la conoscenza della quota piezometrica, comune alle due ultime sezioni, che abbiamo ammesso nota, ma che in effetti non conosciamo.

La ricerca di tale quota viene condotta con un procedimento per tentativi, che descriveremo appresso, sfruttando per la continuità la condizione di eguaglianza dei due volumi W e V .

Il volume W , che, come si è detto, risulta compreso tra la linea libera nel filtro indefinito, l'asse delle ascisse ed il piano verticale impermeabile, si può valutare analiticamente eseguendo l'integrale:

$$W = \int_{x=L}^{x=x_p} h dx$$

in cui h è espresso dalla (1) e x_p , che, essendo $t > t_0$, deve essere maggiore di L , si calcola con la (4).

Risulta:

$$(16) \quad W = H(x_p - L) + \frac{A}{\sqrt{t}} \frac{x_p^2 - L^2}{2} + \frac{C}{t} \frac{x_p^3 - L^3}{3}$$

Come si controlla subito sostituendo al posto di x_p la espressione (4), W risulta, come è ovvio, una funzione crescente di t .

All'istante $t_0 + 2\Delta t$, al quale si riferisce lo

schema di fig. 3b), potremo dunque calcolare il volume W mediante le relazioni (4) e (16).

Il volume V è quello compreso tra la linea libera nel filtro indefinito e quella effettiva, tracciate entrambe allo stesso istante $t_0 + 2 \Delta t$, nel tratto tra le sezioni di ascisse R ed N .

Il profilo effettivo si traccia, come si è detto, partendo dalla quota di valle incognita, $h_{N-1, t_0+2 \Delta t}$ ($\equiv h_{N, t_0+2 \Delta t}$).

Per determinarla si assegnano per essa diversi valori di tentativo $h'_{N, t_0+2 \Delta t}$, $h''_{N, t_0+2 \Delta t}$, $h'''_{N, t_0+2 \Delta t}$..., per ciascuno dei quali si tracciano i profili effettivi e si calcolano i corrispondenti volumi V' , V'' , V''' (2).

Nella sezione finale si assumerà quella quota

$$(17) \quad h_{N, t_0+2 \Delta t} = \frac{h_{N, t_0+2 \Delta t}^k |\Delta V^k| + h_{N, t_0+2 \Delta t}^{k+1} \cdot \Delta V^{k+1}}{|\Delta V^k| + \Delta V^{k+1}} =$$

$$= h_{N, t_0+2 \Delta t}^{k+1} - \delta \frac{|\Delta V^k|}{|\Delta V^k| + \Delta V^{k+1}}$$

Dedotta allora così la linea libera effettiva al tempo $t_0 + 2 \Delta t$, si considera il tempo successivo $t_0 + 3 \Delta t$ e si traccia la nuova linea libera nel filtro indefinito: appoggiandosi a queste due linee per il calcolo del nuovo W , mediante la (16), e per il tracciamento della nuova linea libera effettiva, col procedimento per tentativi che abbiamo discusso in precedenza, si perviene infine alla linea libera al tempo $t_0 + 3 \Delta t$.

Evidentemente la sezione R (vedi schema 3c) si sposta verso monte; tale spostamento, ripetendo il procedimento di calcolo, continua negli istanti successivi sino a che si raggiunge un certo tempo $t_r = t_0 + r \Delta t$ in cui la sezione R ha raggiunto l'ascissa nulla della sezione di alimentazione (schema 3d).

Da questo istante in poi verrà evidentemente a mancare il primo tratto di profilo effettivo coincidente con quello del filtro indefinito: cioè tutte le sezioni della corrente, compresa quella di alimentazione, risentono degli effetti della parete impermeabile.

Il riferimento alla situazione di filtro indefinito, che si è fatta sino a questo momento, non sussiste più, perché dopo l'istante t_r nessuna caratteri-

(2) Il volume V si calcola come somma di aree trapezie di altezza Δx e basi pari alle distanze tra la linea libera nel filtro indefinito e la contemporanea linea libera effettiva.

a cui corrisponde un volume V eguale proprio a quello W calcolato mediante la (16).

Il calcolo si effettua in pratica assumendo all'inizio un valore di primo tentativo $h_{N, t_0+2 \Delta t}$ per cui risulta V' inferiore a W , cioè $\Delta V' = V' - W < 0$, e dando poi piccoli incrementi δ a tale valore fin tanto che non si perviene a due valori successivi $h_{N, t_0+2 \Delta t}^k$ e $h_{N, t_0+2 \Delta t}^{k+1}$, tali che al primo corrisponde una differenza $\Delta V^k = V^k - W < 0$ e al successivo una differenza $\Delta V^{k+1} = V^{k+1} - W > 0$.

