

Sullo stato di sollecitazione e sulla stabilità di travi su un particolare appoggio elastico continuo*

A. CHIARUGI **

SOMMARIO: Schematizzato il terreno secondo il modello proposto da Repnikov, si affronta, nel caso di una trave di lunghezza illimitata, lo studio dello stato di sollecitazione per un carico verticale e del carico critico nel caso di sforzo normale costante. In particolare, avendo per finalità di saggiare l'influenza che il sistema irrigidente alla Winkler ha sul comportamento d'insieme, si riportano diagrammi che mettono in evidenza il modificarsi sia del diagramma del momento flettente sia del carico critico al variare del parametro che lega il funzionamento in parallelo dei due sistemi reattivi presenti nel modello di Repnikov.

1. Premessa

La determinazione dello stato di sollecitazione, per carichi normali all'asse, e del carico critico, per carichi secondo l'asse, per travi su un appoggio elastico continuo risulta di particolare interesse ad esempio nei problemi di pavimentazioni continue stradali, di piste di aeroporto e di linee ferroviarie.

L'aspetto più sfuggente di tali problemi riguarda, come è noto, la schematizzazione che si fa del comportamento del terreno e, in particolare, il modello che si adotta in relazione al modo di deformarsi della superficie che lo limita superiormente.

Indicazioni sperimentali hanno mostrato, per certe esigenze, l'inadeguatezza delle schematizzazioni più largamente usate e in particolare la necessità di ricorrere a modelli che tengano conto, pur nell'ambito di un funzionamento elastico, dell'eterogeneità del suolo.

In considerazione di ciò, è stato proposto da Repnikov [REPNIKOV, 1967] un modello, ripreso anche da altri Autori [SCHULTZE, 1967, 1970], che assimila il suolo ad un mezzo nel quale si manifestano, in parallelo, due modi di comportarsi, come si trattasse di un semispazio elastico ed omogeneo, irrigidito da molle non connesse al mezzo elastico continuo che le comprende (fig. 1), avente cioè un funzionamento intermedio a quello di un semispazio alla Boussinesq, caratterizzato dai parametri E, ν , ed un sottofondo alla Winkler, caratterizzato dal coefficiente k (1).

In tal modo si terrebbe conto, seppur in maniera approssimata, come è stato messo in eviden-

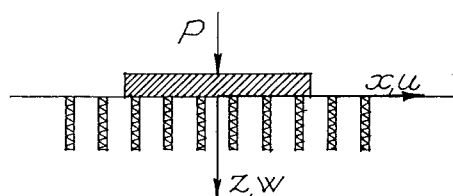


Figura 1.

za da alcuni Autori [BARLA, BELLONI, JAMIOLKOWSKI, PASQUALINI, 1974], della eterogeneità del suolo, simulandone il comportamento nel caso in cui sia caratterizzato da un modulo variabile con la profondità [$E(z) = E_0 + E_1 z$ e $\nu(z) = \nu_0$] e ciò sulla scorta di alcuni interessanti risultati, corrispondenti a quelli che scaturiscono dalla teoria di Winkler, ottenuti da GIBSON [1967], nello studio del comportamento di una fondazione rettangolare perfettamente flessibile poggiante su un semispazio non omogeneo caratterizzato da $\nu = \text{cost}$ e $E(z) = E_1 z$.

Appare tuttavia più calzante in ordine agli smorzamenti, anche alla luce dei risultati ottenuti da PLEVAKO [1972], nella trattazione del problema di Boussinesq generalizzato, modificare la posizione iniziale di Repnikov, per quanto concerne il comportamento dei due sistemi in parallelo, imponendo la loro connessione in superficie, in modo da garantire una congruenza di deformazioni non solo sotto l'area d'impronta della fondazione, per effetto di questa, bensì anche esternamente.

Nel presente lavoro, in base alle ricordate indicazioni sul modello di funzionamento del suolo apparse nella letteratura tecnica, si determina, per travi indefinite a sezione costante poggiantesi sul-

* Lavoro svolto con il contributo del C.N.R.

