

Sulle tensioni tangenziali indotte in un semispazio “alla Fröhlich,, da un carico superficiale

M. TORRIGIANI *

SOMMARIO: Nella presente nota viene esaminata la distribuzione delle tensioni tangenziali all'interno di un semispazio incoerente soggetto superficialmente ad un carico uniforme distribuito su un'area circolare.

Si suppone che la ripartizione dei carichi avvenga secondo le ipotesi di GRIFFITH e FRÖHLICH, e la determinazione viene condotta per valori diversi del fattore di concentrazione, che caratterizzano i risultati validi per terreni di diversa compattezza.

1. Premessa.

È noto come i primi studi sullo stato di tensione generato nel semispazio da una forza superficiale P siano stati condotti attribuendo al mezzo proprietà di elasticità, omogeneità ed isotropia, e supponendolo privo di peso, come in BOUSSINESQ [1885] e MICHELL [1900].

In realtà, come mise in evidenza sperimentalmente FÖPPL [1897], il modulo di elasticità normale E non è costante; inoltre le deformazioni elastiche sono accompagnate da deformazioni permanenti [TERZAGHI, 1925].

Mentre l'omogeneità del semispazio può essere ancora sostenuta per terreni fortemente coerenti, ciò non vale assolutamente, ai fini delle applicazioni, per terreni che presentano coesione scarsa o addirittura nulla.

Per questi ultimi si può al massimo parlare di modulo di elasticità crescente linearmente con la profondità.

Venne pertanto proposta dal GRIFFITH [1929] e dal FRÖHLICH [1934] una legge di ripartizione del carico, cosiddetta lineare, la quale dà luogo ad uno stato di tensione privo in ogni punto di componenti di trazione.

Vengono utilizzate condizioni di equilibrio per giungere alle espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\nu P}{2 \pi D^2} \cos^{\nu} \vartheta \\ \sigma_h &= \frac{\nu P}{2 \pi D^2} \operatorname{sen}^2 \vartheta (\cos \vartheta)^{\nu-2} \\ \tau &= \frac{\nu P}{2 \pi D^2} \operatorname{sen} \vartheta (\cos \vartheta)^{\nu-1} \end{aligned} \quad (1)$$

Nelle (1), riferite al punto generico del semispazio (vedi fig. 1), compare il « *Konzentrationsfactor* » ν i cui valori definiscono le proprietà elastiche del mezzo. Infatti per $\nu = 3$ le (1) coincidono con le soluzioni del BOUSSINESQ per un semispazio incompressibile (modulo di Poisson $m = 2$) nel quale E sia proporzionale alla coesione del mezzo; per $\nu = 4$

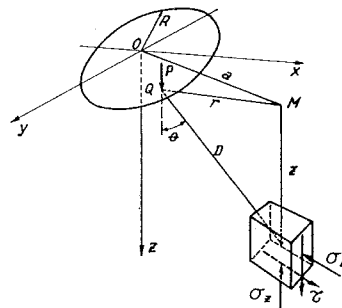


Fig. 1.

si ottengono relazioni valide per un mezzo privo di coesione nel quale E aumenti linearmente con la profondità.

Per un terreno incoerente, il fattore di concentrazione si presenta tanto minore quanto più le dilatazioni trasversali sono impedito ($4 < \nu < 5$ per una sabbia compatta), mentre aumenta in presenza di esse ($\nu = 6$ per sabbia sciolta).

Con la legge proposta, il FRÖHLICH riscontra una soddisfacente concordanza fra i valori calcolati e quelli ottenuti sperimentalmente in un gran numero di prove ⁽¹⁾.

Lo stato di tensione indotto nel semispazio da un carico agente superficialmente su un'area circolare rappresenta un caso interessante per le applicazioni; già nel campo elastico, per il semispazio isotropo, il problema venne risolto da TERAZAWA

* Dott. Ing. Mario TORRIGIANI, Assistente di *Tecnica delle Costruzioni* dell'Università di Genova.

⁽¹⁾ Vedi quanto richiamato dal FRÖHLICH nell'opera citata.

