

La progettazione delle travi di fondazione su suolo di Winkler

F. M. MAZZOLANI *

SOMMARIO: Dopo un breve esame delle ipotesi base della teoria di Winkler-Zimmermann, si discute la possibilità di sormontarne le ben note inconsistenze attraverso una opportuna scelta dei parametri in gioco nell'intento di ottenere soluzioni sufficientemente approssimate ai fini tecnici per i problemi strutturali connessi con le travi di fondazione.

Nello spirito di fornire alla progettazione un semplice e rapido strumento di calcolo per gli schemi di trave elastica di lunghezza finita su suolo di Winkler, sottoposta a forze e coppie concentrate, si sono tracciati i diagrammi rappresentativi delle complesse funzioni che intervengono nelle espressioni finali delle caratteristiche di spostamento e di sollecitazione.

L'utilizzazione pratica di tali diagrammi è messa in evidenza dalle applicazioni numeriche, che chiudono la nota.

1. Introduzione.

Fra le numerose teorie intese ad interpretare il comportamento delle strutture di fondazione, quella dovuta a WINKLER [1867] e ZIMMERMANN [1888], pur essendo senza dubbio la più approssimata, è tuttavia ancor oggi largamente utilizzata nella progettazione tecnica per le sue doti di applicabilità.

Tale teoria è basata — come è noto — sull'ipotesi non rigorosa che il terreno reagisca con una pressione uniforme in corrispondenza della zona caricata e proporzionale all'abbassamento; ciò corrisponde a schematizzare il terreno attraverso un insieme di molle elastiche indipendenti l'una dall'altra e dotate di eguale portanza.

Tale modello meccanico è stato oggetto di studio da parte di numerosi Autori [CESTELLI GUIDI, 1951; POZZATI, 1953; TERZAGHI, 1955; ZANABONI, 1955; FRANCIOSI, 1957; HETENY, 1958].

Tralasciando di esaminare gli studi che, assimilando il terreno ad un semispazio elastico (problema del Boussinesq), conducono a sviluppi teorici molto complessi, che rendono problematica ogni applicazione numerica [RAYMONDI, 1957-1959; VLASOV e LEON'TEV, 1966], nella letteratura tecnica si ritrovano numerose successive proposte formulate nell'intento di rendere più aderente alla realtà la schematizzazione meccanica di Winkler-Zimmermann.

A questo filone di studi appartiene la ben nota

teoria di WIEGHARDT [1922], cui corrisponde un mezzo elastico che può essere efficacemente interpretato attraverso una membrana tesa adagiata sul suolo di WINKLER [CAPURSO, 1965].

Recenti studi richiamano l'attenzione sul comportamento di un mezzo elastico ottenuto dalla sovrapposizione di quelli corrispondenti a WINKLER ed a WIEGHARDT [SOLLAZZO, MAURO, MELE, 1966].

Volendo tuttavia operare nell'ambito della teoria della trave elastica su suolo di WINKLER-ZIMMERMANN, può essere di conforto quanto contenuto in uno studio di TERZAGHI abbastanza recente [1955], nel quale l'Autore sostiene che pur non essendo affatto rigorose le ipotesi alla base della suddetta teoria, essa può essere convenientemente utilizzata per ottenere soluzioni approssimate di molti problemi pratici d'ingegneria. Il punto più importante e delicato, in vista di ottenere risultati ragionevolmente approssimati, è — a Suo avviso — la scelta accurata dei valori da assegnare alla costante di sottofondo che oltre a tener conto della natura del terreno non può risultare indipendente dalle dimensioni della zona caricata. Quest'ultima circostanza, normalmente trascurata dalla maggior parte degli studi sull'argomento, che si soffermano principalmente sugli aspetti analitici del problema, risulta determinante ai fini della bontà dell'approssimazione.

Da un punto di vista tecnico la progettazione delle travi di fondazione, eseguita in appoggio allo schema di trave elastica su suolo di WINKLER, richiede, pur nella sua semplicità rispetto ad altre schematizzazioni, sviluppi numerici molto laboriosi.

Tale laboriosità risulta ulteriormente aumentata se si considera nella progettazione la necessità di

* Dott. Ing. Federico Massimo MAZZOLANI, Assistente presso l'Istituto di *Tecnica delle Costruzioni* nella Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Napoli.

tener conto della presenza delle strutture sovrastanti la fondazione, procedendo attraverso schemi limite atti a definire superiormente ed inferiormente il comportamento reale del complesso « trave di fondazione - strutture in elevazione ».

Molto sentita da parte dei tecnici è in generale l'esigenza di disporre di uno strumento di calcolo semplice e rapido, che aiuti nella previsione del comportamento finale della struttura e che, nello stesso tempo, consenta di effettuare con immediatezza la estesa indagine numerica indispensabile per una progettazione corretta.

Numerosi Autori hanno fornito strumenti di calcolo aventi lo scopo di venire incontro a tale esigenza. Sono stati infatti proposti procedimenti iterativi [RAITHEL, 1951; BOSCOTRECASE, 1962]; sono state fornite espressioni semplificate per le caratteristiche in gioco o diagrammi od abachi diretti a risolvere qualche particolare schema di carico [POZZATI, 1953; BARBARITO, 1960; DODGE, 1964]; si è infine fatto ricorso a programmi per elaborati elettronici [FANELLI, 1957; BOSCOTRECASE, 1965].

In questo spirito, lo scopo della presente Nota è di fornire a mezzo di diagrammi una risoluzione completa e generale del problema tecnico-applicativo delle travi di fondazione.

Con riferimento allo schema di trave elastica di lunghezza finita su suolo di Winkler sottoposta a forze e coppie concentrate, i grafici qui presentati forniscono, in tutte le sezioni della trave, i valori numerici delle complesse funzioni che intervengono nelle espressioni finali delle caratteristiche di spostamento (w , φ), della sollecitazione (M , T) e della pressione sul terreno (σ_t).

Si sono prese in esame « lunghezze ideali » (αl) di trave, corrispondenti a tutte le possibili combinazioni « trave-terreno », comprese fra il caso di trave infinitamente rigida ed il caso di trave di lunghezza infinita.

Con l'ausilio di tali grafici si elimina la parte più lunga e faticosa del calcolo ed è possibile conseguire risultati agili e rapidi con estrema semplicità. Svincolato da complesse calcolazioni, il problema di verifica e di progetto delle travi di fondazione può essere in tal modo affrontato con maggiore serenità, conducendo inevitabilmente ad una progettazione più razionale.

2. Generalità sui criteri di progettazione.

Per una corretta applicazione della teoria di Winkler ai problemi strutturali delle fondazioni, particolare importanza riveste la scelta dei valori numerici da attribuire alla costante di sottofondo k

ed al momento d'inerzia J del corrispondente modello meccanico, affinché i risultati ottenuti nella progettazione della struttura reale forniscano sufficienti garanzie di attendibilità.

Per quanto riguarda il valore della costante di sottofondo k , esso può essere assegnato sulla base di un valore \bar{k} , relativo alla risposta del terreno caricato con una piastra di dimensioni standard $b \times b$, che può essere determinato come media di numerose prove di carico effettuate in sito.

Valori empirici di \bar{k} , relativi a sabbie ed argille preconsolidate sono riportati rispettivamente in tab. 1 e 2 [TERZAGHI, 1955]. In esse compaiono, accanto ai valori limite, i valori medi proposti per ciascun tipo di terreno. Attraverso tali valori, ottenuti per piastre quadrate di dimensioni $\sim 30 \times 30$ cm² (1 ft \times 1 ft) o per travi larghe ~ 30 cm (1 ft),

TABELLA 1 - Valori di \bar{k} (kg/cm³) per le sabbie.