** Dr. Ing. Andrea CHIARUGI, Istituto di *Tecnica delle Costruzioni*, Università di Bologna.

(1) Pur non apparendo, da un punto di vista fisico, chiara la deduzione di un tale modello, è certo che può apparire

interessante saggiare qualitativamente il modificarsi dei comportamenti strutturali in funzione dei parametri che fanno variare il funzionamento del modello proposto fra i due casi limite del modello di Boussinesq e di Winkler.

la superficie del suolo, sia lo stato di sollecitazione per effetto di carichi normali all'asse sia il carico critico, quando la trave risulta sottoposta a uno sforzo normale costante.

2. Analisi del comportamento del suolo alla Replikov

Il suolo alla Replikov viene quindi definito mediante tre parametri, cioè E , ν , k , i primi due relativi al semispazio elastico, il terzo relativo al sistema di molle irrigidenti; inoltre, nel funzionamento in parallelo, i due meccanismi che lo costituiscono possono considerarsi o meno connessi in superficie.

a) Pensiamo in primo luogo, secondo quanto proposto inizialmente, che i due mezzi siano privi totalmente di connessione.

Analizziamo quindi il comportamento di un semispazio elastico omogeneo ed isotropo sottoposto in superficie ad una distribuzione di pressioni verticali del tipo

$$p(x, y) = p_0 \cos \lambda x \cos \omega y. \quad (1)$$

Le componenti dello spostamento, nelle direzioni x , y e z , rispettivamente u , v , w , di un punto del semispazio devono soddisfare, come è noto, le seguenti equazioni, essendo nulle ovviamente le forze di massa:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\delta e}{\delta x} &= 0 \\ \Delta^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\delta e}{\delta y} &= 0 \\ \Delta^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\delta e}{\delta z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

dove

$$e = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}.$$

Nel caso di un carico come indicato in (1), nell'ipotesi di tensione tangenziale nulla in superficie e utilizzando la condizione dell'annullarsi degli effetti per $z \rightarrow \infty$, la soluzione delle equazioni (2) può essere data in serie doppia e in particolare lo spostamento w , per $z = 0$, può essere espresso nella seguente forma

$$w(x, y) = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} p_0 \cos \lambda x \cos \omega y. \quad (3)$$

Qualora la pressione agente sul semispazio fosse del tipo

$$p(x, y) = p_0(y) \cos \lambda x,$$

con

$$\begin{aligned} p_0(y) &= p_0 \quad \text{per } -b < y < b, \\ p_0(y) &= 0 \quad \text{per } y < -b, \quad b < y, \end{aligned} \quad (4)$$

cioè uniforme secondo y per una larghezza pari a $2b$ e variabile sinusoidalmente secondo x (fig. 2), si può ricercare l'espressione della $w(x, y)$ mediante l'integrale di Fourier.

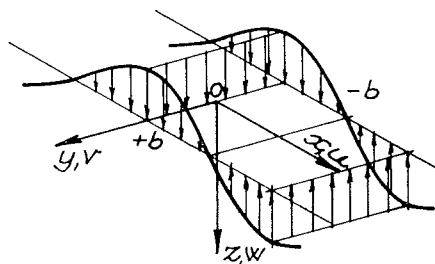


Figura 2.

Espresso $p(x, y)$ nella forma seguente [BIOT, 1937; OBERHETTINGER, 1957]

$$p(x, y) = \left\{ \frac{p_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} [\sin \omega (y + b) - \sin \omega (y - b)] d\omega \right\} \cos \lambda z, \quad (5)$$

ricordando la (3), l'espressione w può essere data nella forma seguente

$$w(x, y) = \left\{ \frac{2 p_0}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega (y + b)}{\omega \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega (y - b)}{\omega \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} d\omega \right] \right\} \cos \lambda x, \quad (6)$$

od anche, ragionando sul carico per unità di lunghezza

$$q_0 = p_0 \cdot 2b$$

e posto

$$\lambda b = \beta$$

e

$$\omega b = \alpha,$$

si ha

$$w(x, y) = \left\{ \frac{q_0}{\pi} \frac{1-v^2}{E} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \left(\frac{y}{b} + 1 \right)}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} d\alpha - \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \left(\frac{y}{b} - 1 \right)}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} d\alpha \right] \right\} \cos \lambda x \quad (7)$$