L'altezza $h_{N, t_0+2 \Delta t}$ si assume allora eguale alla media *pesata* delle due altezze $h_{N, t_0+2 \Delta t}^k$ e $h_{N, t_0+2 \Delta t}^{k+1}$, cioè pari alla:

stica comune presentano la corrente effettiva e quella nel filtro indefinito. In conseguenza non risulta più possibile tracciare il profilo col procedimento che si è prima descritto; cioè partendo da valle e determinando l'altezza $h_{N, t}$ per tentativi.

La circostanza che per $t > t_r$ l'ascissa R del profilo risulta sempre eguale a 0 costituisce in effetti una semplificazione nel procedimento di calcolo del profilo stesso; perché oltre a conoscere la posizione, si conosce anche l'altezza liquida di tale sezione, che risulta nel nostro schema costantemente uguale ad H .

Noto allora il profilo all'istante $t_r = t_0 + r \Delta t$, il profilo all'istante $t_r + \Delta t = t_0 + (r + 1) \Delta t$ si può calcolare sempre per punti, partendo dalla sezione $R = 0$ in cui $h_{0, t} = H = \text{cost}$, e procedendo questa volta mediante la (10), da *monte verso valle*, fino all'ascissa finale N (vedi schema 3e).

Con lo stesso procedimento, dal profilo al tempo $t_r + \Delta t$ si risale a quello al tempo successivo $t_r + 2 \Delta t$ e così di seguito fino all'esaurimento del moto vario, in pratica fino a che non si ottiene un profilo prossimo ad una retta orizzontale.

Come è facile capire, per $t > t_r$ la semplificazione del calcolo risulta notevole, non essendo ora necessario calcolare i volumi V e W e seguire il laborioso procedimento per tentativi prima descritto.

5. Il modello analogico

Il modello analogico del filtro è costituito di 4 lastre rettangolari affiancate, le due centrali di vetro, le estreme di plexiglass, delle dimensioni di $0,40 \times 1,00 \text{ m}^2$.

Ciascuna delle intercapedini formate dalle lastre nelle quali scorrono le lamine viscoso ha lo spessore di 2,06 mm; per le osservazioni e le misure viene utilizzata solo quella centrale, mentre quelle laterali hanno lo scopo di bilanciare le pressioni sulle due facce delle lastre di vetro, al fine di rendere invariabile la distanza tra esse.

Nella fig. 4 si riporta una fotografia della installazione sperimentale.

rature tra 14 e 29 °C, in funzione dello spessore d della intercapedine e della temperatura θ :

$$k = d^2 (-1700 + 308,33 \theta);$$

k e d sono espressi in unità tecniche, θ in °C.

Alle memorie precedenti si rinvia pure per la descrizione delle modalità di esecuzione delle esperienze, le quali consistono essenzialmente nel sollevare bruscamente fino alla quota H il livello dell'olio nella vaschetta che alimenta il modello, e nell'eseguire una serie di fotografie, evidentemente, questa volta, a partire dall'istante t_0 che ora ci interessa, della lamina viscosa che avanza tra le lastre.