Densità relativa della sabbia	Sciolta	Media	Densa
sabbia secca o umida (valori limite)	0,7 ÷ 2,1	2,1 ÷ 10,8	10,8 ÷ 36
sabbia secca o umida (valori proposti)	1,4	4,7	18
sabbia in acqua (valori proposti)	0,9	2,9	11

TABELLA 2 - Valori di \bar{k} (kg/cm³) per le argille preconsolidate.

Consistenza della argilla	Compatta	Molto compatta	Dura
valori della resistenza a compressione (kg/cm ²)	1 ÷ 2	2 ÷ 4	> 4
valori limite	1,8 ÷ 3,6	3,6 ÷ 7,2	7,2
valori proposti	2,7	5,4	10,8

è possibile risalire al valore della costante di sottofondo k , da introdurre nel calcolo, utilizzando le

seguenti formule semiempiriche proposte da Terzaghi:

$$\text{per le sabbie } k = \bar{k} \left(\frac{B + b}{2B} \right)^2$$

$$\text{per le argille } k = \bar{k} \frac{b}{B}$$

essendo B la larghezza della trave.

Tali formule sono valide fin tanto che le pressioni esercitate sul terreno dalla struttura di fondazione risultino inferiori alla metà del carico di rottura del terreno stesso: è questa una condizione largamente soddisfatta per i valori dei coefficienti di sicurezza usualmente adottati in fondazione.

In assenza di dati precisi o di determinazioni dirette è necessario assegnare per k un intervallo cautelativamente ampio, in cui sia con certezza contenuto l'effettivo comportamento del sistema « trave-terreno ». I valori corrispondenti agli estremi di tale intervallo si utilizzano in maniera da rendere massima ciascuna delle caratteristiche richieste.

Un altro aspetto meritevole di richiamo è connesso con l'influenza che le strutture in elevazione, generalmente collegate con la fondazione attraverso pilastri isolati, esercitano sul comportamento della fondazione stessa.

L'esame del complesso strutturale « trave di fondazione-strutture in elevazione » ha il preciso scopo di eliminare preventivamente gli effetti dannosi che un cedimento della fondazione può provocare sulle strutture sovrastanti, usualmente non preparate a questo evento. Questo esame non presenta in via teorica difficoltà particolari, ma richiede in pratica sviluppi numerici di una certa laboriosità, che da un punto di vista tecnico è possibile evitare, attraverso l'adozione di schemi limite, corrispondenti alle seguenti ipotesi:

a) S'immagina che la trave di fondazione e le travi in elevazione assumano puntualmente la stessa deformata: ciò è possibile solo se si ipotizza la presenza di una cortina continua di collegamento. In tal caso il comportamento dell'insieme strutturale è commisurato ad un momento d'inerzia J somma di quello della fondazione (J_f) e di quelli delle travi in elevazione (nJ_t). Tale valore di J rappresenta un limite superiore da assumere nella progettazione.

b) S'immagina che le travi in elevazione non intervengano affatto. In tal caso il momento d'inerzia cui riferire il comportamento dell'insieme coincide con quello (J_f) della trave di fondazione: esso rappresenta un limite inferiore ⁽¹⁾.

Il comportamento effettivo della trave di fondazione sarà in generale compreso tra quelli corrispondenti a tali situazioni limite e la progettazione potrà quindi essere condotta assumendo per J i valori estremi del seguente intervallo:

$$J_f < J < J_f + nJ_t,$$

utilizzati in maniera da rendere massime le caratteristiche della sollecitazione sul terreno e nella trave.

L'esigenza di progettare una fondazione rigida, che assorba ogni possibile perturbazione del terreno senza trasmetterla alle strutture in elevazione, fa sì che risulti opportuno contenere il rapporto:

$$\frac{J_f + nJ_t}{J_f}$$

entro valori di poco superiori all'unità (il valore uno corrisponde a fondazioni infinitamente rigide rispetto alle strutture in elevazione).

Ad un criterio di buona progettazione corrisponde quindi in pratica un intervallo molto ristretto per J .

3. Richiami teorici.

3.1. Immaginando il terreno costituito da molle elastiche indipendenti l'una dall'altra e dotate di eguale portanza, caratterizzata dalla costante di sot-

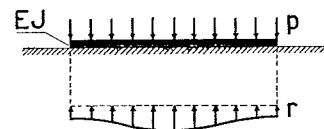


Fig. 1. - Trave elastica su suolo di Winkler.

to fondo k , l'equazione della linea elastica per una trave prismatica a sezione costante appoggiata per tutta la lunghezza sul mezzo elastico così definito (fig. 1), è la seguente:

$$EJ w^{IV} = p - Bkw, \quad (1)$$

che con la posizione:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{Bk}{4EJ}}, \quad (2)$$

diventa

$$w^{IV} + 4\alpha^4 w = p. \quad (3)$$

⁽¹⁾ Tale seconda ipotesi corrisponde effettivamente alla realtà quando, per particolari situazioni di geometria e di carico dello schema, i pilastri cedono tutti della stessa quantità, rendendo nulli per le travi gli spostamenti normali relativi.

Con l'intervento della seguente quaterna di funzioni:

$$\begin{aligned} A_{\alpha x} &= e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \\ B_{\alpha x} &= e^{-\alpha x} \sin \alpha x \\ C_{\alpha x} &= e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) \\ D_{\alpha x} &= e^{-\alpha x} \cos \alpha x \end{aligned} \quad (4)$$

l'integrazione della (3), unitamente al rispetto delle condizioni di vincolo, consente la risoluzione di qualsiasi schema di trave elastica su suolo elastico.

3.2. Per la trave di lunghezza finita la soluzione si può ottenere considerando agenti sulla trave di lunghezza infinita i carichi esterni, nonché le forze correttive (P_{oA} , P_{oB} , M_{oA} , M_{oB}) applicate nelle sezioni (A' e B'), corrispondenti agli estremi (A e B) della trave reale, e tali da annullare in dette sezioni le caratteristiche flettenti e taglianti (fig. 2).

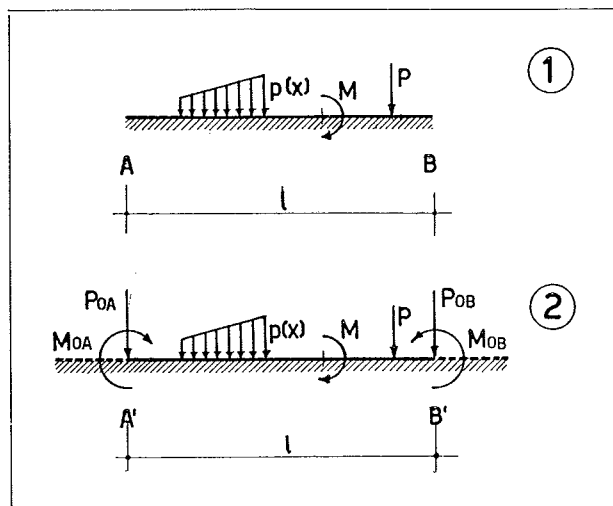


Fig. 2. - Soluzione per la trave di lunghezza finita: (1) la trave reale; (2) la trave ausiliaria di lunghezza infinita.