In particolare facendo riferimento, sotto la striscia caricata larga $2b$, al valore medio secondo y dello spostamento e cioè

$$w_m = \int_{-b}^{+b} \frac{w}{2b} dy,$$

avremo

$$w_m(x) = \left[q_0 \frac{1-v^2}{E} \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi \alpha^2} \frac{(1-\cos 2\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} d\alpha \right]$$

$$\cos \lambda x = q_0 \frac{1-v^2}{E} G(\beta) \cos \lambda x \quad (8)$$

Nel caso che un carico, definito come in precedenza (4), agisca su un suolo alla Reznikov, avremo che una aliquota della pressione $p_{0,1}(y)$ viene assorbita dal semispazio elastico e un'aliquota $p_{0,2}(y)$ dal sottofondo alla Winkler.

Ipotizziamo, in prima approssimazione, che tali distribuzioni di carico, dovute ad una pressione uniforme secondo y , siano anch'esse uniformi nel tratto largo $2b$.

Avremo pertanto, facendo riferimento al carico risultante per unità di lunghezza, che le ampiezze delle funzioni sinusoidali secondo x , che esprimono gli spostamenti medi per effetto di $q_{0,1}$ e $q_{0,2}$, valgono:

nel semispazio alla Boussinesq (8)

$$w_{m,1} = q_{0,1} \frac{1-v^2}{E} G(\beta),$$

nel sottofondo alla Winkler

$$w_{m,2} = \frac{q_{0,2}}{2b \cdot k}.$$

Per congruenza, imposta sul valore medio relativo alla larghezza, dovrà essere $w_{m,1} = w_{m,2} = w_m$ e inoltre per equilibrio $q_0 = q_{0,1} + q_{0,2}$ da cui

$$q_0 = w_m \left[\frac{E}{1-v^2} \frac{1}{G(\beta)} + 2bk \right] \quad (9)$$

e quindi, posto

$$\delta = \frac{2bk(1-v^2)}{E},$$

$$\begin{aligned} w_m(x) &= q_0 \frac{1-v^2}{E} \left[\frac{1}{\delta + \frac{1}{G(\beta)}} \right] \cos \lambda x = \\ &= q_0 \frac{1-v^2}{E} F_1(\beta, \delta) \cos \lambda x, \end{aligned} \quad (10)$$

dove

$$F_1(\beta, \delta) = \frac{1}{\delta + \frac{1}{G(\beta)}} \quad (11)$$

b) Nel caso in cui le due componenti del suolo alla Reznikov siano connesse in superficie, indipendentemente dalla presenza di una fondazione, si può ragionare nel modo seguente.

Sia applicata sulla superficie limite superiore una distribuzione di pressioni

$$p(x, y) = p_0 \cos \lambda x \cos \omega y \quad (1)$$

Tale carico darà luogo ad una deformazione chiamando in causa i due modi di reagire del suolo; in particolare un'aliquota del carico sarà assorbita dal semispazio elastico e la restante parte dal sottofondo alla Winkler.

Tale ripartizione si può ottenere mediante la condizione diffusa di congruenza che porta ad imporre l'uguaglianza degli spostamenti verticali nei due meccanismi reattivi.

In particolare indicato con $p_1(x, y) = p_{0,1} \cos \lambda x \cos \omega y$ il carico assorbito dal semispazio elastico, si ha per quanto visto in precedenza (3), la seguente relazione fra le ampiezze dello spostamento e del carico

$$p_{0,1} = \frac{1}{2} \frac{E}{1-v^2} \sqrt{\lambda^2 + \omega^2} w_{0,1} \quad (12)$$

Analogamente essendo $p_{0,2}$ l'ampiezza del carico che agisce sul sottofondo alla Winkler si ha

$$p_{0,2} = k w_{0,2} \quad (13)$$

Imposta la congruenza, dalla condizione di equilibrio si ha

$$w(x, y) = \left[p_0 \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2} + \frac{2kb(1-\nu^2)}{E}} \right] \cos \lambda x \cos \omega y . \quad (14)$$

Se di nuovo esaminiamo il caso di un carico agente lungo una striscia, come definito in (4), si può ricorrere alla rappresentazione come somma di funzioni sinusoidali (5).