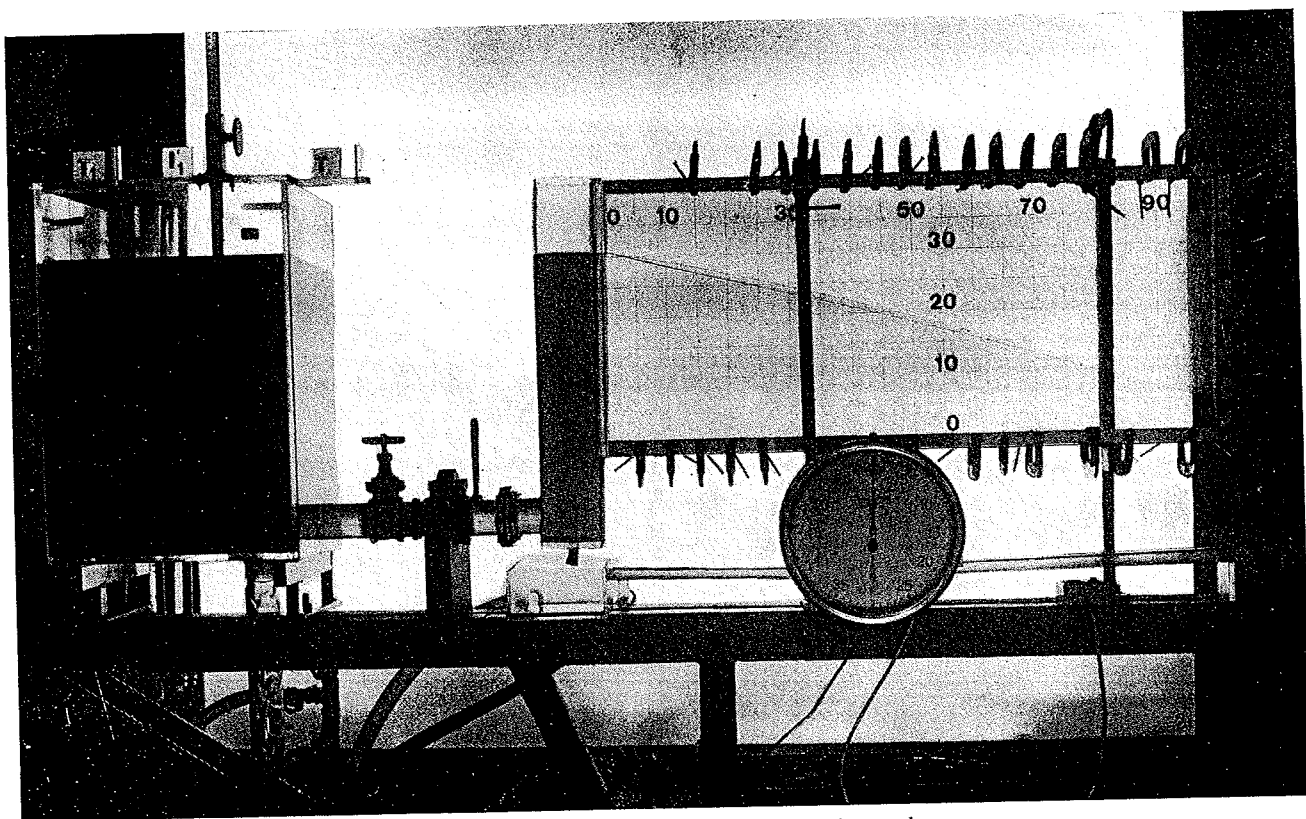


Fig. 4. - Veduta della installazione sperimentale.

Per ciò che riguarda la tecnica costruttiva del modello si rimanda alle memorie [CURTO, 1969; CURTO, 1973; CUSMANO, UMILTÀ, 1974; SANTORO, 1974], nelle quali essa è stata minuziosamente descritta.

Come fluido viscoso è stato impiegato il Terezzo 52 della ESSO già utilizzato precedentemente in Istituto per questo tipo di ricerche. Operando con questo olio, [SANTORO, 1974 a] era stata dedotta la seguente espressione della « permeabilità » k del modello, valevole in un campo di tempe-

Si hanno a disposizione così i profili della linea libera in parecchi istanti del moto vario, che si possono confrontare con quelli dedotti dal modello matematico.

Si sono eseguite tre prove, corrispondenti ai livelli $H = 20 \text{ cm}$, $H = 25 \text{ cm}$, $H = 30 \text{ cm}$. I rispettivi valori della permeabilità k , calcolati con la formula riportata prima, in base alla temperatura dell'olio durante ogni prova, risultano 1,73 cm/sec, 1,67 cm/sec, 2,28 cm/sec.

Da ciascuna fotografia del profilo si sono mi-

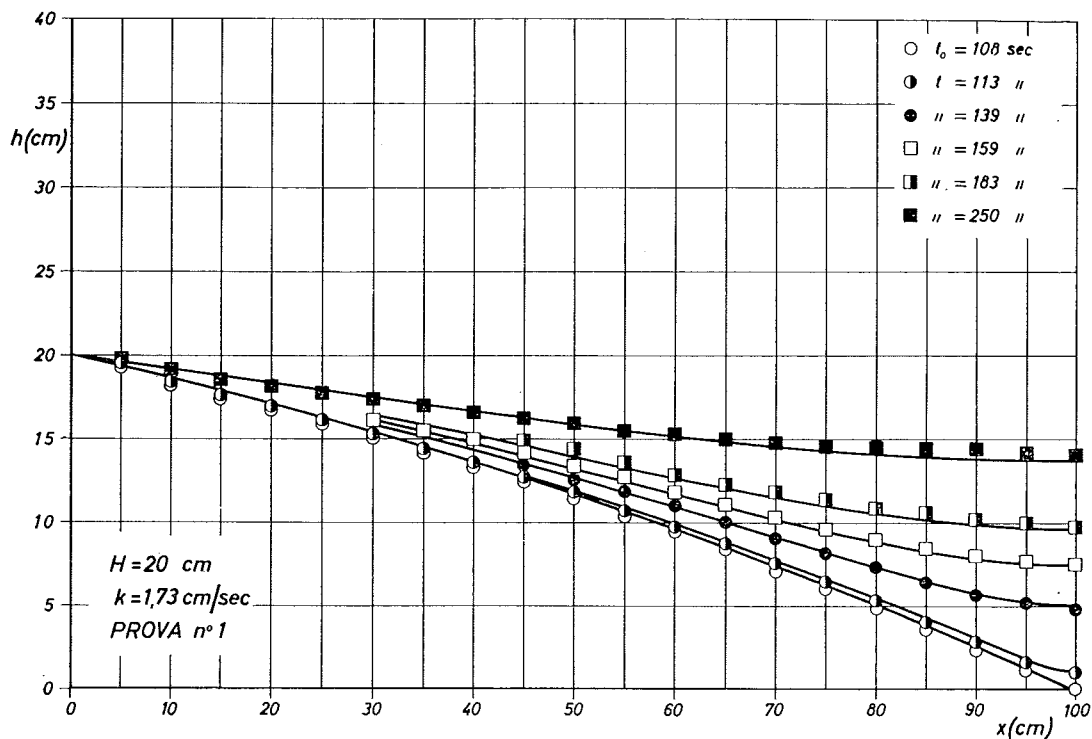


Fig. 5a. - Confronto fra i risultati d l modello matematico e quelli del modello analogico (prova 1).