3.2.1. Nel caso in cui il carico esterno sia costituito da una forza concentrata $P = 1$, applicata in un punto generico della trave (fig. 3), la determinazione delle forze correttive si effettua risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} C_{\alpha a} + P_{oA} C_o + P_{oB} C_{\alpha(1-x)} + M_{oA} 2\alpha D_o + M_{oB} 2\alpha D_{\alpha(1-x)} = 0 \\ D_{\alpha a} - P_{oA} D_o + P_{oB} D_{\alpha(1-x)} - M_{oA} \alpha A_o + M_{oB} \alpha A_{\alpha(1-x)} = 0 \\ C_{\alpha(1-a)} + P_{oA} C_{\alpha a} + P_{oB} C_o - M_{oA} 2\alpha D_{\alpha a} + M_{oB} 2\alpha D_o = 0 \\ -D_{\alpha(1-a)} - P_{oA} D_{\alpha a} + P_{oB} D_o - M_{oA} \alpha A_{\alpha a} + M_{oB} \alpha A_o = 0 \end{cases} \quad (5)$$

che esprime l'annullamento del momento flettente e del taglio nelle sezioni di estremità A e B della trave in presenza del carico esterno e delle quattro forze correttive.

Le soluzioni del sistema (5) dipendono, per le (4), dalle caratteristiche geometrico-elastiche dell'insieme trave-terreno (α) e dalla posizione del carico (αa).

Attraverso le posizioni (2):

$$\begin{cases} r^{(P)} = \frac{1}{8} \left[A_{\alpha(a-x)} + P_{oA} A_{\alpha x} + P_{oB} A_{\alpha(1-x)} \right] + \frac{1}{4} \left[M_{oA} \alpha B_{\alpha x} + M_{oB} \alpha B_{\alpha(1-x)} \right] \\ f^{(P)} = \frac{1}{4} \left[\pm B_{\alpha(a-x)} - P_{oA} B_{\alpha x} + P_{oB} B_{\alpha(1-x)} + M_{oA} \alpha C_{\alpha x} - M_{oB} \alpha C_{\alpha(1-x)} \right] \\ m^{(P)} = \frac{1}{4} \left[C_{\alpha(a-x)} + P_{oA} C_{\alpha x} + P_{oB} C_{\alpha(1-x)} + 2 M_{oA} \alpha D_{\alpha x} + 2 M_{oB} \alpha D_{\alpha(1-x)} \right] \\ t^{(P)} = \frac{1}{2} \left[\pm D_{\alpha(a-x)} - P_{oA} D_{\alpha x} + P_{oB} D_{\alpha(1-x)} - M_{oA} \alpha A_{\alpha x} + M_{oB} \alpha A_{\alpha(1-x)} \right] \end{cases} \quad (6)$$

che esprimono analiticamente la sovrapposizione di cinque effetti — uno corrispondente ai carichi esterni e quattro relativi alle forze correttive — si perviene alle seguenti espressioni finali dell'abbassamento w , della rotazione φ , del momento flettente M e dello sforzo di taglio T per la trave di lunghezza finita, sottoposta ad una forza concentrata unitaria (cfr. fig. 3):

$$w^{(P)} = \frac{1}{E J \alpha^3} r^{(P)} ; \varphi^{(P)} = \frac{1}{E J \alpha^2} f^{(P)} ; M^{(P)} = \frac{1}{\alpha} m^{(P)} ; T^{(P)} = t^{(P)} ; \quad (7)$$

(2) Il doppio segno \pm relativo al primo termine delle $f^{(P)}$ e $t^{(P)}$, si riferisce rispettivamente a sezioni a sinistra ed a destra della forza applicata.

Il valore della sollecitazione sul terreno è fornito da

$$\sigma_t^{(P)} = w^{(P)} \cdot k. \quad (7)$$

3.2.2. Nel caso in cui il carico esterno sia costituito da una coppia concentrata $M = 1$, applicata in un punto generico della trave (fig. 4), il sistema atto alla determinazione delle forze correttive è il seguente:

$$\begin{cases} -2\alpha D_{\alpha a} + P_{oA} C_o + P_{oB} C_{\alpha 1} + M_{oA} 2\alpha D_o + M_{oB} 2\alpha D_{\alpha 1} + M_{oB} 2\alpha D_{\alpha 1} = 0 \\ -\alpha A_{\alpha a} - P_{oA} D_o + P_{oB} D_{\alpha 1} - M_{oA} \alpha A_o + M_{oB} \alpha A_{\alpha 1} + M_{oB} \alpha D_o = 0 \\ 2\alpha D_{\alpha(1-a)} + P_{oA} C_{\alpha 1} + P_{oB} C_o + M_{oA} 2\alpha D_{\alpha 1} + M_{oB} 2\alpha D_o + M_{oB} 2\alpha A_{\alpha 1} = 0 \\ -\alpha A_{\alpha(1-a)} - P_{oA} D_{\alpha 1} + P_{oB} D_o - M_{oA} \alpha A_{\alpha 1} + M_{oB} \alpha A_o + M_{oB} \alpha A_o = 0 \end{cases} \quad (8)$$

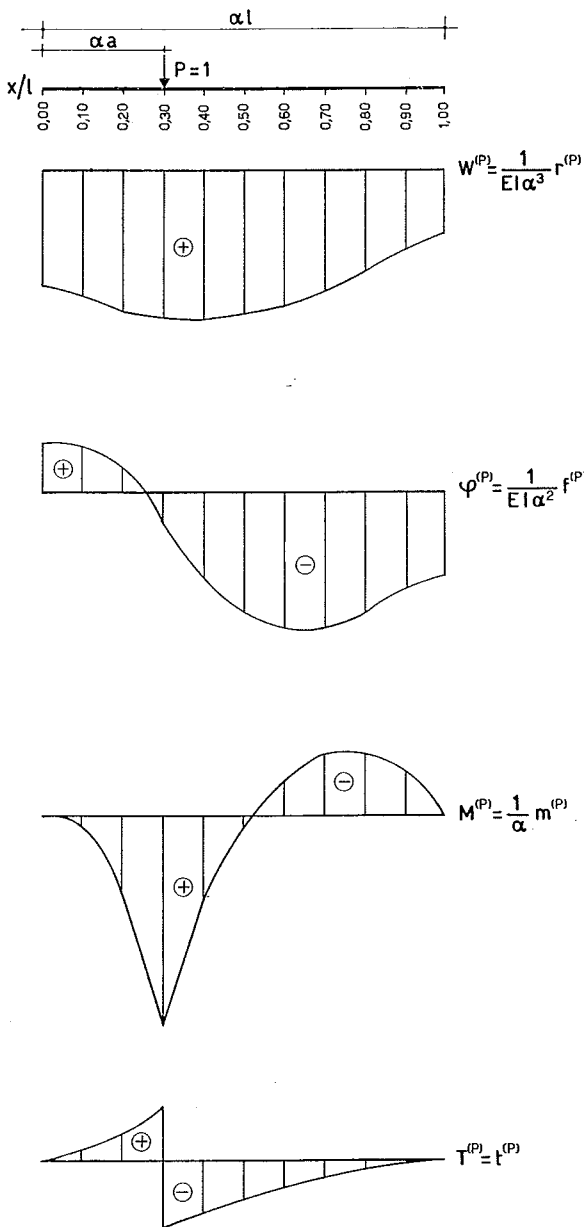


Fig. 3. - Diagrammi degli abbassamenti $w^{(P)}$, rotazioni $\varphi^{(P)}$, momenti flettenti $M^{(P)}$ e sforzi di taglio $T^{(P)}$ per effetto di una forza P agente sulla trave αl in una sezione generica αa .