In tal caso la relazione fra lo spostamento e

la pressione, espressa come carico risultante per unità di lunghezza

$$q_0 = p_0 \cdot 2b ,$$

posto ancora

$$\lambda b = \beta \quad e \quad \omega b = \alpha ,$$

diviene

$$w(x, y) = \left\{ \frac{q_0}{\pi} \frac{1-\nu^2}{E} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \left(\frac{y}{b} + 1 \right)}{\alpha \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2kb(1-\nu^2)}{E} \right)} d\alpha - \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \left(\frac{y}{b} - 1 \right)}{\alpha \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2kb(1-\nu^2)}{E} \right)} d\alpha \right] \right\} \cos \lambda x . \quad (15)$$

Facendo riferimento allo spostamento medio sotto la striscia di carico, posto ancora

$$\delta = \frac{2kb(1-\nu^2)}{E}$$

si ha

$$w_m(x) = q_0 \left[\frac{1-\nu^2}{E} \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi \alpha^2} \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \delta} d\alpha \right] \cos \lambda x = q_0 \frac{1-\nu^2}{E} F_2(\beta, \delta) \cos \lambda x , \quad (16)$$

dove

$$F_2(\beta, \delta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi \alpha^2} \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \delta} d\alpha . \quad (17)$$

3. La trave indefinita inflessa

Data una trave indefinita di caratteristiche E_t , J_t costanti, avente una superficie di intradosso larga $2b$, posta su un suolo alla Reznikov di caratteristiche E , ν , k , si valuta lo stato di deformazione e di sollecitazione prodotto da un carico

$$q_1(x) = q_1 \cos \lambda x .$$

L'equazione della linea elastica è data da

$$E_t J_t \frac{d^4 w}{dx^4} = q_1 - r(x) \quad (18)$$

dove $r(x)$ è la reazione del suolo.

Ipotizziamo che le pressioni conseguenti ad r siano distribuite trasversalmente in maniera uniforme sotto la base di appoggio della trave.

Se esprimiamo anche la reazione r nella forma $r(x) = r_0 \cos \lambda x$, ricordando le relazioni (10) e (16) che intercorrono fra il carico e l'abbassamento medio del terreno sotto la striscia caricata, avremo, rispettando la condizione di congruenza sugli spostamenti w fra trave e suolo,

$$w(x) = \frac{q_1}{E \lambda^4 + \frac{1}{1 - \nu^2} F_i(\beta, \delta)} \cos \lambda x, \quad (19)$$

con $i = 1, 2$ (12) (17), secondo che si ipotizzi rispettivamente un suolo alla Replikov senza o con connessione in superficie fra i due meccanismi.

In particolare avremo, essendo

$$E_t J_t \frac{d^2 w}{dx^2} = -M,$$

$$M(x) = \frac{q_1 \lambda^2}{\lambda^4 + \frac{1}{(1 - \nu^2) E_t J_t} F_i(\beta, \delta)} \cos \lambda x. \quad (20)$$

Nel caso che il carico sia costituito da una forza concentrata P normale all'asse della trave, ricorrendo all'integrale di Fourier, avremo

$$M(x) = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 \cos \lambda x}{\lambda^4 + \frac{1}{(1 - \nu^2) E_t J_t} F_i(\alpha, \delta)} d\lambda \quad (21)$$

Posto

$$d_0 = \sqrt[4]{\frac{E_t J_t}{E} (1 - \nu^2)}$$

e inoltre $\gamma = d_0 \lambda$ si ha

$$M(x) = \frac{P d_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma^2 \cos \gamma \frac{x}{d_0}}{\gamma^4 + \frac{1}{F_i\left(\frac{b}{d_0}, \delta\right)}} d\gamma \quad (22)$$