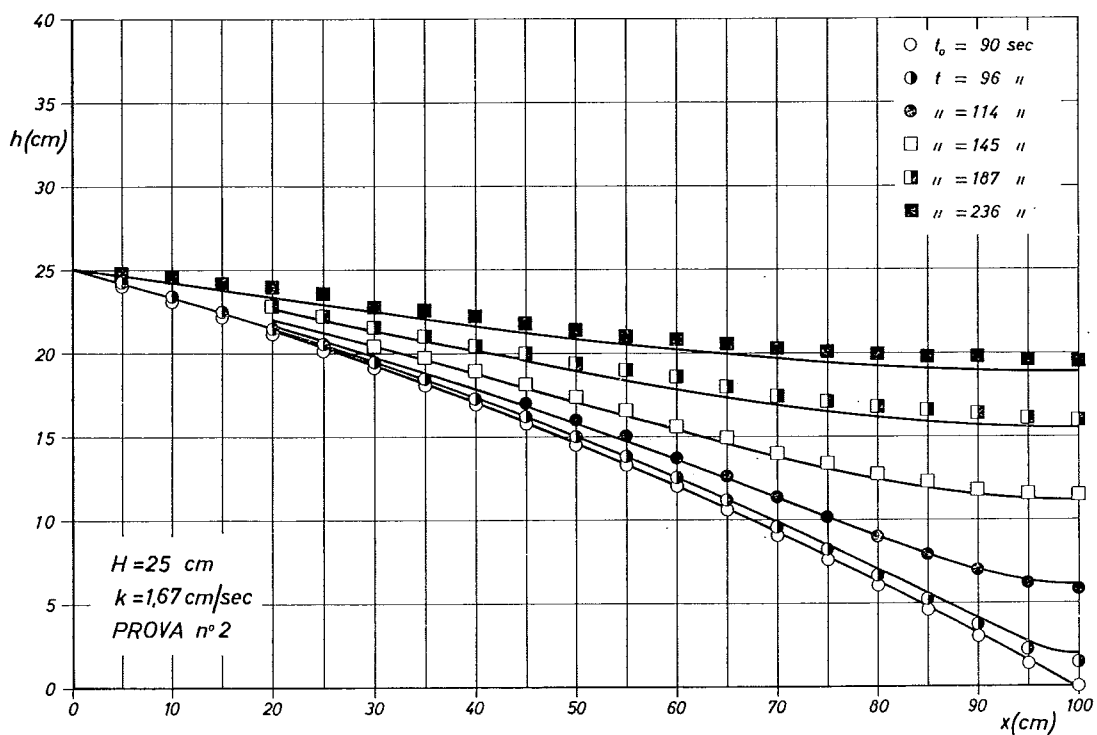


Fig. 5b. - Confronto fra i risultati del modello matematico e quelli del modello analogico (prova 2).

surate, con la tecnica già seguita in precedenza [CURTO, 1969], le altezze d'acqua in sezioni distanti tra loro 5 cm. Si hanno così venti punti sperimentali di ciascun profilo, i quali lo individuano in maniera sufficientemente precisa.

Tutti i punti sperimentali così ottenuti sono stati riportati nel piano cartesiano (x, h) delle tre figure 5a) 5b), 5c), ciascuna delle quali si riferisce ad una delle tre prove prima descritte.