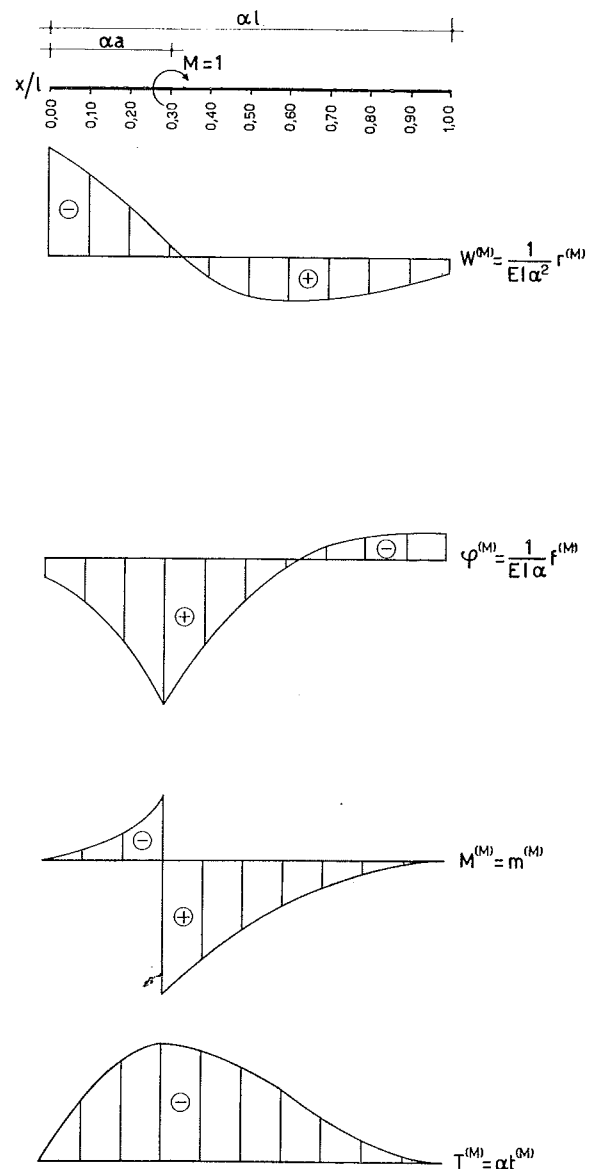


Fig. 4. - Diagrammi degli abbassamenti $w^{(M)}$, rotazioni $\varphi^{(M)}$, momenti flettenti $M^{(M)}$ e sforzi di taglio $T^{(M)}$ per effetto di una coppia M agente sulla trave αl in una generica sezione αa .

Procedendo in analogia al caso precedente, con le posizioni ⁽³⁾:

$$\begin{cases} r^{(M)} = \frac{1}{8} \left[P_{oA} A_{\alpha x} + P_{oB} A_{\alpha(1-x)} \right] + \frac{1}{4} \left[\pm \alpha B_{\alpha(a-x)} + M_{oA} \alpha B_{\alpha x} + M_{oB} \alpha B_{\alpha(1-x)} \right] \\ f^{(M)} = \frac{1}{4} \left[\alpha C_{\alpha(a-x)} - P_{oA} B_{\alpha x} + P_{oB} B_{\alpha(1-x)} + M_{oA} \alpha C_{\alpha x} - M_{oB} \alpha C_{\alpha(1-x)} \right] \\ m^{(M)} = \frac{1}{4} \left[\pm 2 \alpha D_{\alpha(a-x)} + P_{oA} C_{\alpha x} + P_{oB} C_{\alpha(1-x)} + M_{oA} 2 \alpha D_{\alpha x} + M_{oB} 2 \alpha D_{\alpha(1-x)} \right] \\ t^{(M)} = \frac{1}{2} \left[-\alpha A_{\alpha(a-x)} - P_{oA} D_{\alpha x} + P_{oB} D_{\alpha(1-x)} + M_{oA} \alpha A_{\alpha x} + M_{oB} \alpha A_{\alpha(1-x)} \right] \end{cases} \quad (9)$$

si perviene alle seguenti espressioni (cfr. fig. 4):

$$w^{(M)} = \frac{E J \alpha^2}{1} r^{(M)}; \quad \varphi^{(M)} = \frac{E J \alpha}{1} f^{(M)}; \quad M^{(M)} = m^{(M)}; \quad T^{(M)} = \alpha t^{(M)}; \quad \sigma_t^{(M)} = w^{(M)} \cdot k. \quad (10)$$

4. Impostazione dell'indagine numerica.

Le espressioni delle caratteristiche di spostamento e di sollecitazione per la trave di « lunghezza ideale » αl , caricata da una forza P (7) (fig. 3) e da una coppia M (10) (fig. 4) unitarie ed agenti in una posizione definita dall'ascissa adimensionale αa , sono costituite dal prodotto di due termini:

a) da una *costante dimensionale*, dipendente dalle caratteristiche geometrico-elastiche dello schema e di immediata risoluzione, una volta assegnati i valori numerici dei seguenti parametri:

- il modulo elastico del materiale costituente la trave (E);
- il momento d'inerzia della sua sezione trasversale (J);
- la larghezza della trave (B);
- la costante di sottofondo (k).

Tali parametri intervengono nell'espressione (2) che caratterizza, attraverso la « lunghezza ideale »:

$$L = \alpha l$$

il comportamento statico dell'insieme « trave-terreno »;

b) da una *funzione adimensionale* (6) e (9) variabile con l'ascissa adimensionale αx della trave

e dipendente dalla sua « lunghezza ideale » αl e dall'ascissa αa , che individua il punto di applicazione del carico. La determinazione numerica di tali funzioni risulta molto laboriosa, richiedendo preventivamente, per ogni possibile accoppiamento di αl ed αa , il calcolo delle funzioni (4) e la successiva risoluzione del sistema (5) o (8).

I valori numerici corrispondenti alle (6) o (9) sono stati ricavati con l'ausilio di un calcolatore elettronico, che ha utilizzato il programma di cui in fig. 5 è riportato il corrispondente diagramma di flusso ⁽⁴⁾.

L'indagine numerica è stata estesa a « lunghezze ideali » di trave comprese fra 1 e 10. Tali valori rappresentano rispettivamente un limite superiore per travi che si comportano come infinitamente rigide con deformata rettilinea ed un limite inferiore per travi che, atteso il notevole smorzamento delle caratteristiche, si comportano come di lunghezza illimitata. Detto intervallo contiene quindi tutti i possibili casi di trave elastica di lunghezza finita.

I carichi esterni (forze e coppie concentrate) si sono considerati agenti nelle posizioni ottenute suddividendo la lunghezza αl della trave in dieci parti uguali. Tale suddivisione si è ritenuta soddisfacente per le applicazioni tecniche.

I risultati della indagine numerica sono contenuti nei grafici riportati in calce alla Nota. Essi, in

⁽³⁾ Il doppio segno \pm che compare nelle $r^{(M)}$ ed $m^{(M)}$ si riferisce rispettivamente a sezioni a sinistra ed a destra della coppia applicata.

⁽⁴⁾ Il calcolo è stato eseguito presso il Centro di Calcolo Elettronico dell'Università di Napoli.