I diagrammi del momento flettente a meno di $\frac{P d_0}{\pi}$ in funzione di $\frac{x}{d_0}$ per vari valori di $\frac{b}{d_0}$ e di δ per $i = 1, 2$, sono riportati nelle figure 3, 4 e 5, mentre nella figura 6 è riportato l'andamento di M_{\max} (per $x = 0$) al variare di δ . Il valore di M_{\max} per $\delta = 0$ è quello che compete alla trave su suolo alla Boussinesq.

4. Il carico critico per la trave indefinita

Consideriamo ancora una trave indefinita a se-

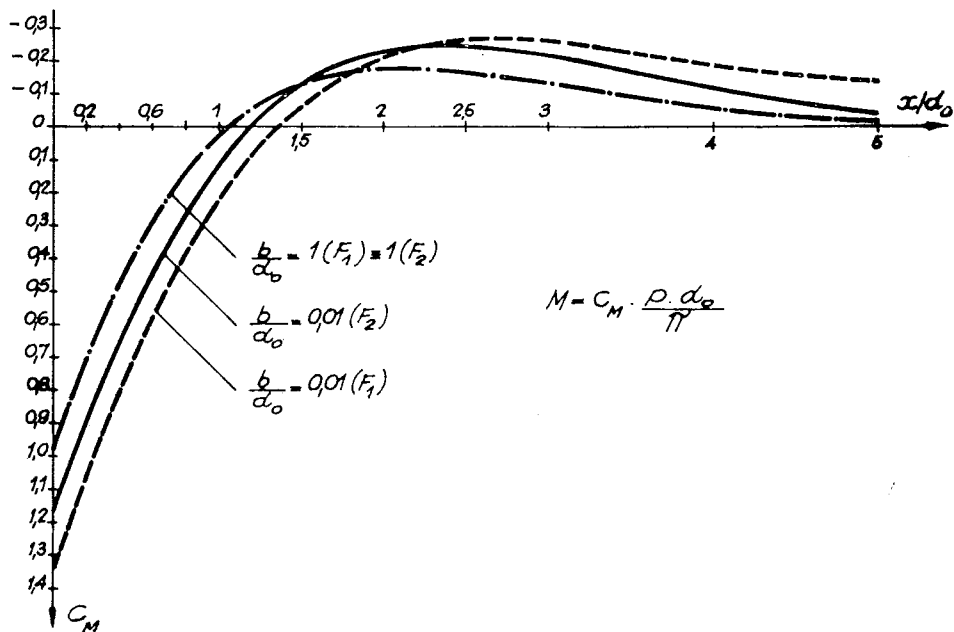


Fig. 3. - Diagramma del momento flettente in funzione di x/d_0 per $\delta = 0,2$.

