

# RICERCA ANALITICA DELLA SPINTA PASSIVA IN AMMASSI TERROSI INCOERENTI

T. ESPOSITO (\*)

*Sommario* - Si sviluppa per via analitica un noto procedimento grafico per la determinazione della spinta passiva, nel caso di terre incoerenti e superficie del terreno orizzontale. Si fa l'ipotesi che la superficie di scorrimento sia cilindrica con direttrice costituita da un arco di spirale logaritmica raccordata con un segmento di retta.

I risultati raggiunti permettono utili osservazioni circa la posizione del polo della spirale, ed i limiti di pratica applicabilità del metodo grafico.

Per comodità di applicazione viene fornita una tabella che permette la immediata determinazione della spinta nella maggior parte dei casi.

## 1 - Premessa

E' nota l'importanza che ha, nei problemi di spinta delle terre, l'attrito che si esercita tra le particelle terrose adiacenti ad una data parete, e la parete stessa, quando questa subisce uno spostamento. Tale resistenza produce infatti un incurvamento delle superfici di scorrimento che è tanto più pronunciato quanto maggiore è l'angolo di attrito terra-muro  $\delta$ .

Sulla scorta di tale osservazione si è tentato, da parte di un gran numero di Autori, di determinare la vera forma delle linee di scorrimento e, di conseguenza, l'effettivo valore delle spinte.

Non è qui il caso di richiamare le conclusioni cui sono pervenuti (alcuni seguendo vie puramente teoriche e spesso molto complesse dal punto di vista matematico, altri attraverso determinazioni sperimentali), i molti studiosi che si sono occupati dell'argomento, poiché gli studi sono ampiamente illustrati dalla letteratura tecnica.

Alla luce dei risultati acquisiti si può però affermare che la determinazione delle due spinte, attiva o passiva, se da un punto di vista analitico può inquadrarsi in un problema unico (trattandosi solo di assumere, nelle formule che determinano la spinta, positivi o negativi i parametri che caratterizzano la resistenza a taglio di una terra), dal punto di vista applicativo la soluzione del problema può perseguirsi diversamente nei due casi.

E' noto infatti che, nel caso di spinta attiva, le linee di scorrimento hanno curvatura molto piccola discostandosi di poco dall'andamento rettilineo. A parte quindi i rari casi in cui può ritenersi valida la teoria del RANKINE (che però fornisce, quando appli-

cabile, una soluzione esatta del problema) la teoria che ancor oggi si preferisce, per il calcolo della spinta attiva, è quella del COULOMB. Essa infatti, nonostante sia una soluzione congruente, ma non equilibrata <sup>(1)</sup>, fornisce valori delle spinte che differiscono di poco da quelli calcolati con metodi più rigorosi o determinati sperimentalmente, e ciò appunto per la lieve divergenza tra la reale superficie di scorrimento e quella piana ipotizzata dal COULOMB.

Il fatto che le approssimazioni dette sono in eccesso e, principalmente, la semplicità e rapidità di applicazione, giustificano il favore di cui continua a godere questa teoria.

Nel caso di spinta passiva invece, la curvatura delle superfici di scorrimento è più accentuata e, come si è detto, cresce al crescere di  $\delta$ . <sup>(2)</sup>

La teoria di COULOMB si dimostra pertanto inadatta ed occorre calcolare tale spinta con ipotesi che tengano maggior conto del reale andamento del fenomeno fisico. Fra tutti, relativamente semplici, appaiono i metodi grafici suggeriti dal TERZAGHI, anche sulla scorta di studi compiuti dal TAYLOR.

Come è noto essi consistono nell'assegnare una probabile linea di scorrimento e ricercarne graficamente la posizione che determina il minimo valore della spinta  $S_p$ .

Tali metodi rappresentano in sostanza una variazione del metodo di estremo proposto e risolto analiticamente dal COULOMB per superfici di scorrimento piane; essi hanno tutti i pregi ed i difetti delle soluzioni grafiche e, nel caso in oggetto, per particolari valori dei parametri, si incontrano notevoli difficoltà

(1) Cfr. [2], pag. 106 e segg.

(2) La spinta passiva calcolata con la teoria di COULOMB risulta in alcuni casi maggiore perfino del 30% di quella effettiva [2].

(\*) Dott. Ing. Tommaso ESPOSITO, assistente incaricato presso l'Istituto di Costruzioni di Strade, Ferrovie ed Aeroporti dell'Università di Napoli.

pratiche nel ricercare la configurazione per cui si ha il minimo valore della spinta.

Nella presente nota si è sviluppata la soluzione completamente analitica di uno di tali metodi nel caso di terreno incoerente a superficie orizzontale con un duplice scopo. Da un lato si è voluto indagare sulle ragioni per cui, anche con molti tentativi, in alcuni casi non si riesce ad ottenere graficamente il minimo di  $S_p$ ; in secondo luogo si è ricercata una espressione (poi tabellata) che consenta di calcolare la spinta senza ricorrere ai tentativi grafici.

**2 - Ipotesi e convenzioni**

Sia  $AB$  (Fig. 1) una parete di lunghezza  $h$ , ruotata dell'angolo  $j$  rispetto alla verticale;  $j$  si assume positivo se la rotazione avviene in senso orario, negativo in caso contrario.

Sia  $AE$  (orizzontale) la superficie libera del terreno costituito da terreno di peso specifico  $\gamma$ , con angolo di attrito interno  $\varphi$  e coesione nulla.

Si voglia trovare il valore della spinta passiva  $S_p$  supposta applicata ad una distanza  $h/3$  da  $B$  (distribuzione idrostatica delle pressioni) ed inclinata dell'angolo  $\delta$  (angolo di attrito terra-muro) rispetto alla normale alla parete;  $\delta$  si assume positivo se la spinta risulta ruotata in senso orario, negativo in caso contrario; si ha inoltre, ovviamente,  $|\delta| \leq \varphi$ .

Si supponga la linea di scorrimento costituita da un tratto di spirale logaritmica di equazione

$$r = r_0 \cdot e^{\theta \operatorname{tg} \varphi} \tag{1}$$

partente dal piede  $B$  della parete e raccordantesi nel punto  $C$  ad una retta inclinata rispetto all'orizzontale

di  $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ . Tale è, infatti, l'angolo che formano con

l'orizzontale le linee di scorrimento relative alla zona  $ACE$  che si trova in stato rankiniano, nel caso particolare di superficie del terreno orizzontale.

Per congruenza, ossia affinché non vi sia cuspidine in  $C$ , il polo della spirale deve trovarsi sulla retta  $AC$  <sup>(3)</sup>.

Sul masso delimitato dal quadrilatero mistilineo  $ABCD$  agiscono quindi:

- a) la forza peso  $G$
- b) la forza  $S_1$
- c) la forza di attrito  $F$
- d) la incognita spinta  $S_p$

Si osservi che la forza  $S_1$  è facilmente ed esattamente determinabile con la formula di RANKINE; la forza  $F$  è la risultante di tutte le forze elementari  $dF$  dovute all'attrito.