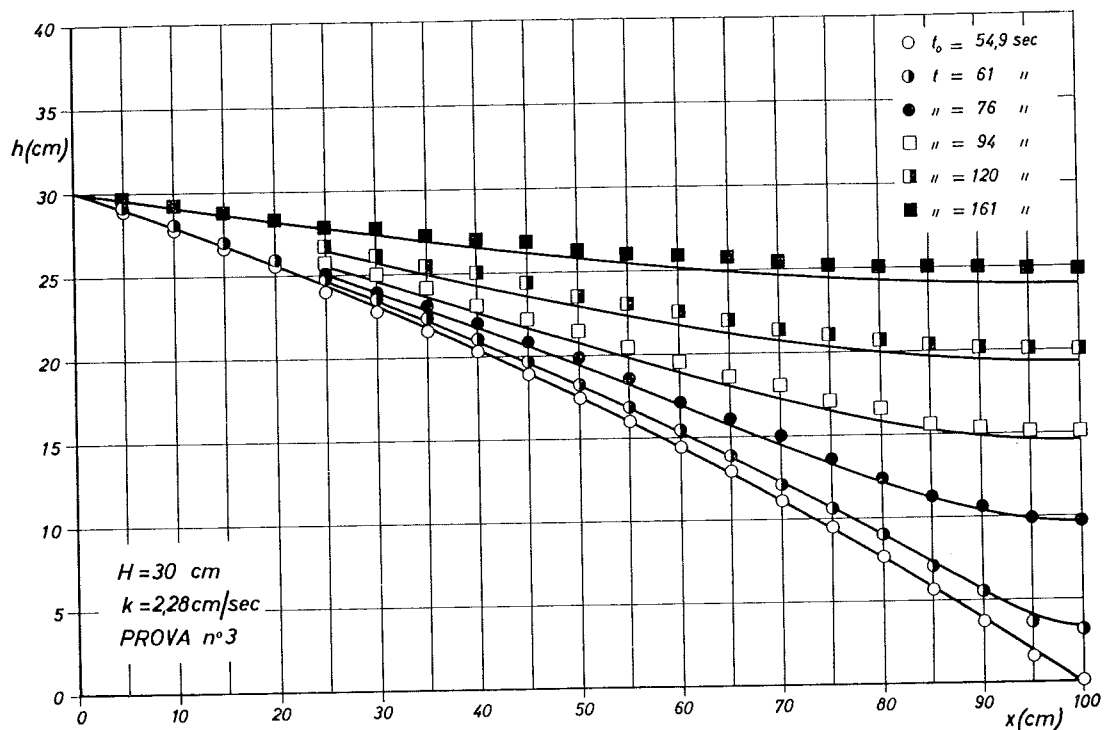


Fig. 5c. - Confronto fra i risultati del modello matematico e quelli del modello analogico (prova 3).

6. Risultati del modello matematico; confronto coi risultati del modello analogico

Per eseguire il calcolo dei profili della linea libera secondo il modello matematico descritto nel paragrafo 4, si è utilizzato un calcolatore elettronico Hewlett Packard modello 30, collegato con un plotter che traccia direttamente su carta millimetrata i profili negli istanti desiderati.

Non si ritiene utile riportare il laborioso programma di calcolo, redatto in linguaggio *basic*, che comunque è disponibile presso gli autori.

Si discutono soltanto i criteri con cui si sono scelti i passi Δx e Δt , che hanno influenza determinante sui risultati del calcolo⁽³⁾.

In tutti e tre i casi si è divisa la lunghezza $L = 100$ cm del filtro in un numero $N = 200$ intervalli, cioè si è scelto $\Delta x = 0,5$ cm.

Il passo Δt risulta allora, secondo la (14), diverso nei tre casi delle figure 5 e precisamente si hanno rispettivamente i tre valori $\Delta t = 1,08$ sec, $\Delta t = 0,89$ sec, $\Delta t = 0,51$ sec, avendo posto ovviamente nel caso in esame nella (14) $n = 1$.

Pur avendo osservato che con questi valori dei

(3) Affinché il procedimento di calcolo presenti i due requisiti essenziali della convergenza e della stabilità, normalmente si consiglia, per le equazioni lineari [REMSON, HORNBERGER, MOLZ, 1971], che il rapporto di convergenza for-

mato con i passi Δx e Δt , cioè il rapporto $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, non superi il valore 0,5.

Δt il rapporto di convergenza risulta notevolmente superiore al valore limite consigliato, e precisamente assume nei tre casi rispettivamente i valori 4,34; 3,56; 2,16 è stata eseguita una prima serie di calcoli.

I risultati ottenuti in queste condizioni mostrano che si verifica un buon accordo tra i profili calcolati e quelli sperimentali nel primo periodo del moto vario e cioè nell'intervallo di tempo compreso presso a poco tra gli istanti t_0 e t_r . Dopo tale periodo si manifestano scostamenti nel senso che i profili calcolati risultano più bassi di quelli sperimentali.

Tali scostamenti si amplificano al trascorrere del tempo fino a diventare notevoli, dell'ordine del 20%, circa, nella sezione terminale del filtro al tempo $t \approx 2 t_r$.

Tenuto conto di questi risultati e considerato altresì che l'algoritmo prescelto impone che sia verificata la relazione (14) tra Δx e Δt solo nell'intervallo di tempo compreso tra t_0 e t_r , nel quale peraltro, i risultati sono soddisfacenti, si sono lasciati inalterati i valori dei passi tra l'istante t_0 e l'istante t_r , e si è cambiato soltanto il passo Δt , dall'istante t_r in poi. Precisamente, si è adottato un Δt , unico in tutti e tre i casi, tale da fare assumere al rapporto r il valore limite superiore prima richiamato. Risultata:

$$\Delta t = r \Delta x^2 = 0,5 \times 0,25 = 0,125 \text{ sec.}$$

Con questo valore di Δt i tempi di calcolo si allungano sensibilmente, ma i risultati migliorano moltissimo.