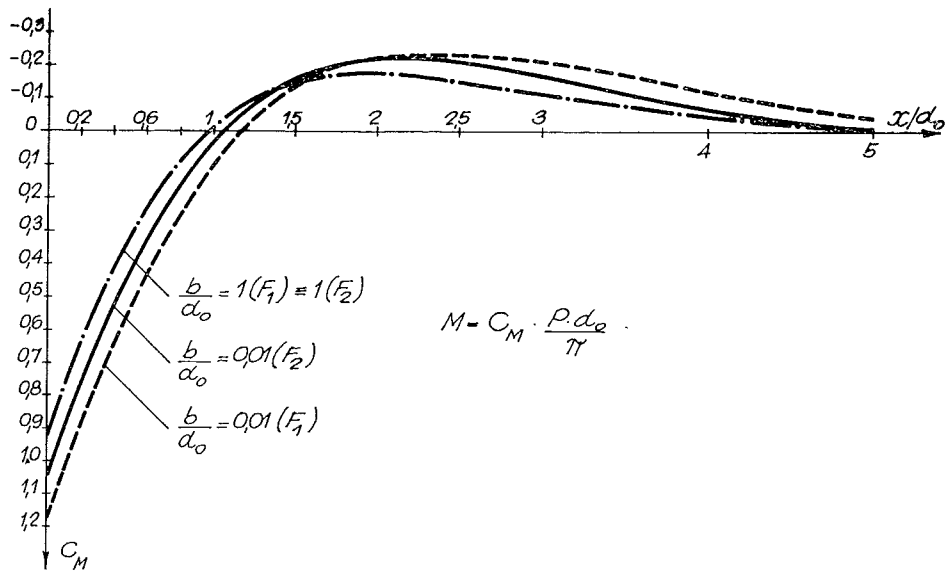


Fig. 4. - Diagramma del momento flettente in funzione di x/d_0 per $\delta = 0,5$.

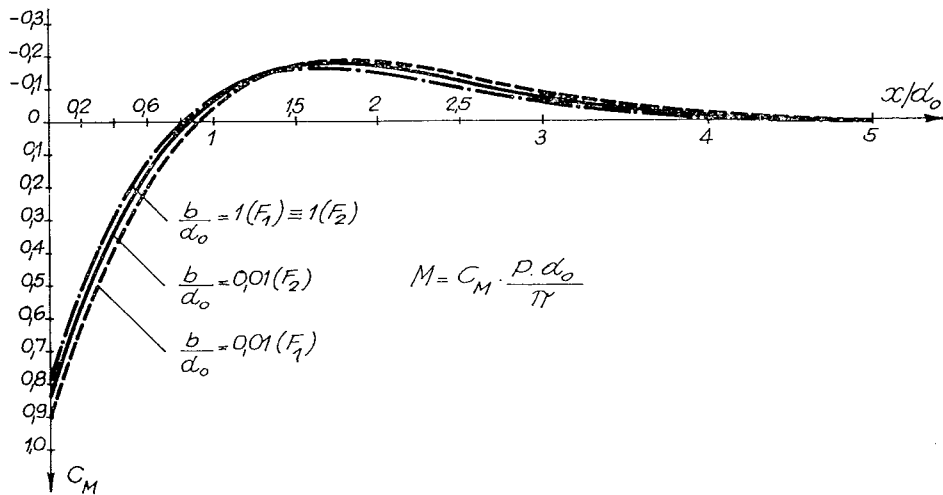


Fig. 5. - Diagramma del momento flettente in funzione di x/d_0 per $\delta = 2$.

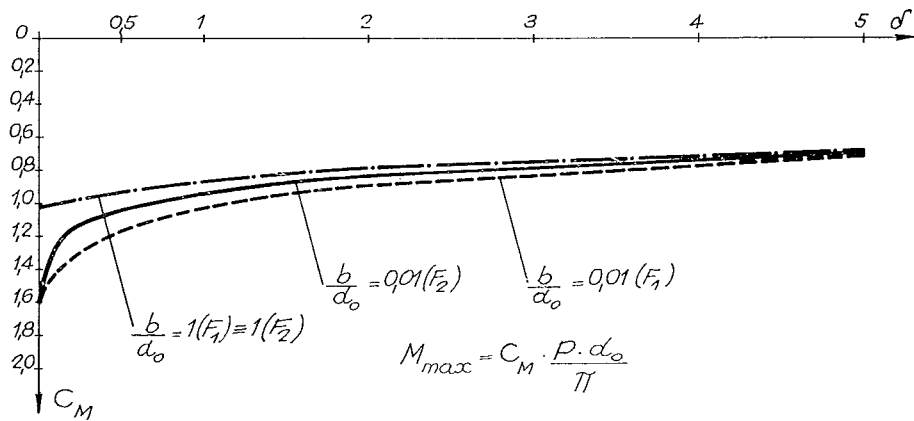


Fig. 6. - Diagramma dei momenti massimi in funzione di δ e b/d_0 .

zione costante su un suolo alla Repnikov sottoposto ad uno sforzo normale N.