TABELLA 3

SEZIONE	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
effetto di $P_1 (P_1 \times r(P))$	+ 25.000	+ 17.500	+ 11.500	+ 6.500	+ 2.750	+ 500	- 1.000	- 2.000	- 2.250	- 2.500	- 2.750
effetto di $P_2 (P_2 \times r(P))$	- 3.600	- 2.000	- 500	+ 1.200	+ 3.600	+ 6.000	+ 9.000	+ 12.000	+ 14.800	+ 16.800	+ 18.800
effetto di $P_1 + P_2$	+ 21.400	+ 15.500	+ 11.000	+ 7.700	+ 6.350	+ 6.500	+ 8.000	+ 10.000	+ 12.550	+ 14.300	+ 16.050
$w(P)$	0,0509	0,0369	0,0262	0,0183	0,0151	0,0154	0,0190	0,0238	0,0298	0,0340	0,0382
effetto di $M (M \times r(M))$	- 10.000	- 5.000	- 1.600	+ 600	+ 1.800	+ 2.200	+ 2.200	+ 1.800	+ 1.400	+ 1.000	+ 400
$w(M)$	- 0,0141	- 0,0070	- 0,0022	+ 0,0008	+ 0,0025	+ 0,0031	+ 0,003	+ 0,0025	+ 0,0020	+ 0,0014	+ 0,0005
$w_{tot} = w(P) + w(M)$	0,0368	0,0299	0,0240	0,0191	0,0176	0,0185	0,0221	0,0263	0,0318	0,0354	0,0387
effetto di $P_1 (P_1 \times m(P))$	0,000	- 10.500	- 15.200	- 15.500	- 13.500	+ 10.300	- 7.000	- 4.000	- 1.900	- 400	0,000
effetto di $P_2 (P_2 \times m(P))$	0,000	- 500	- 1.950	- 3.550	- 4.650	- 4.600	- 2.800	+ 3.000	+ 12.400	+ 3.200	0,000
effetto di $P_1 + P_2$	0,000	- 11.000	- 17.150	- 19.050	- 18.150	- 14.900	- 9.800	- 1.000	+ 10.500	+ 2.800	0,000
$M(P)$	0,000	- 18.590	- 28.985	- 32.195	- 30.675	- 25.181	- 16.562	- 1.690	+ 17.745	+ 4.730	0,000
effetto di $M (M \times m(M))$	0,000	+ 18.400	+ 15.200	+ 11.400	+ 7.900	+ 5.000	+ 2.700	+ 1.200	+ 500	+ 100	0,000
$M_{tot} = M(P) + M(M)$	0,000	- 190	- 13.785	- 20.795	- 22.775	- 20.181	- 13.862	- 490	+ 18.245	+ 4.830	0,000
effetto di $P_1 (P_1 \times t(P))$	- 50.000	- 24.000	- 6.500	+ 3.500	+ 9.000	+ 11.000	+ 10.500	+ 9.000	+ 6.500	+ 3.500	0,000
effetto di $P_2 (P_2 \times t(P))$	0,000	- 4.000	- 5.600	- 4.800	- 3.200	+ 2.000	+ 10.400	+ 22.500	+ 40.000	- 20.000	0,000
$T(P)$	- 50.000	- 28.000	- 12.100	- 1.300	+ 5.800	+ 13.000	+ 20.900	+ 31.500	+ 46.500	- 16.500	0,000
effetto di $M (M \times t(M))$	0,000	- 9.000	- 12.400	- 12.600	- 11.000	- 8.600	- 6.000	- 3.600	- 2.000	- 600	0,000
$T(M)$	0,000	- 5.330	- 7.340	- 7.460	- 6.510	- 5.090	- 3.550	- 2.130	- 1.180	- 355	0,000
$T_{tot} = T(P) + T(M)$	- 50.000	- 33.330	- 19.440	- 8.760	- 710	+ 7.910	+ 17.350	+ 29.370	+ 45.320	- 16.855	0,000

relazione alla posizione ed al tipo di carico ⁽⁵⁾, forniscono in corrispondenza di tutte le sezioni della trave i valori adimensionali delle quattro funzioni b) [(6) o (9)] al variare di αl . La variazione assunta per αl è tale da consentire una comoda in-

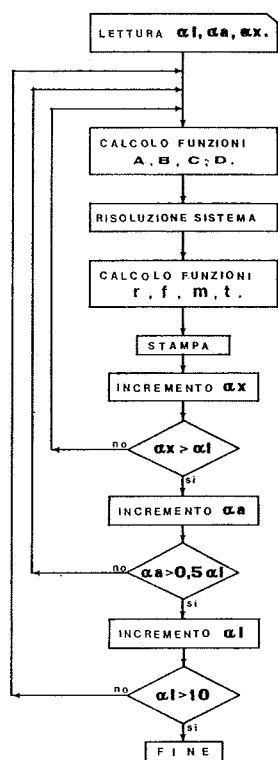


Fig. 5. - Diagramma di flusso.

terpolazione. I diagrammi relativi a ciascuna quaterna di funzioni (6) o (9), letti nella scala corrispondente al valore numerico della costante dimensionale a (vedi anche figg. 3 e 4), rappresentano rispettivamente i diagrammi degli abbassamenti (w), delle rotazioni (φ) e delle caratteristiche flettenti (M) e taglianti (T). Nelle applicazioni che seguono si esemplifica l'utilizzazione di tali grafici al calcolo delle travi di fondazione.

5. Applicazioni.

5.1. Si considera la trave di fondazione caricata nell'estremo di sinistra da una forza $P_1 = 50$ t e da una coppia $M = 20$ tm ed a 1 m dall'estremo di destra da una forza $P_2 = 80$ t (fig. 6).

⁽⁵⁾ I grafici possono essere comodamente individuati da una lettera che indica il tipo di carico unitario e da un numero che ne individua il corrispondente punto di applicazione:

[P, 0] ; [P, 1] ; [P, 2] ;
[M, 0] ; [M, 1] ; [M, 2] ;

Le caratteristiche geometrico-elastiche dello schema sono le seguenti:

$$\begin{aligned} J &= 10,03 \times 10^6 \text{ cm}^4 \text{ (6)} ; \\ E &= 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2 ; \\ B &= 200 \text{ cm} ; \\ l &= 500 \text{ cm} ; \\ k &= 50 \text{ kg/cm}^3 ; \\ \alpha &= 5,92 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1} ; \\ L &= 2,96 . \end{aligned}$$

I coefficienti dimensionali di cui al punto 4 a, contenuti nelle espressioni delle caratteristiche ricercate, valgono:

per l'abbassamento:

$$\frac{l}{E J \alpha^3} = 0,238 \times 10^{-5} \frac{\text{Kg}}{\text{cm}} \quad (\text{caso della forza})$$

$$\frac{l}{E J \alpha^2} = 0,141 \times 10^{-5} \frac{\text{Kgm}}{\text{cm}} \quad (\text{caso della coppia})$$

per il momento flettente:

$$\frac{l}{\alpha} = 1,69 \frac{\text{Kgm}}{\text{Kg}} \quad (\text{caso della forza})$$

$$1 \frac{\text{Kgm}}{\text{Kgm}} \quad (\text{caso della coppia})$$

per il taglio:

$$1 \frac{\text{Kg}}{\text{Kg}} \quad (\text{caso della forza})$$

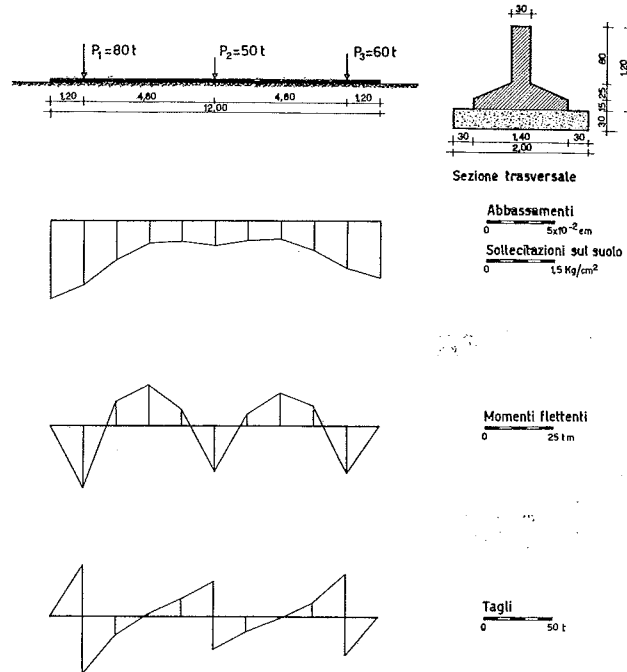
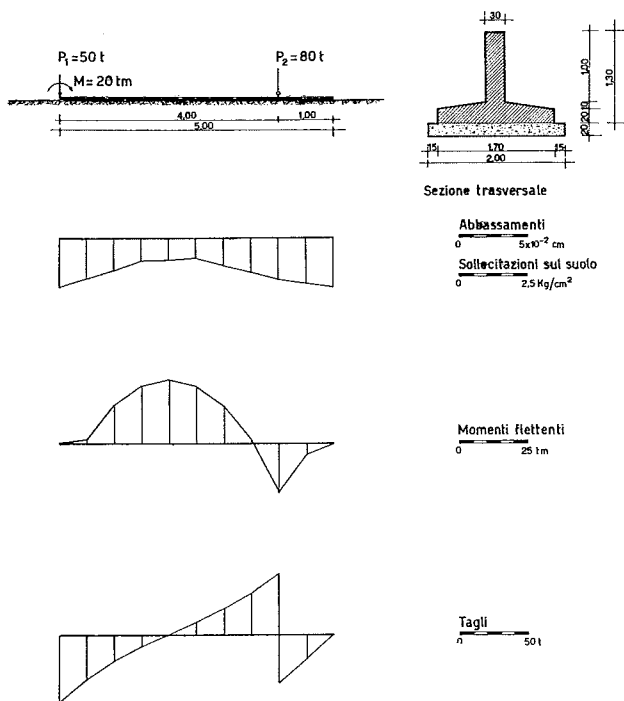
$$\alpha = 0,592 \frac{\text{Kg}}{\text{Kgm}} \quad (\text{caso della coppia})$$

Si utilizzano i grafici [P, 0] per P_1 , [P, 2] (corrispondente per simmetria a [P, 8]) per P_2 , e [M, 0] per M . La sovrapposizione degli effetti dei tre carichi, effettuata in corrispondenza delle sezioni in cui è suddivisa la trave, è riportata in tab. 3.

I valori finali degli abbassamenti dei momenti flettenti e degli sforzi di taglio, ottenuti dai valori letti sui grafici, amplificati per l'entità del carico e moltiplicati per i rispettivi coefficienti dimensionali precedentemente valutati sono riportati in fig. 6.

5.2. Per lo schema di trave di fondazione riportato in fig. 7 le caratteristiche geometrico-elastiche sono le seguenti:

⁽⁶⁾ Il momento d'inerzia della sezione trasversale è stato valutato come somma dei momenti d'inerzia della trave ($J' = 9,90 \times 10^6 \text{ cm}^4$) e della sottotrave ($J'' = 0,13 \times 10^6 \text{ cm}^4$).



- $J = 8,27 \times 10^6 \text{ cm}^4$;
- $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$;
- $B = 200 \text{ cm}$;
- $l = 1200 \text{ cm}$;
- $k = 30 \text{ kg/cm}^3$;
- $\alpha = 5,49 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$;
- $L = 6,60$.

I coefficienti dimensionali valgono:

$$\text{per l'abbassamento: } \frac{l}{E J \alpha^3} = 0,365 \times 10^{-5} \frac{\text{cm}}{\text{Kg}}$$

$$\text{per il momento flettente: } \frac{l}{\alpha} = 1,83 \frac{\text{Kgm}}{\text{Kg}}$$

$$\text{per il taglio: } l \frac{\text{Kg}}{\text{Kg}}$$

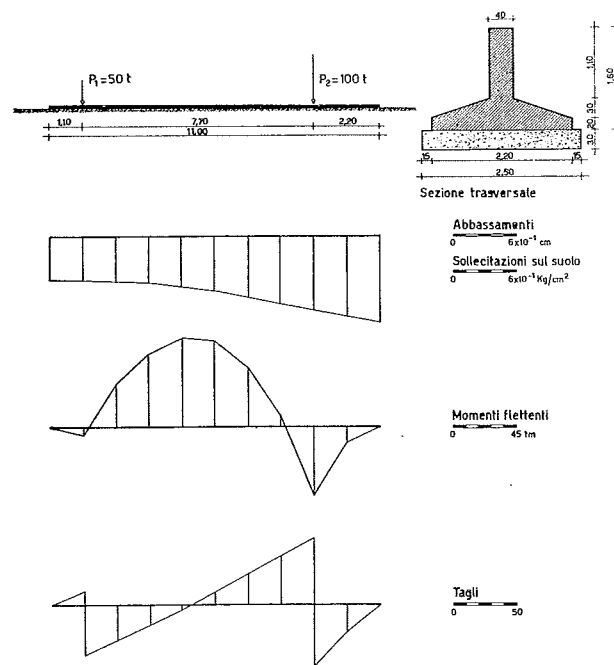
I valori finali degli abbassamenti, momenti flettenti e tagli, ottenuti attraverso i grafici [P, 1] e [P, 5] in analogia con l'esempio precedente, sono direttamente riportati in fig. 7⁽⁷⁾.

5.3. Per lo schema di trave di fondazione di fig. 8, le caratteristiche geometrico-elastiche sono:

- $J = 27,30 \times 10^6 \text{ cm}^4$;
- $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$;
- $B = 250 \text{ cm}$;
- $l = 1100 \text{ cm}$;
- $k = 1 \text{ kg/cm}^3$;
- $\alpha = 1,83 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$;
- $L = 2,00$.

Procedendo in analogia ai casi precedenti, dopo aver valutato i coefficienti dimensionali, si sono utilizzati i grafici [P, 1] e [P, 2].