[1916] e poi generalizzato da LOVE [1929]; il FADUM [1948] calcolò la tensione normale verticale σ_z nei punti dell'asse di carico.

Il problema, riferito però ad un semispazio non omogeneo e trattato secondo le ipotesi di GRIFFITH e FRÖHLICH, fu poi ripreso da LORENZ e NEUMEUER [1953], i quali determinarono la distribuzione della tensione normale verticale σ_z al variare della profondità, a varie distanze dall'asse di carico.

Nel seguito viene determinata la distribuzione delle tensioni tangenziali al variare di z per i punti che distano dall'asse dell'area di carico di $R/4$, $R/2$, R , $3/2 R$ e $2 R$, quando ν assume i valori 3, 4, 5, 6, 7.

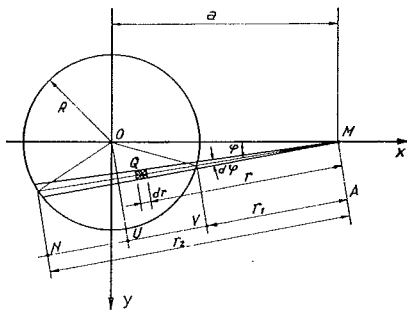


Fig. 2.

2. Impostazione del problema.

Sia q il carico uniformemente ripartito, alla frontiera del semispazio, su un'area circolare di centro O e raggio R .

Essendo, con riferimento ai simboli della fig. 1:

$$D^2 = r^2 + z^2 \quad \cos \vartheta = \frac{z}{D} \quad \text{sen } \vartheta = \frac{r}{D}$$

dalla terza delle (1) risulta:

$$d\tau = \frac{\nu q}{2\pi} \frac{z^{\nu-1} r}{D^{\nu+2}} dA \quad (2)$$

Il punto M in cui si vuol determinare il valore τ può essere esterno o interno, ad una distanza generica dalla frontiera, all'area di carico (fig. 2 e fig. 3 rispettivamente). Poichè $dA = r d\varphi dr$, si ha integrando la (2) a metà dell'area di carico:

$$\tau = \frac{\nu q z^{\nu-1}}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{(\nu+2)/2}} dr \quad (3)$$

Con riferimento alle figg. 2-3 i limiti di integrazione della (3) sono i seguenti:

per $a > R$ (punto M esterno all'area di carico):

$$r_1 = a \left[\cos \varphi - \left(\frac{R^2}{a^2} - \text{sen}^2 \varphi \right)^{1/2} \right]$$

$$r_2 = a \left[\cos \varphi + \left(\frac{R^2}{a^2} - \text{sen}^2 \varphi \right)^{1/2} \right]$$

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = \text{arc sen } \frac{R}{a}$$

per $a = R$ (punto M giacente sul perimetro della area di carico):

$$r_1 = 0 \quad r_2 = 2 R \cos \varphi$$

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

per $a < R$ (punto M interno all'area di carico):

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = a \left[\cos \varphi + \left(\frac{R^2}{a^2} - \text{sen}^2 \varphi \right)^{1/2} \right]$$

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = \pi.$$

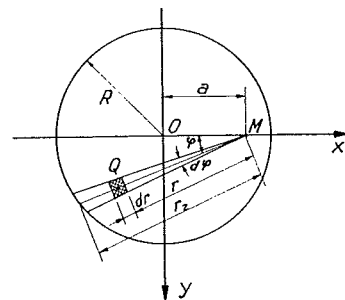


Fig. 3.

3. Risoluzione delle equazioni del problema.

Esaminiamo l'integrale che figura nella (3):

$$\int \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{(\nu+2)/2}} dr \quad (4)$$