Per l'equilibrio del masso deve essere nullo il momento di tutte le forze agenti, rispetto ad un qualsiasi punto; se si fa coincidere questo punto con il polo  $O$  della spirale, le forze elementari  $dF$ , inclinate tutte di  $\varphi$  rispetto alla normale ed aventi quindi la direzione dei raggi vettori, non danno momento. Si

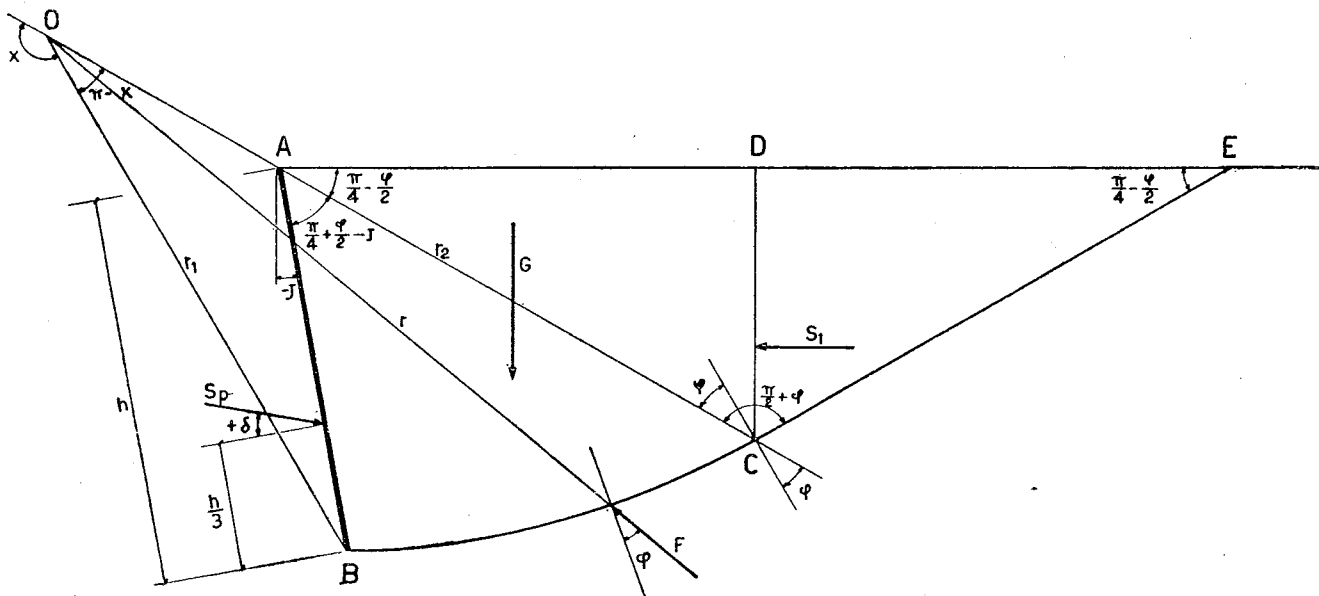


Fig. 1

noti inoltre che tutte le grandezze geometriche che servono per determinare i momenti di  $G$  ed  $S_1$ , nonché il braccio di  $S_p$ , rispetto ad  $O$ , dipendono dalla posizione di detto punto su  $AC$ , ossia dall'angolo  $x$  che il raggio vettore  $r_1$  forma con la  $AC$ ; si assumerà tale angolo come variabile indipendente. Per brevità conviene infine porre:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = \lambda \tag{2}$$

<sup>(3)</sup> È noto infatti che il raggio vettore e la normale relativi ad un punto della spirale di equazione (1) formano tra loro l'angolo  $\varphi$ .

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \mu \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + J = \alpha \quad (J \text{ col proprio segno}) \quad (4)$$

e che  $\theta_2 - \theta_1 = \pi - \alpha \quad (7)$

Dal triangolo  $AOB$  e per la (4) si ha inoltre:

$$r_1 = \frac{h}{\sin \alpha} \sin \alpha \quad (8)$$

### 3 - Determinazione dei momenti rispetto ad $O$

Per scrivere il momento della forza peso  $G$  rispetto al polo  $O$ , conviene considerare  $G$  come risultante delle seguenti forze:

- a) forza  $G_1$  corrispondente al peso di tutto il settore di spirale  $OBC$ ;
- b) forza  $G_2$  corrispondente al peso del triangolo  $OAB$  (considerata negativa);
- c) forza  $G_3$  corrispondente al peso del triangolo  $ADC$ .

Consideriamo ora il generico settore elementare di ampiezza  $d\theta$ ; detto  $\gamma$  il peso specifico del terreno, assumendo una profondità unitaria, e ricordando la (1), il peso ed il momento elementari, trascurando infinitesimi di ordine superiore, valgono rispettivamente:

$$dG_1 = \frac{\gamma}{2} r^2 d\theta = \frac{\gamma}{2} r_o^2 \cdot e^{2\theta \operatorname{tg} \varphi} \cdot d\theta$$

$$dM_{G_1} = d_1 \cdot dG_1 = \frac{2}{3} r \sin \theta \cdot dG_1 =$$

$$= \frac{\gamma}{3} r_o^3 \cdot e^{3\theta \operatorname{tg} \varphi} \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (9)$$

*Momento dovuto alla forza  $G_1$ .*

Sia  $AB$  la parete di lunghezza  $h$  e  $\widehat{BC}$  l'arco di spirale di equazione (1) dove:

- $r$  = raggio vettore generico;
- $r_o$  = raggio vettore per  $\theta = 0$ ;
- $\theta$  = anomalia del raggio vettore generico, misurata a partire dalla verticale per il polo  $O$ ;
- $\varphi$  = angolo di attrito interno del terreno.

Integrando la (9) si ottiene:

$$M_{G_1} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dM_{G_1} = \frac{\gamma}{3} r_o^3 \left[ \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \theta - \cos \theta}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi} e^{3\theta \operatorname{tg} \varphi} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (10)$$

Dalla Fig. 2, e ricordando le (2) e (3), si vede che le anomalie  $\theta_1$  e  $\theta_2$  corrispondenti ad  $r_1$  ed  $r_2$ , val-

tenendo conto che  $r_o = r_1 \cdot e^{-\theta_1 \operatorname{tg} \varphi}$ , e ricordando le (5), (6), (7), (8), la (10) diventa:

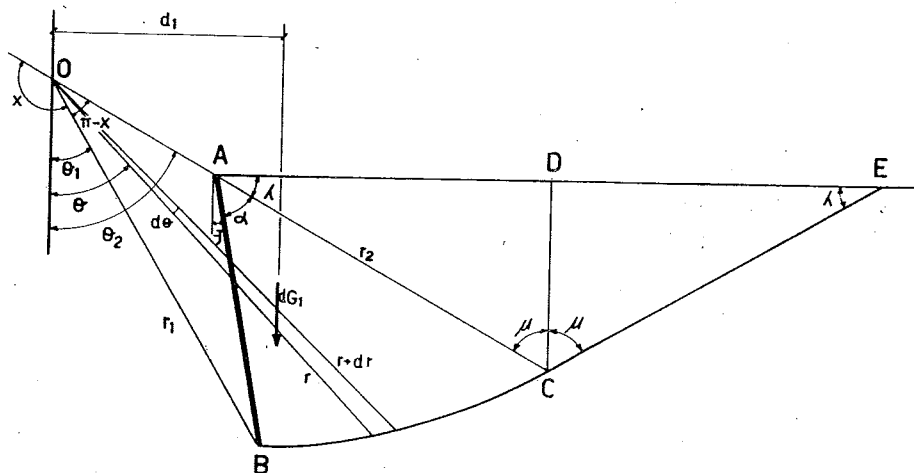


Fig. 2

gono rispettivamente

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \pi + x = x - \lambda - \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \mu \quad (6)$$

$$M_{G_1} = \frac{\gamma}{3} \frac{h^3}{\sin^3 x} \frac{\sin^3 \alpha}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$\cdot [(3 \operatorname{tg} \varphi \sin \mu - \cos \mu) e^{3(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} + 3 \operatorname{tg} \varphi \cos (x - \lambda) + \sin (x - \lambda)]$$