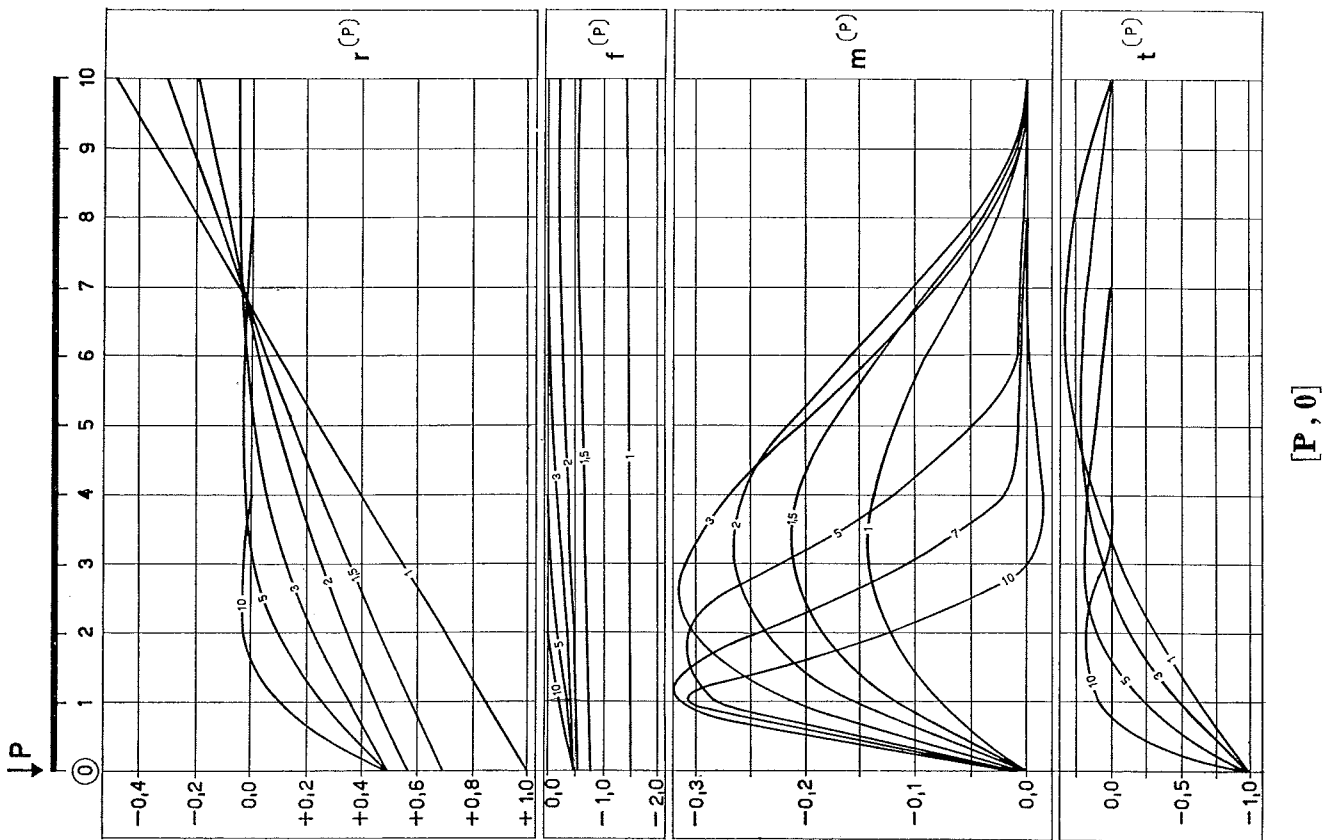
I valori finali degli abbassamenti, momenti flettenti e tagli sono riportati in fig. 8.



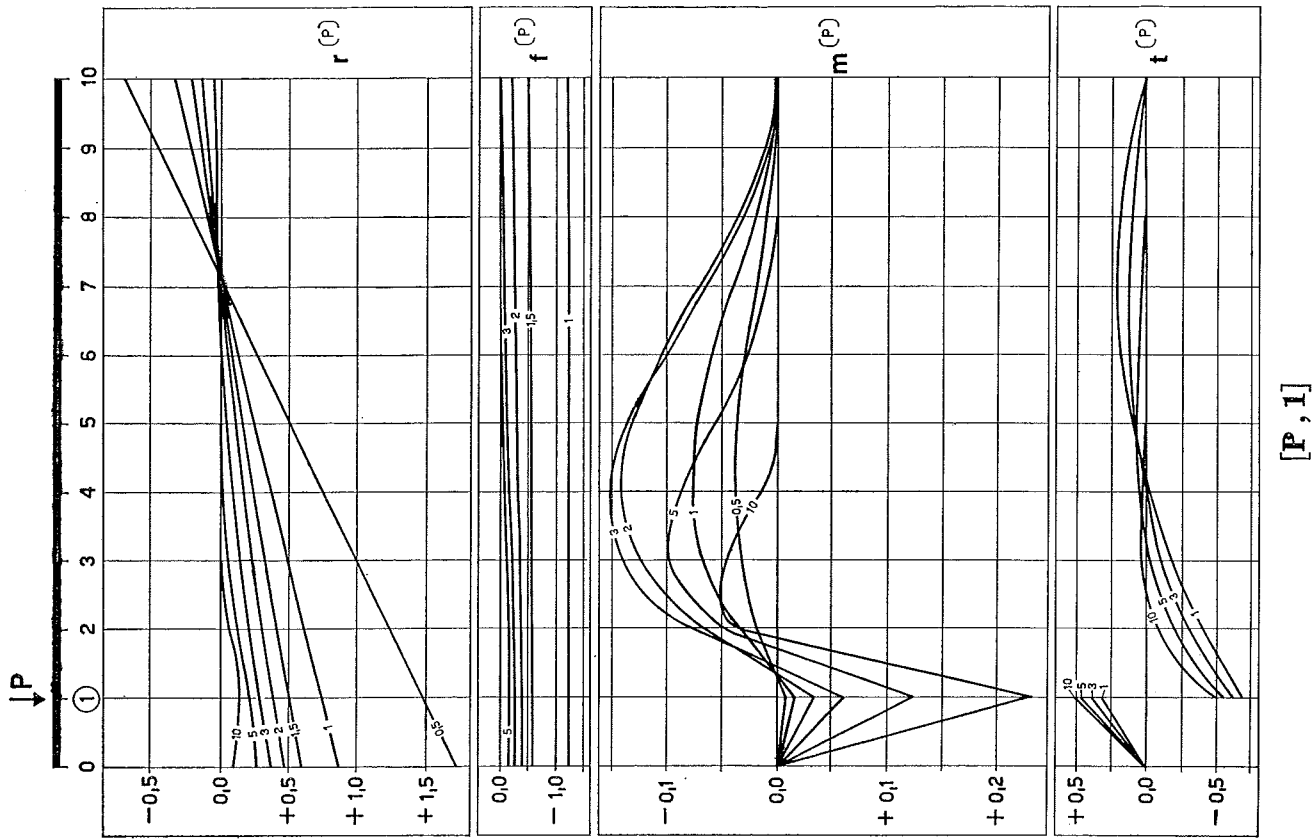
⁽⁷⁾ Il presente esempio utilizza uno schema praticamente coincidente con quello esaminato da PAGANO («Strutture», vol. I, pag. 700) a meno di lievi variazioni delle posizioni dei carichi.