Per ν pari l'integrale (4) si può scrivere:

$$\int \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^k} dr$$

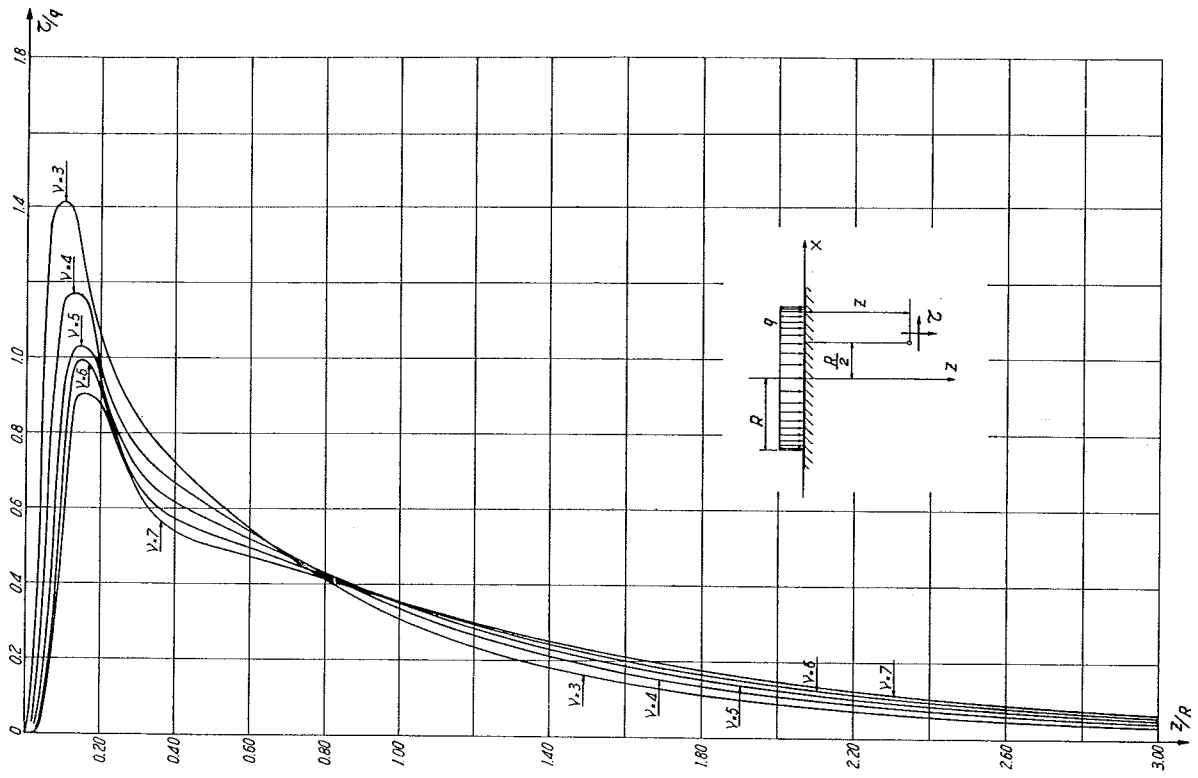


Fig. 5.