(11)

*Momento dovuto alla forza  $G_2$ .*

Il peso del triangolo  $AOB$ , con le notazioni precedentemente introdotte, risulta (Fig. 3):

$$G_2 = \frac{\gamma}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AB} \sin(\pi - \alpha) =$$

$$= -\frac{\gamma}{2} \frac{h^2}{\sin x} \sin \alpha \sin(\alpha + x) \quad (4)$$

Sostituendo tali espressioni nella (13) e tenendo conto della (12) si ottiene:

$$M_{G_2} = G_2 \cdot d_2 = \frac{\gamma}{6} \frac{h^3}{\sin^2 x} \sin \alpha \sin(\alpha + x) \cdot$$

$$\cdot [\sin(\alpha + x) \sin \mu + \sin \alpha \sin(\mu + x)] \quad (14)$$

Tale momento, per essere  $(\alpha + x) > \pi$  e  $(\mu + x) > \pi$ , è positivo e va quindi sottratto ad  $M_{G_1}$  per ottenere il momento della forza peso della zona  $ABC$ .

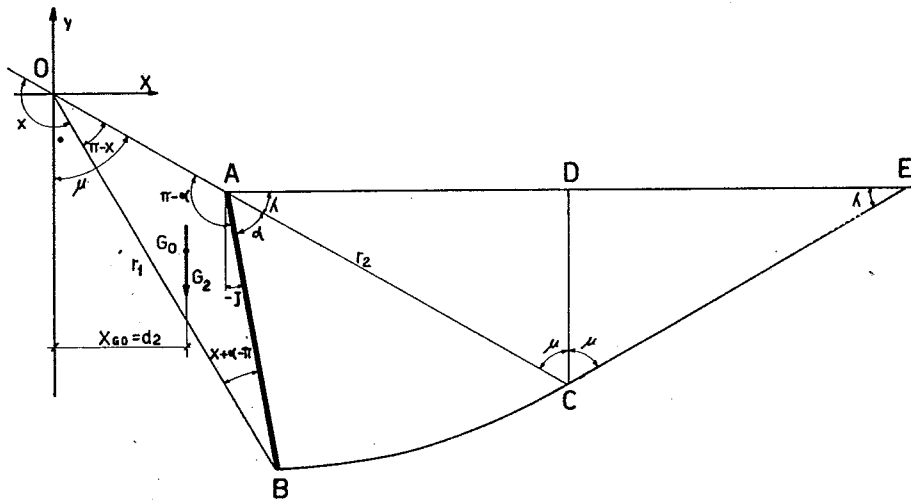


Fig. 3

Per calcolare il momento dovuto a  $G_2$  occorre trovare la distanza della sua retta di applicazione dal punto  $O$ . A tal fine si consideri il sistema di assi cartesiani  $XOY$  orientato come in figura; la distanza cercata coincide con l'ascissa del baricentro del triangolo  $AOB$  e si ottiene dalla:

$$x_{G_2} = \frac{x_O + x_A + x_B}{3} = d_2 \quad (13)$$

Le ascisse dei vertici del triangolo sono:

$$x_O = 0;$$

$$x_A = -\frac{h}{\sin x} \sin(\alpha + x) \sin \mu$$

$$x_B = -\frac{h}{\sin x} \sin \alpha \sin(\mu + x)$$

*Momento dovuto alla forza  $G_3$ .*

L'espressione che fornisce il peso della parte di terrapieno  $ACD$  può scriversi (Fig. 4):

$$G_3 = \frac{\gamma}{2} \overline{AC}^2 \sin \lambda \cos \lambda$$

Osservando che  $\overline{AC} = r_2 - \overline{OA}$ , che  $r_2 = r_1 \cdot e^{(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi}$  e ricordando la (8) si ha:

$$G_3 = \frac{\gamma}{2} \frac{h^2}{\sin^2 x} [\sin \alpha \cdot e^{(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} + \sin(\alpha + x)]^2 \sin \lambda \cos \lambda$$

Il braccio di tale forza vale:

$$d_3 = \frac{2}{3} \overline{AD} + \overline{OA} \cos \lambda =$$

$$= \frac{h}{3 \sin x} [2 \sin \alpha \cdot e^{(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} - \sin(\alpha + x)] \cos \lambda$$

(4) Il segno - deriva dall'essere  $\sin(\alpha + x)$  una quantità negativa, quando, come in figura, il polo è esterno al maso; si vedrà in seguito che il punto  $O$  non è mai interno.

Il momento cercato, tenendo conto delle trovate

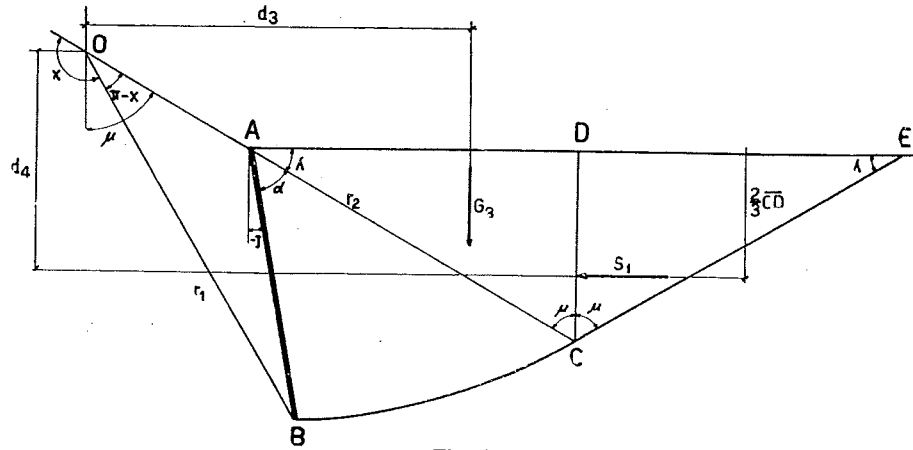


Fig. 4

espressioni di  $G_3$  e  $d_3$ , risulta quindi:

$$M_{G_3} = G_3 \cdot d_3 = \frac{\gamma}{6} \frac{h^3}{\sin^3 x} [2 \sin^3 \alpha \cdot e^{3(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} + 3 \sin(\alpha+x) \sin^2 \alpha \cdot e^{2(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} - \sin^3(\alpha+x)] \cos^2 \lambda \sin \lambda \quad (15)$$

Momento dovuto alla forza  $S_1$ .