Se w è lo spostamento verticale di una sezione generica della trave, possiamo scrivere

$$E_t J_t \frac{d^2 w}{dx^2} = -N w + M_0, \quad (23)$$

dove M_0 è il momento flettente dovuto all'azione mutua $r(x)$ fra trave e terreno.

Derivando due volte si ottiene la nota relazione differenziale

$$\sum_n \left[E_t J_t \lambda_n^4 - N \lambda_n^2 + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{1}{F_1(\lambda_n b, \delta)} \right] \bar{w}_n \cos \lambda_n x = 0. \quad (25)$$

Risolvendo l'equazione caratteristica

$$E_t J_t \lambda_n^4 - N \lambda_n^2 + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{1}{F_1(\lambda_n b, \delta)} = 0 \quad (26)$$

per ogni valore di λ_n si ha un valore di N.

Il valore del carico critico N_{crit} lo otterremo quindi quale minimo della funzione $N(\lambda_n)$ e precisamente dal minimo della seguente funzione, ottenibile dalla (26) posto $\beta = \lambda_n b$

$$\frac{N b^3}{E_t J_t} = \beta^2 + \frac{E b^4}{(1-\nu^2) E_t J_t} \frac{1}{\beta^2 F_1(\beta, \delta)} \quad (27)$$

Valutati i minimi

$$\frac{N_{crit} b^3}{E_t J_t}$$

dell'espressione (27) in funzione di β per diversi valori di

$$\gamma = \frac{E b^4}{(1-\nu^2) E_t J_t}$$

e di δ per le due espressioni di $F_1(\beta, \delta)$ si possono tracciare i diagrammi riportati nella figura 7 dove si ha la variazione di

$$\frac{N_{crit} b^3}{E_t J_t}$$

al variare di δ per casi aventi $\gamma = \text{cost}$ e per le due espressioni delle F_1 .

$$E_t J_t \frac{d^4 w}{dx^4} + N \frac{d^2 w}{dx^2} = -r. \quad (24)$$

Ipotizzando ancora che la pressione mutua fra suolo della trave e terreno, di risultante r , sia distribuita uniformemente nella larghezza.

Se imponiamo la condizione di congruenza fra lo spostamento verticale della trave e lo spostamento medio del terreno, nel tratto largo $2b$, assunta un'espressione della funzione w incognita del tipo $w(x) = \sum \bar{w}_n \cos \lambda_n x$, ricordando le (11) e (17) possiamo integrare la (24); si ha infatti

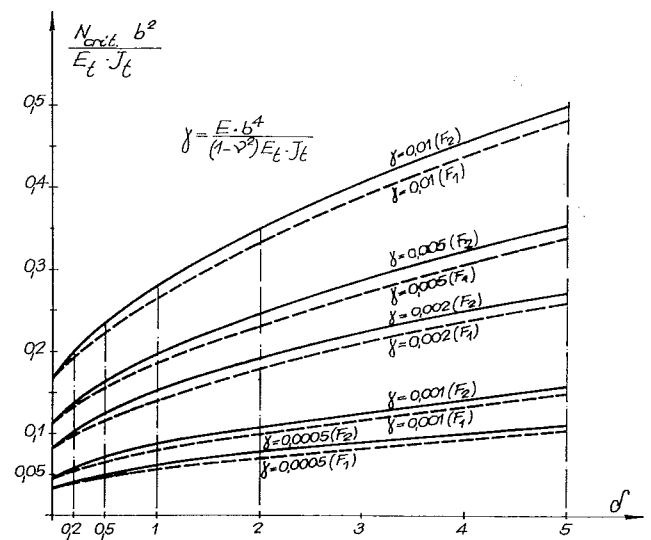


Figura 7.

In particolare si ha che il valore di

$$\frac{N_{crit} b^3}{E_t J_t}$$

per $\delta = 0$ (ossia $k = 0$) [MURTHY, 1973 a, b] coincide con quello relativo al caso della trave indefinita su suolo alla Boussinesq.