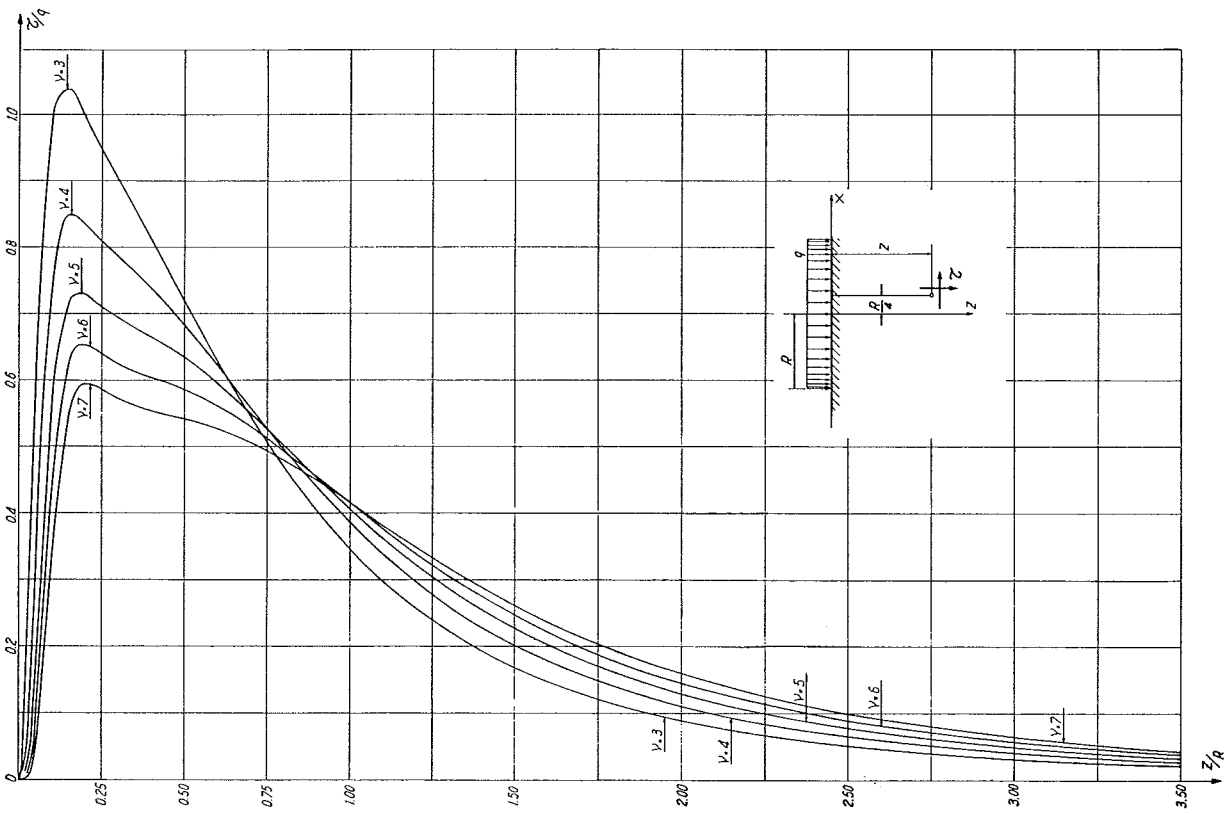


Fig. 4.