Si è già detto precedentemente (par. 2) che la terra compresa nel triangolo  $ACE$  (Fig. 4) si trova in stato di RANKINE.

Il masso  $DCE$  può quindi essere sostituito, essendo la superficie del terreno orizzontale, con una forza, anch'essa orizzontale, applicata al terzo medio inferiore della parete fittizia  $DC$ , il cui valore, ricordando la (3), risulta com'è noto:

$$S_1 = \frac{\gamma}{2} \overline{DC}^2 \operatorname{tg}^2 \mu$$

Esprimendo  $\overline{DC}$  in funzione delle solite grandezze ed osservando che  $\operatorname{tg}^2 \mu = \cotg^2 \lambda$  si ha:

$$S_1 = \frac{\gamma}{2} \frac{h^2}{\sin^2 x} [\sin \alpha \cdot e^{(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} + \sin(\alpha+x)]^2 \cos^2 \lambda$$

Il braccio di tale forza vale:

$$d_4 = \frac{2}{3} \frac{\overline{DC} + \overline{OA}}{\sin \lambda} = \frac{h}{3 \sin x} [2 \sin \alpha \cdot e^{(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} - \sin(\alpha+x)] \sin \lambda$$

ed il momento rispetto ad  $O$  risulta quindi:

$$M_{S_1} = S_1 \cdot d_4 = \frac{\gamma}{6} \frac{h^3}{\sin^3 x} [2 \sin^3 \alpha \cdot e^{3(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} + 3 \sin(\alpha+x) \sin^2 \alpha \cdot e^{2(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} - \sin^3(\alpha+x)] \cos^2 \lambda \sin \lambda = M_{G_3} \quad (16)$$

Braccio della forza  $S_p$

Per calcolare il braccio (distanza da  $O$ ) della incognita  $S_p$  — supposta applicata nel punto  $N$  distante  $h/3$  da  $B$ , con inclinazione  $\delta$  —, se ne prolunghi la retta d'azione fino ad incontrare in  $M$  la  $AC$  (Fig. 5).  
Risulta:

$$d = \overline{OM} \cos(\alpha + \delta) = (\overline{OA} + \overline{AM}) \cos(\alpha + \delta)$$

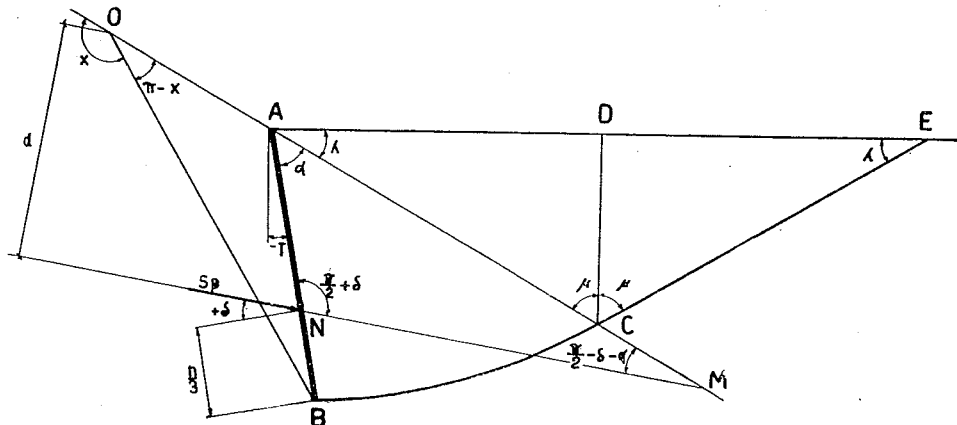


Fig. 5

Esprimendo  $\overline{OA}$  nel solito modo e ricavando  $\overline{AM}$  dal triangolo  $AMN$  si ottiene:

$$d = \frac{h}{3 \operatorname{sen} x} [2 \cos \delta \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen} (\alpha + x) \cos (\alpha + \delta)] \quad (17)$$

4 - Espressione della spinta  $S_p$

Imponendo la condizione che sia nullo il momento di tutte le forze agenti sul masso terroso delimitato dal quadrilatero mistilineo  $ABCD$ , si ottiene:

$$S_p = \frac{M_{G_1} - M_{G_2} + M_{G_3} + M_{S_1}}{d} \quad (18)$$

Tenendo conto delle espressioni (11), (14), (15), (16), (17) trovate per le grandezze che compaiono a secondo membro della (18), ed osservando che

$$\operatorname{sen} \lambda = \cos \mu, \quad \cos \lambda = \operatorname{sen} \mu \quad \text{e} \quad 2\mu = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \text{attraverso}$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{sen} (\alpha + \mu) \operatorname{sen} x \Big\} = \gamma h^2 K \quad (19)$$

in cui il coefficiente  $K$  dipende, come si vede, dai parametri  $\varphi, \delta, J$  e dalla variabile  $x$ . E' chiaro che se invece della lunghezza  $h$  della parete è data, come in pratica accade, l'altezza  $h_1$  del muro misurata verticalmente, la spinta è fornita da:

$$S_p = \gamma \frac{h_1^2}{\cos^2 J} K$$

E' necessario a questo punto osservare che in tutte le figure con cui si è illustrato il procedimento per giungere alla (19), si è assunto  $\delta > 0$  e l'arco di spirale con la concavità rivolta in alto; in tal caso è:

$$0 < x < \pi \quad (20)$$

E' agevole constatare che per  $x \rightarrow 0, K \rightarrow \infty$  mentre per  $x \rightarrow \pi$  (superficie di scorrimento piana),  $K$  assume

il valore indeterminato  $\frac{0}{0}$ ; applicando però due volte

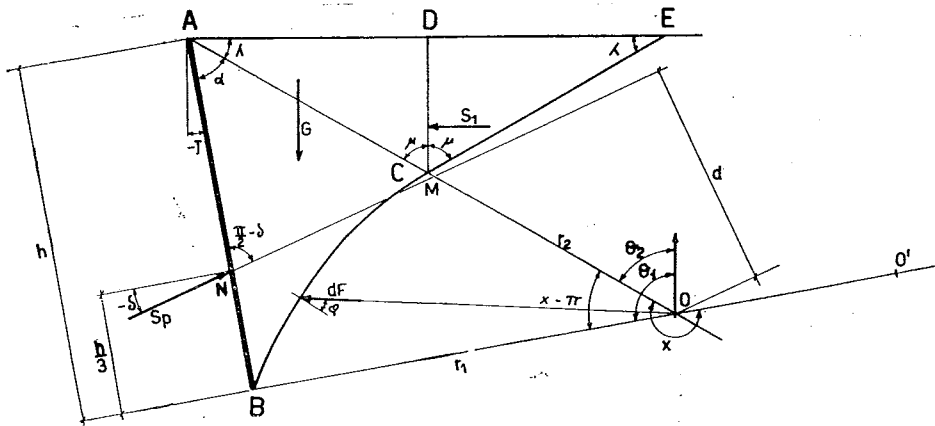


Fig. 6

passaggi la (18) può scriversi:

$$S_p = \frac{\gamma h^2}{\operatorname{sen}^2 x [2 \operatorname{sen} x \cos \delta - 3 \operatorname{sen} (\alpha + x) \cos (\alpha + \delta)]} \cdot \left\{ \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi} \left[ 3 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} \mu (1 + 3 \operatorname{sen} \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \mu \operatorname{sen} \varphi \right] e^{3(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} + 3 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} (\mu + x) - \cos (\mu + x) \right\} + \\ + \operatorname{sen} (\alpha + x) \operatorname{sen}^2 \mu \cos \mu [3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot e^{2(\pi-x) \operatorname{tg} \varphi} - \operatorname{sen}^2 (\alpha + x)] + \\ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha + x) [\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \mu \cos x +$$

la regola di HÔPITAL, si giunge al valore:

$$K = \frac{1}{6 \cos (\alpha + \delta)} \left\{ 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen} \mu \operatorname{tg} \varphi + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \right. \\ \left. \cdot [9 \operatorname{tg}^2 \varphi (\cos \mu + 9 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} \mu) \operatorname{sen} \varphi - \cos \mu] + \right. \\ \left. + 6 \operatorname{sen}^2 \mu \cos \mu [\operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} 2\alpha + \cos^2 \alpha - 2 \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \alpha] + \right. \\ \left. + \operatorname{sen} \alpha [3 \cos \alpha \operatorname{sen} \mu + \operatorname{sen} \alpha \cos \mu] \right\}$$

Per  $\mu = \alpha$  (parete verticale) e  $\delta = 0$ , attraverso passaggi piuttosto laboriosi si giunge a:

$$K = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \mu$$

che coincide con il coefficiente di spinta passiva fornito dalle teorie del COULOMB e del RANKINE in questo caso particolare.

Se invece l'angolo  $\delta$  è negativo le linee di scorrimento assumono la forma indicata nella Fig. 6 in cui l'arco di spirale rivolge la concavità in basso. [4]

Si potrebbe mostrare, con egual procedimento che per brevità si omette, che la condizione di equilibrio del masso  $ABCE$  conduce ancora all'espressione (19) della spinta  $S_p$  a patto che si prenda per  $x$ , come indicato in Fig. 6, l'angolo concavo formato dalle direzioni  $OA$  e  $OO'$ ; d'altra parte la spirale può al massimo essere tangente alla parete nel punto  $B$ , ossia

l'angolo  $ABO$  non può essere inferiore a  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . Nel

caso in cui è  $\delta < 0$  per  $x$  vale dunque la relazione:

$$\pi < x < \frac{3}{2}\pi - \alpha + \varphi \quad (21)$$

o l'altra equivalente:

$$\pi < x < \frac{5}{4}\pi + \frac{\varphi}{2} - J \quad (22)$$

Si vedrà in seguito che se è  $\delta = 0$  prevale l'una

sa del coefficiente  $K$ , risulta molto laborioso e difficoltoso; allo scopo di fornire dei risultati che consentano la facile e rapida determinazione della spinta passiva, si è ricorso alla tabellazione; si è risolto cioè la (19) per i valori più comuni di  $\varphi$ ,  $\delta$ ,  $J$ , facendo variare opportunamente, per ogni terna di tali parametri, la  $x$  in modo da ottenere il minimo valore  $K_0$  di  $K$ . (6)

E' stato così possibile compilare le tabelle riportate in Appendice in cui sono riportati, per dati  $\varphi$ ,  $\delta$ ,  $J$  il valore  $x_0$  che rende minima la (19) ed il corrispondente valore  $K_0$ . Si sono considerati cinque valori di  $\varphi$  ( $20^\circ$ ;  $25^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $35^\circ$ ;  $40^\circ$ ) e per ciascuno di essi un valore di  $\delta$  variabile di  $5^\circ$  in  $5^\circ$  da  $-\varphi$  a  $+\varphi$ ; si è inoltre considerato una inclinazione  $j$  della parete compresa fra  $-20^\circ$  e  $+20^\circ$  anch'essa variabile di  $5^\circ$  in  $5^\circ$ .

## 5 - Conclusioni

Poiché nel ricercare il valore minimo della (19), per ogni terna di parametri, si è fatto variare  $x$  di  $5^\circ$  in  $5^\circ$ , i valori  $x_0$  forniti dalla tabella sono affetti (tranne i casi in cui  $x_0 = 178^\circ$  e  $x_0 = 182^\circ$ ) da un errore che al massimo vale  $\pm 2,5^\circ$ ; tale approssimazione incide sul valore di  $K_0$  in modo trascurabile (si mantiene in genere intorno all'1%, avvicinandosi al 2% solo per i valori di  $\delta$  prossimi a  $\varphi$ ). In Fig. 7 a titolo di esempio sono riportati, per  $\varphi = 30^\circ$  e

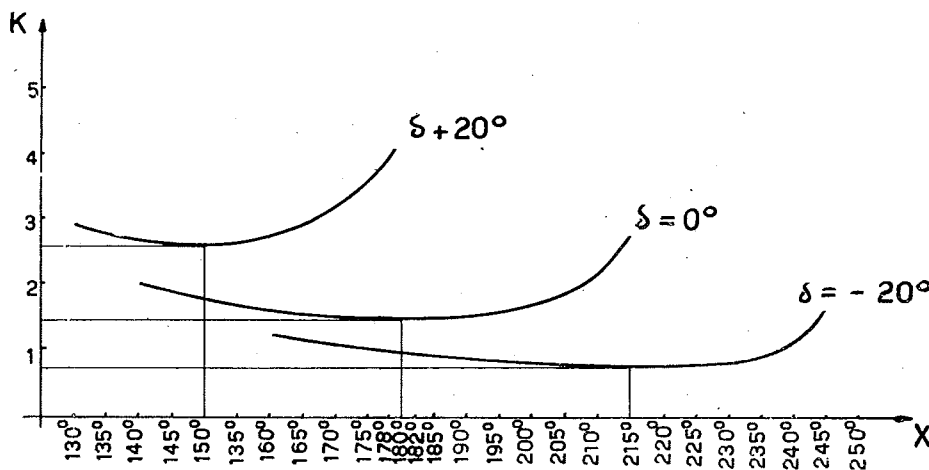


Fig. 7

o l'altra configurazione a secondo del valore positivo o negativo dell'angolo  $J$ .

Nel caso più generale per trovare il valore di  $K$  coincidente con il coefficiente di spinta passiva, bisogna rendere minimo  $K$  ossia porre:

$$\frac{dK}{dx} = 0 \quad (23)$$

e sostituire il valore di  $x$ , ottenuto risolvendo la (23) nella (19). (5)

Tale procedimento, per la forma piuttosto comples-

(6) Si osservi che la (23) ammette in generale più soluzioni fra cui bisogna scegliere l'unica fisicamente accettabile; ciò si ottiene limitando il campo di variazione di  $x$  secondo le relazioni (20) o (22) a secondo che sia  $\delta$  positivo o negativo.

(6) Poiché i calcoli numerici per compilare le tabelle sono stati eseguiti a mezzo del calcolatore elettronico in dotazione al Centro di Calcolo del Politecnico di Napoli, è risultato più conveniente risolvere un gran numero di volte la (19) di programmazione relativamente agevole, piuttosto che risolvere un minor numero di volte la (23) di programmazione notevolmente complessa.