5. Osservazioni

Dall'esame dei diagrammi riportati appare in primo luogo che la connessione dei due sistemi reattivi del modello di Repnikov, esternamente all'area d'impronta della fondazione, presenta in genere scarsa rilevanza quantitativa.

Per quanto concerne lo stato di sollecitazione della trave inflessa, si nota che, per valori anche

elevati del parametro δ e quindi per valori elevati di k , a parità di E e ν , si hanno riduzioni del momento flettente massimo nell'insieme non rilevanti; tanto più che, come appare ragionevole, da queste schematizzazioni si cerca di cogliere gli aspetti qualitativi con un riferimento agli ordini di grandezza. Più sensibile appare invece l'accentuarsi dello smorzamento, circostanza questa che sembra in accordo con gli effettivi comportamenti strutturali.

Inoltre per quanto riguarda la stabilità dell'equilibrio della trave, risulta che all'incrementarsi di δ consegue un marcato incremento del carico critico.

BIBLIOGRAFIA

BARLA C., BELLONI L., JAMIOLKOWSKI M., PASQUALINI E. (1974) - *Comportamento delle piastre circolari poggianti su suolo alla Repnikov*. Rivista Italiana di Geotecnica, n. 1.

BIOT M. A. (1937) - *Bending of an infinite beam on an elastic foundation*. Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, vol. 59.

GIBSON R. E. (1967) - *Some results concerning displacements and stresses in a nonhomogeneous elastic half-space*. Geotechnique, vol. XVII, n. 4.

MURTHY G. K. N. (1973 a) - *Buckling of beams supported by Pasternak foundation*. Journ. ASCE, E. M. Div., June.

MURTHY G. K. N. (1973 b) - *Buckling of continuously supported beams*. Trans. ASME, June.

OBERHETTINGER F. (1957) - *Tabellen zur Fourier Transformation*. Springer Verlag, Berlin.

PLEVAKO V. P. (1972) - *On the possibility of using harmonic functions for solving problems of the theory of elasticity of nonhomogeneous media*. P.M.M., vol. 36, n. 5.

REPNIKOV L. N. (1967) - *Calculation of beams on an elastic base combining the deformative properties of a Winkler base and an elastic mass*. Osnovaniya, Fundamenti i Mekanika Gruntov, n. 6.

SCHULTZE E. (1967) - *Bettungszahl oder Steifenzahl*. Festegrupt Hisheld, Konstruktiver Ingenierbau, Düsseldorf.

SCHULTZE E. (1970) - *Die Kombination von Bettungszahl- und Steifenzahlverfahren*. Mitteilungen V.C.B., Technische Hochschule, Aache, Heft n. 48.

SUMMARY

On the stress and the stability of beams supported by a particularly elastic foundation.

It is well-known that, in order to obtain more acceptable analysis concerning the behaviour of foundations, Repnikov proposed a model of the soil made up of an elastic semi-space with features E , ν , and stiffened by a system of springs with features k , not connected to it. According to some Authors, such a model offers some aspects that can be placed in relationship with the heterogeneous character of the soil.

Therefore, in the present paper, the Author has studied an indefinite beam, both when subjected to a vertical load normal at the axis, and when under the effect of normal steady stress; said beam was placed on a soil which was schematized following Repnikov's original model and also by generalizing the same by means of the hypothesis of a surface connection of the two mechanisms.

After defining the link between pressures and the strained state of elastic soil for both models, by means of Fourier's analysis, the Author found the expressions of

the stress state for the deflected beam, and especially of the bending moment as related to the parameter

$$\delta = \frac{2 k b (1 - \nu^2)}{E}$$

which is precisely what links the two resistant mechanisms.

On examining the diagrams of the moments we can notice how well the results for the two soil models coincide; moreover, we can observe that the influence of the parameter δ is contained both in the course and the value of M_{max} .

For the evaluation of the critical load, the Author continued to proceed using Fourier's series developments, and found the expression of

$$\frac{N_{crit}, b^2}{E_t J_t}$$

as related to δ noting that in this case there is a more marked influence of the stiffening effect produced by the Winkler's reactive system.