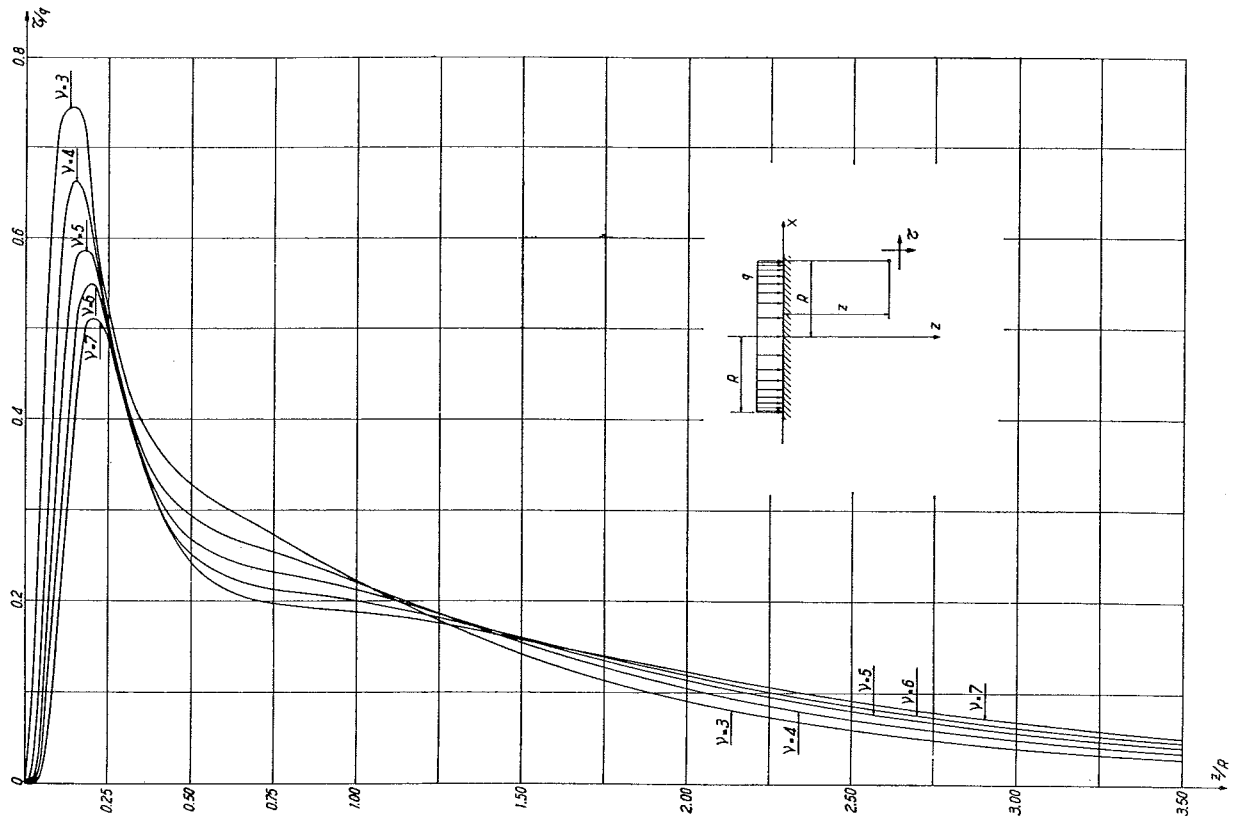


Fig. 6.

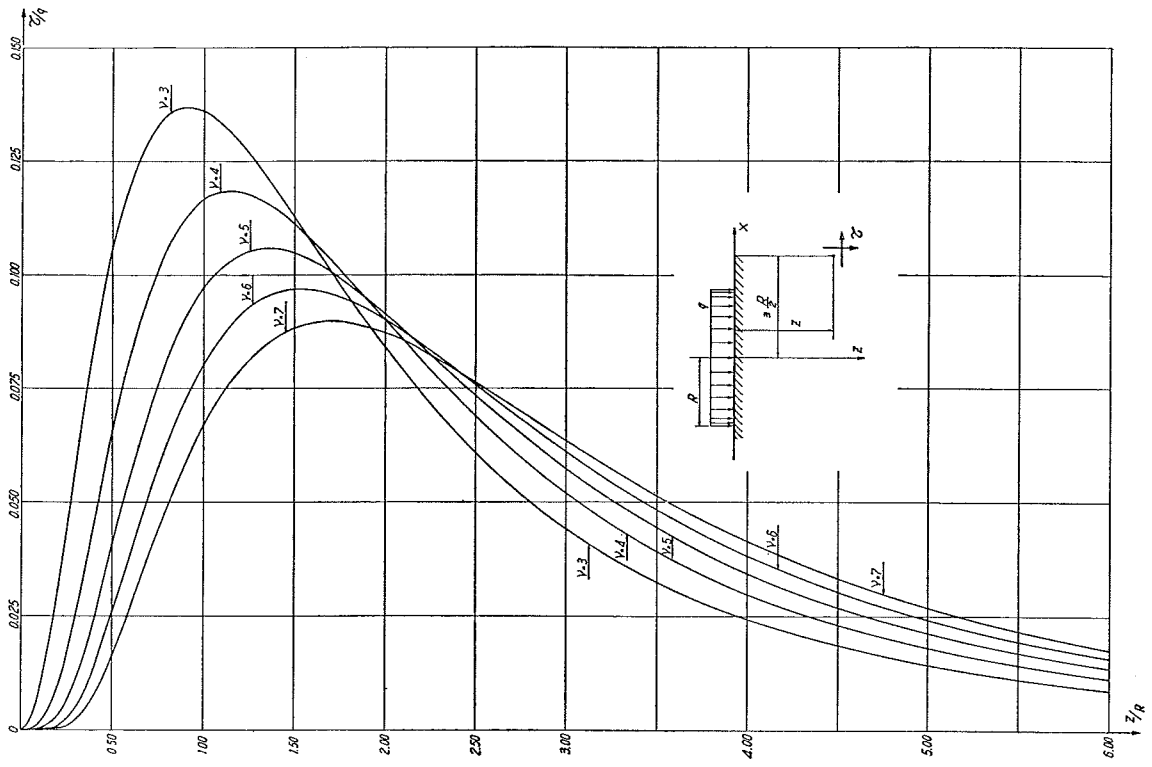


Fig. 7.