Le curve ottenute sono riportate nei tre diagrammi delle figg. 5) e mostrano un buon accordo con i punti sperimentali: come in precedenza, questi ultimi tendono a disporsi più in alto delle curve nella zona superiore dei diagrammi, ma gli scostamenti, che non superano mai il 3 ÷ 4 %, possono considerarsi trascurabili.

Non è sembrato quindi necessario migliorare la approssimazione del calcolo, riducendo il valore di r , anche perché ciò avrebbe comportato un ingiustificato allungamento del tempo di calcolo che già è risultato notevole. Infatti il tracciamento di ognuno dei diagrammi delle figg. 5 ha richiesto oltre 15 ore di elaborazione.

7. L'abaco adimensionale per il tracciamento dei profili

In questo paragrafo mostreremo come i risultati precedenti sono stati utilizzati per costruire un abaco adimensionale il quale consente il tracciamento dei profili della linea libera nel moto vario, una volta assegnate le caratteristiche geometriche ed idrauliche del sistema filtrante di fig. 1.

A tal fine riprendiamo l'equazione (1) del profilo nel filtro indefinito, la quale, tenendo conto delle (2) e (3), e facendovi comparire, con semplici trasformazioni, il tempo t_0 espresso dalla (5), si può mettere nella forma:

$$\frac{h}{H} = 1 - \frac{0,408}{\sqrt{0,375}} \frac{x}{L} \sqrt{\frac{t}{t_0}} - 0,125 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 0,375 \frac{t}{t_0}$$

Ponendo:

$$(18) \quad \frac{h}{H} = \alpha; \quad \frac{x}{L} = \beta; \quad \frac{t}{t_0} = \tau$$

si ottiene:

$$(19) \quad \alpha = 1 - 0,666 \beta \tau^{-1/2} - 0,333 \beta^2 \tau^{-1}$$

La (19) rappresenta l'equazione, nelle variabili adimensionali α , β , τ , di tutti i profili nel filtro indefinito, tanto quelli all'istante t_0 ($\tau = 1$), tanto

quelli ad esso precedenti ($\tau < 1$) o seguenti ($\tau > 1$).

Ponendo $\tau = 1$ nella (19) si ricava dunque l'equazione $\alpha(\beta)$ del profilo all'istante t_0 , che è rappresentata dalla curva più bassa tra quelle disegnate in fig. 6, di parametro appunto $\tau = 1$.

I profili effettivi per $t > t_0$, cioè per $\tau > 1$, saranno espressi da una equazione del tipo:

$$F(\alpha, \beta, \tau) = 0$$

Non conosciamo tale equazione, ma siamo in grado, utilizzando il modello matematico prima descritto, di tracciare le curve che la rappresentano nel piano cartesiano (β , α), corrispondenti ad assegnati valori dell'altra variabile τ , assunta come parametro.

Basta infatti eseguire il calcolo dei profili a diversi istanti t , col procedimento descritto, per un assegnato sistema filtrante, cioè per dati H , k , n , L , al quale corrisponde un certo t_0 dato dalla (5); e tracciare, invece che le curve $h(x)$ per vari t , le curve $\alpha(\beta)$ per vari τ .

Le curve in queste variabili adimensionali sono disegnate nella fig. 6, e sono valide per qualsiasi sistema filtrante, cioè per qualunque valore delle quattro grandezze H , k , n , L .

L'abaco di fig. 6 consente evidentemente di tracciare i profili effettivi nei vari istanti del moto vario.

Fissati H , k , n , L , infatti, si calcola t_0 con la (5).

Se si desidera il profilo ad un generico istante $t > t_0$, basterà calcolare il corrispondente valore

$$\tau = \frac{t}{t_0}, \text{ il quale individua una curva nell'abaco}$$

di fig. 6. Le ascisse di queste curve, moltiplicate per L e le sue ordinate, moltiplicate per H , rappresentano rispettivamente le coordinate x e h dei punti del profilo effettivo all'istante t prescelto.

La stessa curva di parametro $\tau = 1$ consente anche il tracciamento dei profili agli istanti t precedenti l'istante t_0 ($\tau < 1$). Basta calcolare l'ascissa x_p , relativa all'istante prescelto, mediante le (4), e poi utilizzare per il tracciamento del profilo la curva più bassa di fig. 6 nel modo precedentemente indicato, con la sola differenza di sostituire alla lunghezza L del filtro la ascissa x_p così valutata.