Ringrazio il Prof. G. SAVASTANO, Direttore del Centro per la sua cortese collaborazione.

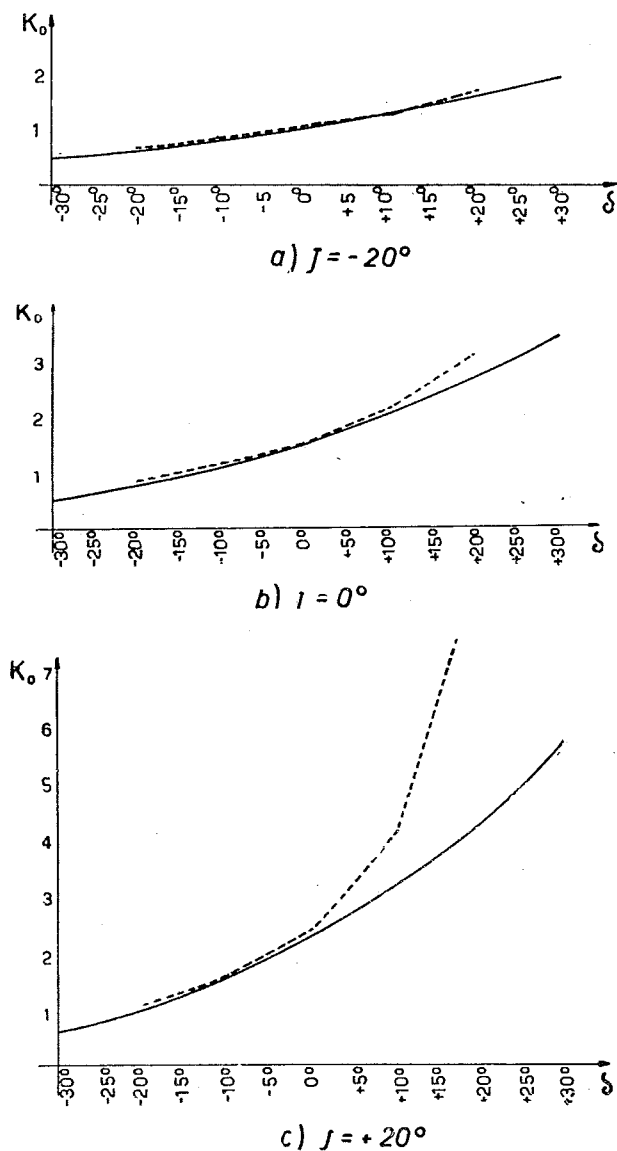


Fig. 8

$j = 0^\circ$ , le curve  $K = K(x)$  corrispondenti a  $\delta = -20^\circ$ ;  $\delta = 0^\circ$ ;  $\delta = +20^\circ$ .

Come si vede per  $\delta = 0^\circ$  è  $x_0 = \pi$  (ed il valore di  $K_0$  coincide con quelli forniti dalle teorie del COULOMB e del RANKINE), mentre per  $\delta = -20^\circ$  e  $\delta = +20^\circ$  l'angolo  $x_0$  assume rispettivamente i valori  $215^\circ$  e  $150^\circ$  a conferma del fatto che, per elevati valori dell'an-

golo di attrito terra-muro, le linee di scorrimento presentano una pronunciata curvatura e non possono assolutamente essere approssimate a linee rette; si nota altresì che nell'intorno di  $x_0$  la curva  $K = K(x)$  è notevolmente appiattita ponendo in evidenza e confermando quanto si è detto circa le approssimazioni di  $x_0$  e  $K_0$ .

Nelle Figg. 8 a), b), c) sono riportate (a tratto pieno) le curve  $K_0 = K_0(\delta)$  per  $\varphi = 30^\circ$  e per  $j$  rispettivamente uguale a  $-20^\circ$ ;  $0^\circ$ ;  $+20^\circ$ ; tali curve vengono confrontate con le analoghe (tratteggiate) desunte dai valori  $\lambda_{ph}$  calcolati e tabellati da BLUM (7) nell'ipotesi di superfici di scorrimento piane; si noti quanto forti siano, per particolari valori dei parametri, le divergenze fra le due curve. Dalla tabella risulta che per  $\delta = 0^\circ$  è  $x_0$  maggiore o minore di  $\pi$  a secondo che sia l'angolo  $j$  negativo o positivo.

Per concludere si osservi infine che i valori  $x_0$  inferiori a  $\pi$  riportati in tabella soddisfano sempre alla relazione:

$$x_0 > \pi - \alpha$$

il che significa che il polo  $O$  della spirale è sempre esterno al segmento  $AC$ , ossia cade sempre al di fuori del masso terroso ed in molti casi a notevole distanza da  $A$ . (Ad es. per  $h = 10$  m  $AO$  può risultare maggiore di 100 m).

Resta così chiarita la ragione per cui, in alcuni casi la costruzione grafica per la determinazione della spinta diventa disagiata, conducendo peraltro a risultati scarsamente attendibili per effetto degli errori grafici.

### Bibliografia

- [1] CAQUOT et KERISEL, *Traité de mécanique des sols*, Gauthier, Paris, 1956.
- [2] HANSEN J. BRINCH, *Earth pressure Calculation*, Copenhagen, Danish Technical Press, The Institution of Danish Civil Engineers, 1953.
- [3] HUNTINGTON WHITNEY CLARK, *Earth pressure and retaining walls*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1957.
- [4] TERZAGHI V. KARL, *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1943.
- [5] TERZAGHI V. KARL and PECK B. RALPH, *Soil, Mechanics in Engineering Practice*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1948.

(7) C. CESTELLI GUIDI, *Meccanica del terreno, fondazioni, opere in terra*, Hoepli, Milano, 1957, pag. 203.

#### DETERMINATION OF THE PASSIVE PRESSURE IN COHESIONLESS EARTH.

*Summary* - To determine the passive pressure in the case of cohesionless earth and horizontal ground-surface, a well known graphic procedure is developed by analytical methods.

It is supposed that the sliding surface is cylindrical and its directrix is represented by an arc of a logarithmic spiral linked with a segment of a straight line. The results so obtained provide useful observations concerning the position of the pole of the spiral, and the limits of the practical applicability of the graphic method. A table is given so that the passive pressure can be in most of cases, easily and immediately determined.

#### DETERMINATION DE LA POUSSEE DANS UN MASSIF TERREUX INCOHERENT.

*Sommaire* - On développe analytiquement un procédé graphique bien connu pour la détermination de la poussée en cas des sols incohérents et de surface du sol horizontal. On pose que la surface de glissement soit cylindrique avec directrice constituée par un arc de spirale logarithmique raccordée avec un segment de droite.