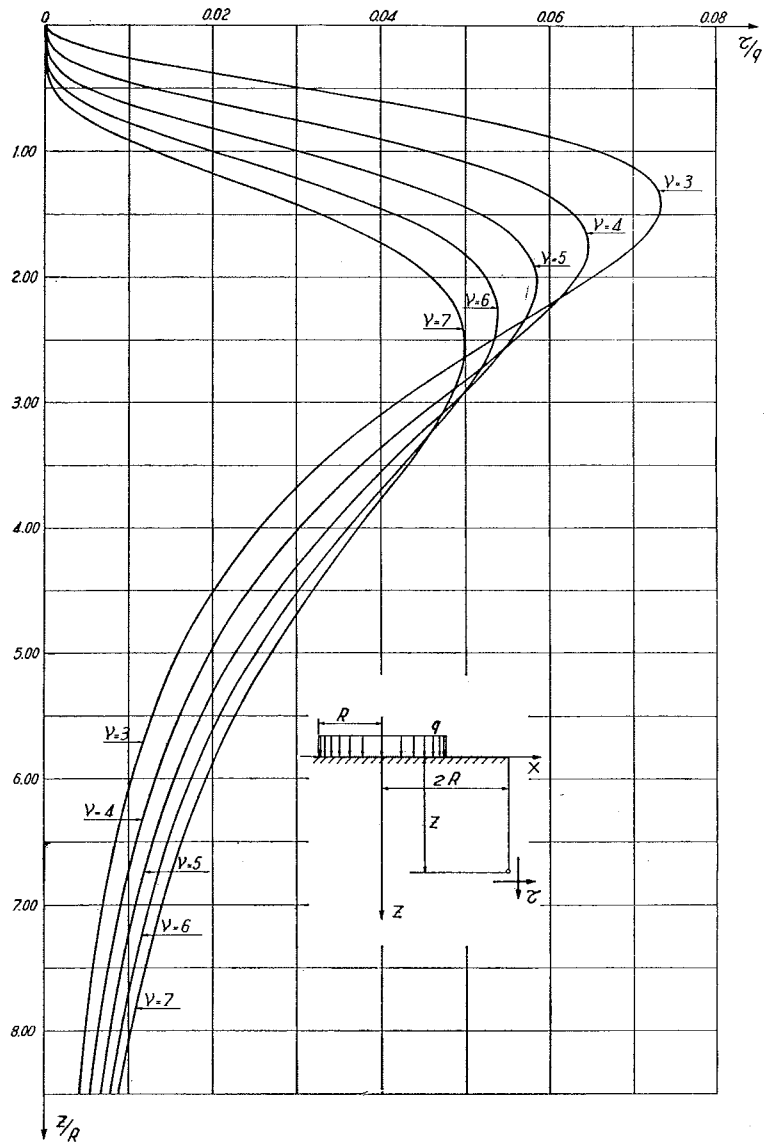


Fig. 8.

dove $k = v + 2/2$ è evidentemente un numero pari.

Tale integrale ammette come soluzione l'espressione:

$$\frac{r}{(3-2k)(r^2+z^2)^{k-1}} - \frac{z}{3-2k} + \left[r \sum_{t=1}^{k-1} \frac{(2k-3; -2; t-1)}{(k-1; -1; t)} \frac{1}{(2z^2)^t} \frac{1}{(r^2+z^2)^{k-t}} + \frac{(1; 2; k-1)}{(k-1)!(2z^2)^{k-1}} \frac{1}{z} \arcsin \frac{r}{(r^2+z^2)^{1/2}} \right] + C_1 \quad (5)$$

Per v dispari l'integrale (4) può essere scritto:

$$\int \frac{r^{2m}}{(r^2+z^2)^{k+1/2}} dr \quad \text{dove } m = 1.$$

Tale integrale ammette come soluzione l'espressione:

$$\left[\frac{1}{z^{2k-2m}} \binom{k-m-1}{t=1} (-1)^t \frac{1}{2m+2t+1} \binom{k-m-1}{t} \cdot \left(\frac{r^2}{r^2+z^2} \right)^{m+t+1/2} \right] + C_2 \quad (6)$$

Utilizzando le (5) e (6), con i limiti d'integrazione già precisati al paragrafo 2, si ottengono per i diversi valori di ν espressioni integrali della τ il cui calcolo numerico viene condotto mediante sviluppo in serie di TAYLOR.