8. Considerazioni riassuntive e conclusive

Utilizzando un procedimento alle differenze finite per la risoluzione della equazione differen-

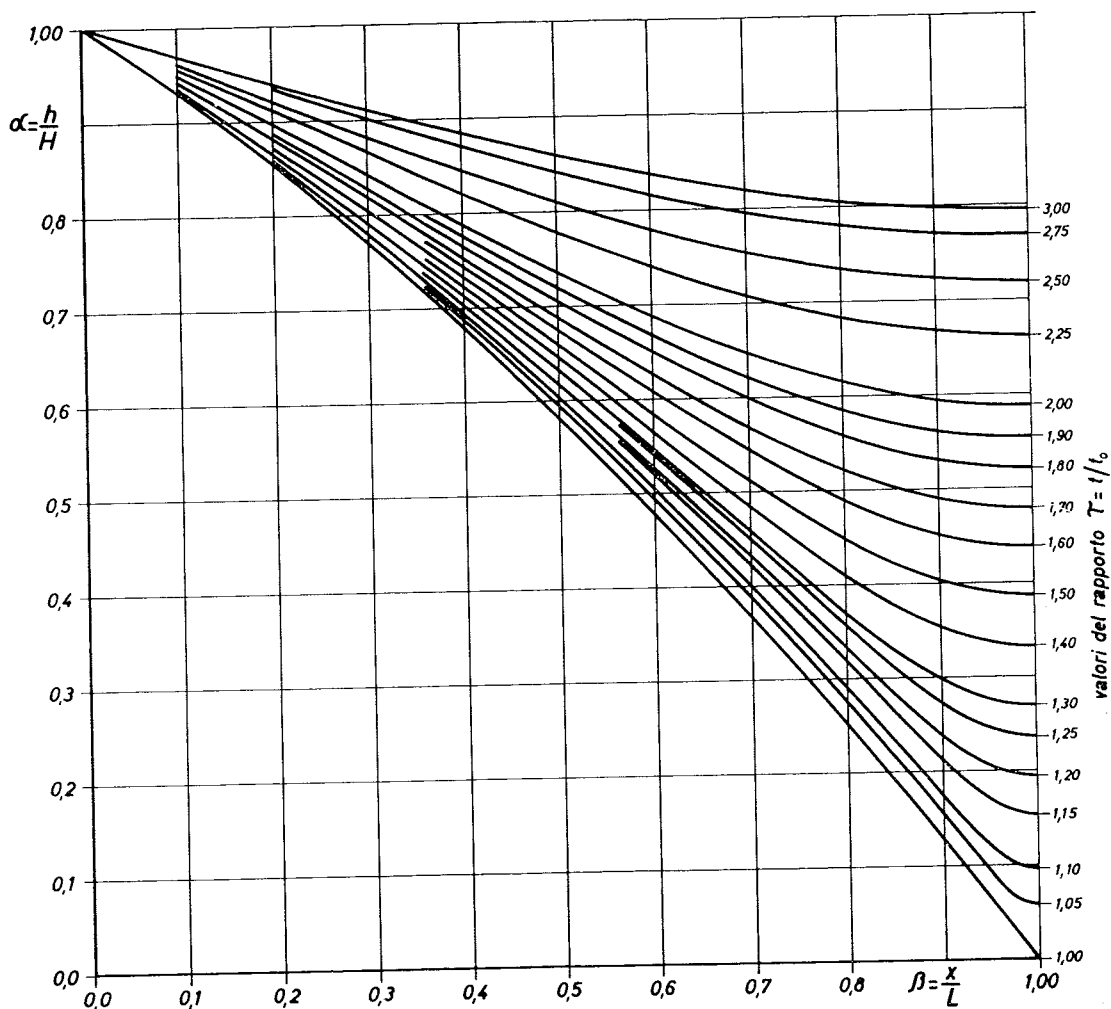


Fig. 6. - Abaco per il tracciamento dei profili liquidi.

ziale di Boussinesq, già applicato in precedenti studi ed ora svolto in modo più generale, è stato costruito un modello matematico del moto piano di filtrazione a superficie libera che si realizza in un filtro di lunghezza finita, alimentato a monte su un fronte verticale permeabile e delimitato da due piani impermeabili, uno orizzontale di base ed uno verticale all'estremo.

Ci si è riferiti alla seconda fase del moto, cioè a quella successiva all'istante t_0 , in cui la estremità della linea libera raggiunge la parete verticale impermeabile, perché la fase precedente che si svolge nel *filtro indefinito* era già stata risolta in precedenti studi.

La equazione della linea libera allo istante t_0 , e le due relazioni esprimenti la invariabilità del carico piezometrico nella sezione iniziale e l'annullamento della cadente piezometrica nella sezione finale sono le condizioni ai limiti del moto in esame, che è dovuto ad un innalzamento istantaneo del livello nel serbatoio a monte. Il modello matematico si può facilmente estendere a situa-

zioni diverse, per ciò che riguarda sia la linea libera nel filtro precedente all'innalzamento del livello a monte, sia la stessa legge di innalzamento.

Con il modello matematico si immagina che il moto possa distinguersi in due periodi.