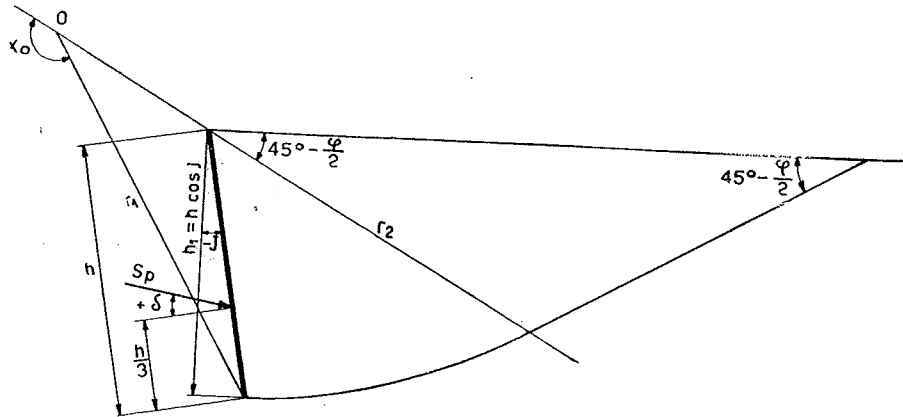
Les résultats obtenus permettent des utiles observation regardantes la position du pôle de la spirale, et les limites d'applicabilité pratique de la méthode graphique.

Pour commodité d'application on donne un tableau qui permet la détermination immédiate de la poussée dans la plus part des cases.



APPENDICE

Valori di  $x_0$  (superiori) e di  $K_0$  (inferiori) per dati  $\varphi$ ;  $J$ ;  $\delta$



$$S_p = \gamma h^2 K_0 = \gamma \frac{h_1^2}{\cos^2 J} K_0$$

TABELLA I -  $\varphi = 20^\circ$

J \ $\delta$	-20°	-15°	-10°	-5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°
-20°	255° 0,48477	240° 0,54964	230° 0,61569	215° 0,68568	205° 0,75956	175° 0,85998	175° 0,92306	165° 0,99625	160° 1,06779
-15°	250° 0,49926	235° 0,57731	225° 0,65611	210° 0,73795	200° 0,82459	175° 0,92951	170° 1,00874	165° 1,09575	155° 1,17875
-10°	245° 0,51278	230° 0,60480	215° 0,69641	205° 0,79088	195° 0,89091	175° 1,00202	170° 1,09760	160° 1,19811	150° 1,29401
-5°	240° 0,52482	225° 0,63170	210° 0,73607	200° 0,84408	190° 0,95877	170° 1,07546	165° 1,18839	155° 1,30306	145° 1,41365
0°	235° 0,53494	220° 0,65763	205° 0,77505	195° 0,89736	180° 1,03406	170° 1,15211	160° 1,28077	150° 1,41036	140° 1,53776
+5°	230° 0,54273	210° 0,68216	200° 0,81307	190° 0,95134	170° 1,09094	165° 1,22941	155° 1,37404	145° 1,51981	140° 1,66402
+10°	225° 0,54777	205° 0,70387	195° 0,85012	185° 1,01465	170° 1,15207	160° 1,30703	150° 1,46772	140° 1,63119	135° 1,79227
+15°	220° 0,54971	200° 0,72351	190° 0,88734	185° 1,09028	165° 1,21190	155° 1,38395	145° 1,56141	135° 1,74429	130° 1,92384
+20°	215° 0,54996	195° 0,74130	185° 0,93683	185° 1,20563	160° 1,27107	150° 1,45961	140° 1,65468	135° 1,85816	125° 2,05861

TABELLA II -  $\varphi = 25^\circ$

$J \backslash \delta$	-25°	-20°	-15°	-10°	-5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°	+25°
-20°	255° 0,47626	245° 0,54277	235° 0,61255	225° 0,68774	215° 0,76994	205° 0,86017	178° 0,98420	178° 1,06867	175° 1,17640	165° 1,28926	160° 1,40510
-15°	250° 0,49144	240° 0,57121	230° 0,65441	220° 0,74381	210° 0,84124	200° 0,94780	178° 1,07609	178° 1,18702	170° 1,31745	160° 1,44926	150° 1,57968
-10°	245° 0,50626	235° 0,60027	225° 0,69781	215° 0,80236	200° 0,91537	190° 1,03884	178° 1,17582	170° 1,31711	165° 1,46735	155° 1,62059	145° 1,77582
-5°	240° 0,52019	230° 0,62954	220° 0,74241	205° 0,86158	195° 0,99155	185° 1,13359	175° 1,28779	165° 1,45341	160° 1,62640	150° 1,80401	145° 1,98479
0°	235° 0,53274	225° 0,65865	210° 0,78625	200° 0,92208	190° 1,07021	180° 1,23374	170° 1,40769	160° 1,59699	155° 1,79498	145° 2,00034	140° 2,20879
+5°	230° 0,54341	220° 0,68728	205° 0,83015	195° 0,98367	185° 1,15121	175° 1,33414	165° 1,53290	155° 1,74801	150° 1,97350	140° 2,21049	135° 2,45035
+10°	225° 0,55173	210° 0,71371	200° 0,87331	190° 1,04538	182° 1,23816	170° 1,43835	160° 1,66184	150° 1,90494	145° 2,16015	135° 2,43298	130° 2,70798
+15°	220° 0,55729	205° 0,73866	195° 0,91704	182° 1,10805	182° 1,35797	165° 1,54869	155° 1,79917	145° 2,07325	140° 2,36228	135° 2,67355	125° 2,99222
+20°	215° 0,55956	200° 0,76154	190° 0,95971	182° 1,18288	182° 1,54261	160° 1,66135	150° 1,94041	140° 2,24791	135° 2,57358	130° 2,92505	120° 3,29574

TABELLA III -  $\varphi = 30^\circ$

$J \backslash \delta$	-30°	-25°	-20°	-15°	-10°	-5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°	+25°	+30°
-20°	260° 0,46061	250° 0,52922	240° 0,60178	230° 0,68085	220° 0,76869	215° 0,86676	205° 0,97734	178° 1,14531	178° 1,25300	178° 1,39476	170° 1,56079	160° 1,73259	150° 1,91075
-15°	255° 0,47622	245° 0,55827	235° 0,64463	225° 0,73876	215° 0,84347	205° 0,96127	200° 1,09430	178° 1,26669	178° 1,41003	170° 1,59204	165° 1,78962	155° 1,99555	150° 2,20881
-10°	250° 0,49206	240° 0,58872	230° 0,69002	220° 0,80049	210° 0,92359	200° 1,06235	190° 1,21946	178° 1,40249	175° 1,59192	165° 1,80849	160° 2,04254	150° 2,28872	145° 2,54311
-5°	245° 0,50759	235° 0,62021	225° 0,73769	215° 0,86591	205° 1,00912	195° 1,17090	185° 1,35444	178° 1,56096	170° 1,79225	160° 2,04646	155° 2,32212	145° 2,61581	140° 2,91856
0°	240° 0,52227	230° 0,65239	215° 0,78692	205° 0,93453	200° 1,10021	190° 1,28730	180° 1,50212	170° 1,74193	165° 2,01125	155° 2,30812	150° 2,63128	140° 2,98102	135° 3,34065
+5°	235° 0,53559	220° 0,68436	210° 0,83636	200° 1,00468	190° 1,19523	182° 1,41054	175° 1,65699	165° 1,93659	160° 2,25076	150° 2,59594	145° 2,97337	140° 3,38532	130° 3,81555
+10°	230° 0,54703	215° 0,71513	205° 0,88689	195° 1,07774	185° 1,29470	182° 1,55636	170° 1,82652	160° 2,14793	155° 2,51297	145° 2,91271	140° 3,35212	135° 3,83271	130° 4,34896
+15°	225° 0,55608	210° 0,74518	200° 0,93839	190° 1,15380	182° 1,40227	182° 1,76637	165° 2,00990	155° 2,37769	150° 2,80045	140° 3,26158	135° 3,77176	130° 4,33113	125° 4,93476
+20°	220° 0,56218	205° 0,77428	195° 0,99088	182° 1,23290	182° 1,55307	182° 2,11964	155° 2,20835	150° 2,62793	145° 3,11632	135° 3,64612	130° 4,23698	125° 4,88664	120° 5,59124