I risultati ottenuti sono riportati nei grafici di fig. 4, 5, 6, 7, 8. Ognuno di questi rappresenta l'andamento delle tensioni tangenziali τ , rapportate al carico unitario q , con il crescere delle z , per punti che distano dall'asse dell'area di carico una frazione di R .

I valori delle τ crescono rapidamente da zero ad un valore massimo; questo non si presenta in alcun caso a profondità maggiore di $2,5 R$. Anzi, per i punti con ascissa compresa fra 0 e R , tale massimo si verifica a profondità minori di R .

I massimi valori delle tensioni si hanno per punti di ascissa $R/2$.

Per una data distanza dall'asse dell'area di carico, nei punti più vicini alla frontiera si hanno valori maggiori delle τ per i mezzi caratterizzati da bassi valori del fattore di concentrazione; ad una certa profondità (maggiore per i punti che distano maggiormente dall'asse z) si notano tensioni maggiori per i valori più alti del fattore di concentrazione. Per tali valori di ν si verifica quindi una distribuzione più uniforme delle τ lungo l'altezza.

Si nota una profondità alla quale la variazione del fattore di concentrazione praticamente non influenza lo stato di tensione; tale profondità va diminuendo per i punti che maggiormente distano dall'asse.

BIBLIOGRAFIA

- BOUSSINESQ J. (1885) - *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Paris.
- FADUM R. E. (1948) - *Influence values for estimating stresses in elastic foundations*. Proc. 2nd. Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. Rotterdam.
- FÖPPL A. (1897) - *Versuche über die Elastizität des Erdbodens*. Zentralbl. d. Bauverw.
- FRÖHLICH O. K. (1934) - *Druckverteilung im Baugrunde*. Springer, Wien.
- GRIFFITH J. H. (1929) - *The pressure under substructures*. Eng. Constr. 1.
- LORENZ H., NEUMEUER H. (1953) - *Spannungsberechnung infolge Kreislasten unter beliebigen Punkten innerhalb und ausserhalb der Kreisfläche*. Bautechnik 30, 127.
- LOVE A. E. H. (1929) - *The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of boundary*. Phil. Trans. Roy. Soc. A 228, London.
- MICHELL J. H. (1900) - *On some elementary distributions of stress in three dimensions; Elementary distributions of plane stress*. Math. Soc. Proc. 32, London.
- TERAZAWA K. (1916) - *On the elastic equilibrium of a semi-infinite solid*. Journ. Coll. Sci. 37.7. Tokyo.
- TERZAGHI K. (1925) - *Erdbaumechanik*. Wien.

SUMMARY

Shear stress induced by an uniform load acting on a circular area at the surface of a semi-infinite solid of the Fröhlich type.

Theoretical developments in soil mechanics are often based on the assumption that the soil behaves as an elastic, homogeneous and isotropic half-space; but experience shows large discrepancies between this assumption and actual behavior of natural soils.

A better approximation could be that suggested by GRIFFITH [1929] and FRÖHLICH [1934]. As it is well known, these Authors characterize the behavior of the half space by means of the so called «concentration index ν »; a value of $\nu = 3$ leads to the elastic half-space with Poissons's modulus $m = 2$;

values of $\nu = 4 \div 5$ seem to be suitable for dense sand and higher values ($6 \div 7$) for loose sands.

The A. has computed the values of the shear stress induced by uniform load acting on a circular area at the surface in various points of the half space, both below the loaded circle and outside. Computations cover values of ν ranging from 3 to 7.

The results are reported as non-dimensional graphs in fig. 4 to 8.

It may be noted that with increasing ν the stress distribution is more uniform with depth, the maximum value being attained at a depth never exceeding $2,5 R$. The absolute maximum occurs at a distance $R/2$ from the axis of the loaded circle.