Un periodo iniziale, in cui la linea libera sia costituita di un primo tratto a monte che coincide con quella nel filtro indefinito che si avrebbe quindi se l'ostacolo impermeabile non esistesse; e un secondo tratto che dipende dall'altezza liquida nella sezione impermeabile di valle. Il primo tratto è *governato da monte*, il secondo è invece *governato da valle*. La sezione che separa i due tratti del profilo si sposta, durante questo primo periodo, da valle verso monte, e può essere interpretata come una perturbazione che risale la corrente propagandosi al di sopra del profilo nel filtro indefinito.

Il secondo periodo è successivo allo istante in cui la perturbazione ha raggiunto la sezione di alimentazione. Per esso manca il primo tratto di profilo coincidente con quello del filtro indefinito

e tutte le sezioni della corrente, compresa quella di alimentazione, risentono degli effetti della parete impermeabile di valle.

I risultati del modello matematico sono poi stati confrontati con quelli di un modello analogico, del tipo Hele-Shaw. È stato confermato che ha importanza sui risultati del calcolo la scelta del rapporto di convergenza formato con i passi adottati, essendo necessario che tale rapporto non superi i limiti massimi consigliati nei testi di calcolo numerico, almeno nel secondo periodo del moto di cui si è parlato prima.

Con i valori dei passi scelti in modo da rispettare questa condizione, i risultati del calcolo sono molto soddisfacenti, nel senso che i profili calcolati scartano solo di qualche per cento dai profili sperimentali. Tali esigue differenze si potrebbero ridurre ancora, ma ciò non è apparso opportuno per non allungare i già notevoli tempi di elaborazione.

Questa ottima rispondenza fra i risultati del calcolo e quelli sperimentali ci consente di concludere con un giudizio positivo sul modello matematico adottato.

Messo a punto il programma di calcolo automatico, si è costruito infine un abaco adimensionale, il quale consente il tracciamento dei profili liquidi nel filtro durante tutto il moto vario, una volta assegnate le caratteristiche geometriche ed idrauliche del sistema.

BIBLIOGRAFIA

- CURTO G. (1968-69) - *Sul moto vario di riempimento e di vuotamento di un filtro omogeneo orizzontale. Schema di alimentazione artificiale di una falda subalvea. Parte I: Il riempimento.* Atti Acc. Sc. Lett. Arti di Palermo, Serie IV, Vol. XXIX, Parte I.
- CURTO G. (1969) - *Ricerca sperimentale sul riempimento di un filtro omogeneo.* L'Acqua, 6.
- CURTO G. (1970-71) - *Un metodo numerico alle differenze finite per l'integrazione dell'equazione differenziale del moto vario di filtrazione.* Atti Acc. Sc. Lett. Arti di Palermo, Serie IV, Vol. XXXI, Parte I.
- CURTO G. (1973) - *Further experiences on unsteady seepage flow.* Meccanica, 1.
- CUSMANO G., UMILTÀ G. (1974) - *La permeabilità significativa del processo di drenaggio del fianco a monte di una diga di terra.* Rivista Italiana di Geotecnica, 1.
- JAPPELLI R. (1973) - *La stabilità delle sponde dei serbatoi con rapide oscillazioni del livello di invaso. Posizione del problema e metodi di ricerca.* Contributo al XI Convegno di Geotecnica, Milano.
- JAPPELLI R., FICARRA A., SAMPERI G. (1973) - *Meccanica del processo di drenaggio in un regime vario di pressioni neutre al contorno inferiore del mezzo.* Congresso di Geotecnica, Milano.
- REMSON I., HORNBERGER G. M., MOLZ F. J. (1971) - *Numerical methods in subsurface hydrology.* Wiley Interscience, New York.
- SANTORO M. (1973a) - *Riempimento di un filtro omogeneo indefinito alimentato su un fronte obliquo.* Rivista Italiana di Geotecnica, 3.
- SANTORO M. (1974b) - *Esperienza sul riempimento di un filtro a fronte obliquo durante l'invaso del serbatoio di alimentazione.* Rivista Italiana di Geotecnica, 4.

SUMMARY

Analogical and mathematical modelling of an unsteady, free surface seepage problem

AA. set up a mathematical model of the unsteady, free surface seepage developing in a filter of finite length and rectangular cross section defined, at the bottom and at the end, by impermeable boundaries.

The motion of the water is plane and the water is supplied through the upstream vertical entrance face from a reservoir whose level rises instantaneously.

A finite differences method, applied in previous works

and now developed in a more general way, has been used for the resolution of the differential Boussinesq equation.

The results obtained through the mathematical model are compared with those obtained in experiences conducted on an Hele-Shaw analogic model.

The comparison shows that the free surfaces of water obtained with the two methods agree well.

The results are finally presented in a non dimensional diagrams allowing the computation of water levels in the filter at various instants of time.