TABELLA IV -  $\varphi = 35^\circ$

$\delta \backslash J$	-35°	-30°	-25°	-20°	-15°	-10°	-5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°	+25°	+30°	+35°
-20°	260° 0,44001	255° 0,50914	245° 0,58319	235° 0,66848	230° 0,75549	220° 0,85861	210° 0,97787	205° 1,11485	178° 1,34284	178° 1,48126	178° 1,66563	170° 1,90092	165° 2,16102	155° 2,44139	150° 2,73353
-15°	255° 0,45624	250° 0,53870	240° 0,62656	230° 0,72376	220° 0,83382	215° 0,95776	205° 1,10168	195° 1,26997	178° 1,50329	178° 1,69043	175° 1,94110	165° 2,22794	160° 2,54590	150° 2,89293	145° 3,25381
-10°	250° 0,47327	245° 0,57044	235° 0,67341	225° 0,78768	215° 0,91776	210° 1,06729	200° 1,23913	190° 1,44095	178° 1,68821	175° 1,94418	170° 2,25516	160° 2,60219	155° 2,98871	150° 3,41634	140° 3,86208
-5°	245° 0,49056	235° 0,60354	230° 0,72360	220° 0,85671	210° 1,00909	200° 1,18664	195° 1,39166	185° 1,63175	178° 1,91164	170° 2,23688	165° 2,61310	155° 3,03090	150° 3,49868	145° 4,01686	135° 4,57399
0°	240° 0,50761	230° 0,63721	220° 0,77619	215° 0,93104	205° 1,10834	195° 1,31624	190° 1,56112	180° 1,84803	170° 2,18337	165° 2,56864	160° 3,02173	150° 3,52255	145° 4,08666	140° 4,71280	135° 5,39488
+5°	235° 0,52380	225° 0,67133	215° 0,82980	205° 1,00941	200° 1,21488	190° 1,45672	182° 1,74252	175° 2,08083	165° 2,48062	160° 2,94079	150° 3,48279	145° 4,08036	140° 4,75693	135° 5,50978	130° 6,33393
+10°	230° 0,53889	220° 0,70668	210° 0,88707	200° 1,09278	195° 1,33377	185° 1,61467	182° 1,98067	170° 2,35229	160° 2,82362	155° 3,37460	145° 4,01409	140° 4,73619	135° 5,54962	130° 6,45746	125° 7,45661
+15°	225° 0,55204	215° 0,74191	205° 0,94627	195° 1,18076	185° 1,45867	182° 1,79725	182° 2,34382	165° 2,65529	155° 3,20815	150° 3,86488	140° 4,62720	135° 5,48352	130° 6,45676	125° 7,54645	120° 8,75271
+20°	220° 0,56276	210° 0,77719	200° 1,00816	190° 1,27483	182° 1,59361	182° 2,07833	182° 2,87532	155° 3,02983	150° 3,64542	145° 4,42725	135° 5,32485	130° 6,34515	125° 7,50700	120° 8,81228	115° 10,26604

TABELLA V -  $\varphi = 40^\circ$

$\delta \backslash J$	-40°	-35°	-30°	-25°	-20°	-15°	-10°	-5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°	+25°	+30°	+35°	+40°
-20°	265° 0,41104	255° 0,48250	250° 0,55699	240° 0,63971	235° 0,73214	225° 0,83825	220° 0,96158	210° 1,10605	205° 1,27780	178° 1,58944	178° 1,76930	178° 2,01232	175° 2,34321	165° 2,72876	160° 3,16437	155° 3,65469	145° 4,18405
-15°	260° 0,42737	250° 0,51150	245° 0,60046	235° 0,69867	230° 0,81115	220° 0,93913	210° 1,09163	205° 1,26850	195° 1,48294	178° 1,80252	178° 2,05015	175° 2,39403	170° 2,81767	160° 3,30065	155° 3,84944	150° 4,46776	145° 5,14867
-10°	255° 0,44500	245° 0,54303	240° 0,64829	230° 0,76375	220° 0,89796	215° 1,05246	205° 1,23641	200° 1,45443	190° 1,71674	178° 2,05558	178° 2,40421	170° 2,85067	165° 3,38153	155° 3,98358	150° 4,67196	145° 5,44911	140° 6,30889
-5°	250° 0,46342	240° 0,57680	230° 0,69949	225° 0,83525	215° 0,99330	210° 1,17978	200° 1,40027	195° 1,66771	185° 1,98655	178° 2,37253	170° 2,83877	165° 3,39085	160° 4,05329	150° 4,80045	145° 5,66096	140° 6,63506	135° 7,71857
0°	245° 0,48215	235° 0,61253	225° 0,75377	220° 0,91362	210° 1,09880	200° 1,32278	195° 1,58613	185° 1,91191	180° 2,30374	175° 2,77936	165° 3,34659	160° 4,03190	150° 4,85034	145° 5,77914	140° 6,85176	135° 8,06986	130° 9,43286
+5°	240° 0,50070	230° 0,64997	220° 0,81185	210° 0,99930	205° 1,21569	195° 1,47983	190° 1,79775	182° 2,18638	175° 2,66299	165° 3,25026	160° 3,94652	155° 4,79535	145° 5,80121	140° 6,95369	135° 8,28740	130° 9,80736	125° 11,51900
+10°	235° 0,51855	225° 0,68890	215° 0,87384	205° 1,08988	200° 1,34561	190° 1,65633	182° 2,03679	182° 2,56565	170° 3,08919	160° 3,80007	155° 4,65833	150° 5,70824	140° 6,93884	135° 8,36556	130° 10,02014	125° 11,91293	120° 14,05874
+15°	230° 0,53515	220° 0,72916	210° 0,93999	200° 1,18847	195° 1,49080	185° 1,85562	182° 2,34340	182° 3,19829	165° 3,59145	155° 4,44953	150° 5,50720	145° 6,80505	135° 8,30291	130° 10,06540	125° 12,11362	120° 14,46590	115° 17,15536
+20°	225° 0,54989	215° 0,77067	205° 1,01073	195° 1,29623	185° 1,65018	182° 2,09400	182° 2,85804	182° 3,81129	155° 4,17577	150° 5,22151	145° 6,52579	135° 8,10225	130° 9,94236	125° 12,11522	120° 14,64513	115° 17,56231	110° 20,91708