SIMBOLOGIA

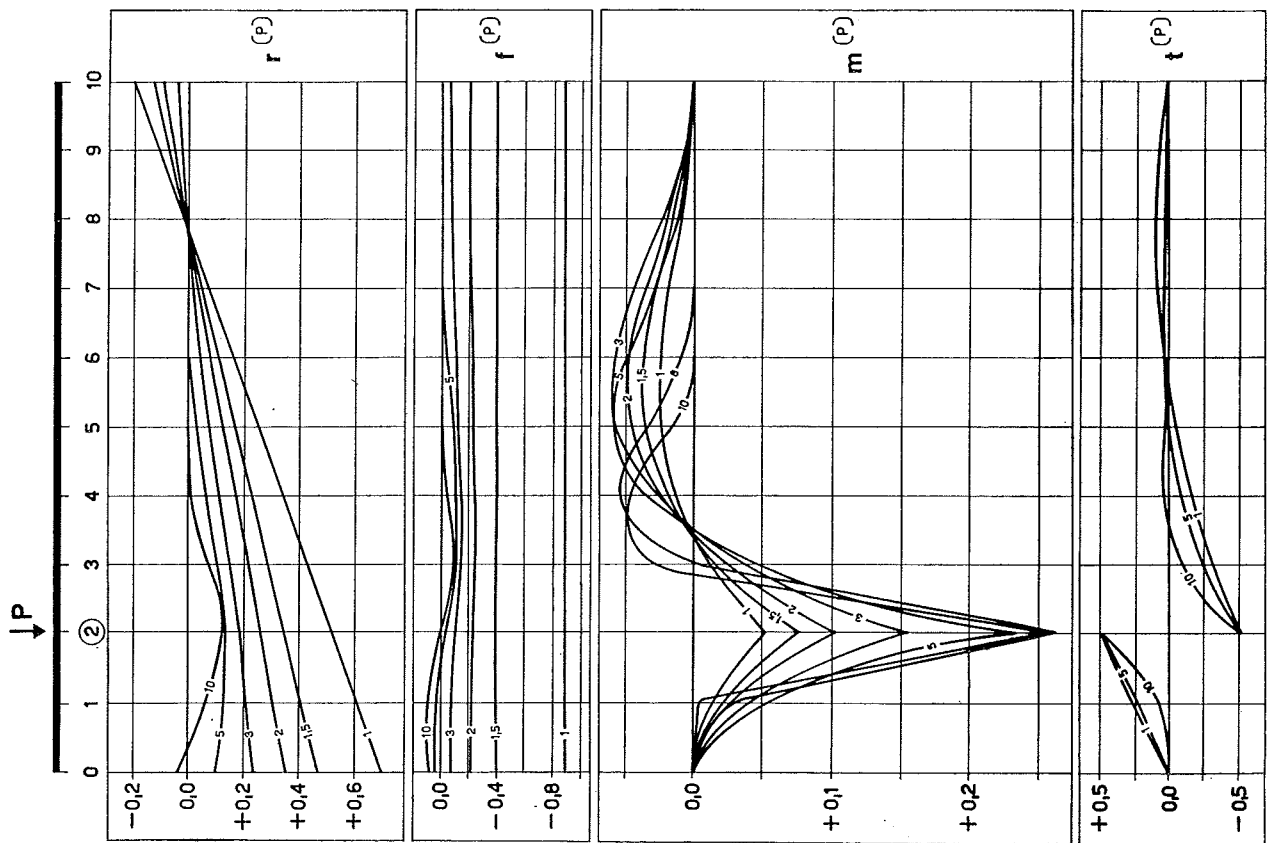
a	ascissa della trave che individua il punto di applicazione del carico (P, M) concentrato	[L]
$A_{\alpha x}, B_{\alpha x}, C_{\alpha x}, D_{\alpha x}$	funzioni dell'ascissa adimensionale αx della trave	[0]
b	larghezza della piastra o della trave standard utilizzate per la determinazione di k	[L]
B	larghezza della trave	[L]
k	costante di sottofondo	[F L ⁻³]
\bar{k}	valore base della costante di sottofondo, ottenuto attraverso prove standard sul terreno	[F L ⁻³]
E	modulo elastico del materiale costituente la trave	[F L ⁻²]
J	momento d'inerzia della sezione trasversale della trave	[L ⁴]
l	lunghezza reale della trave	[L]
L	lunghezza ideale della trave	[0]
M	coppia concentrata in una sezione generica della trave	[F L]
M_{oA}, M_{oB}	coppie correttive applicate nelle sezioni di estremità della trave per il passaggio dalla trave di lunghezza infinita alla trave di lunghezza finita	[FL]
$M(P), (M(M))$	momento flettente in una sezione generica della trave per effetto di una forza P (coppia M) concentrata	[F L]
p	carico ripartito sulla trave	[F L ⁻¹]
P	forza concentrata in una sezione generica della trave	[F]
P_{oA}, P_{oB}	forze correttive applicate nelle sezioni di estremità della trave per il passaggio dalla trave di lunghezza infinita alla trave di lunghezza finita	[F]
$r(P), f(P), m(P), t(P)$	funzioni dell'ascissa adimensionale αx che intervengono nella risoluzione della trave di lunghezza finita sottoposta ad una forza concentrata P	[0]
$r(M), f(M), m(M), t(M)$	funzioni dell'ascissa adimensionale αx che intervengono nella risoluzione della trave di lunghezza finita sottoposta ad una coppia concentrata M	[0]
$T(P), (T(M))$	sfuerzo di taglio in una sezione generica della trave per effetto di una forza P (coppia M) concentrata	[F]
$w(P), (w(M))$	abbassamento di una sezione generica della trave per effetto di una forza P (coppia M) concentrata	[L]
α	caratteristica geometrico-elastica dello schema « trave-suolo »	[L ⁻¹]
$\varphi(P), (\varphi(M))$	rotazione di una sezione generica della trave per effetto di una forza P (coppia M) concentrata	[0]
x	ascissa di riferimento per la trave	[L]
$\sigma_t(P), (\sigma_t(M))$	sollecitazione sul terreno in un punto generico della trave per effetto di una forza P (coppia M) concentrata	[F L ⁻²]



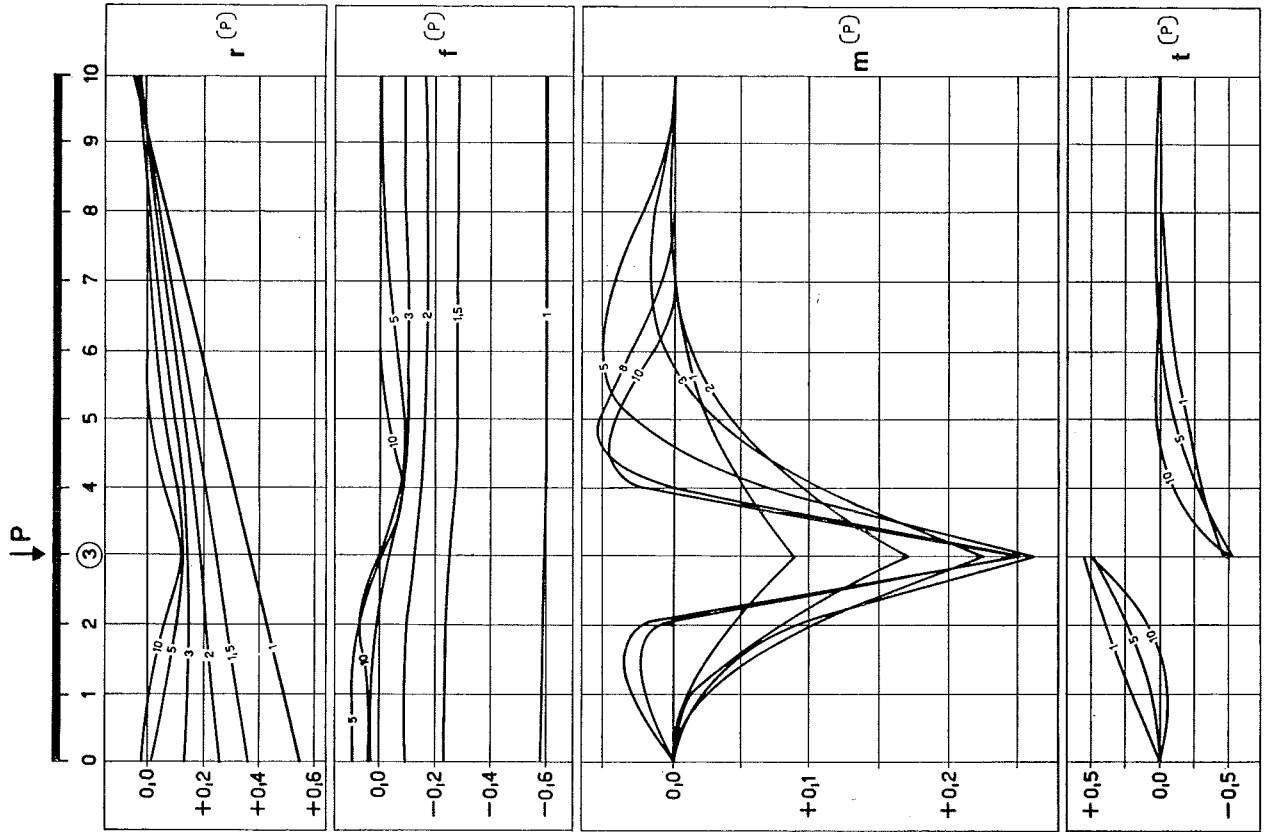
[P, 0]



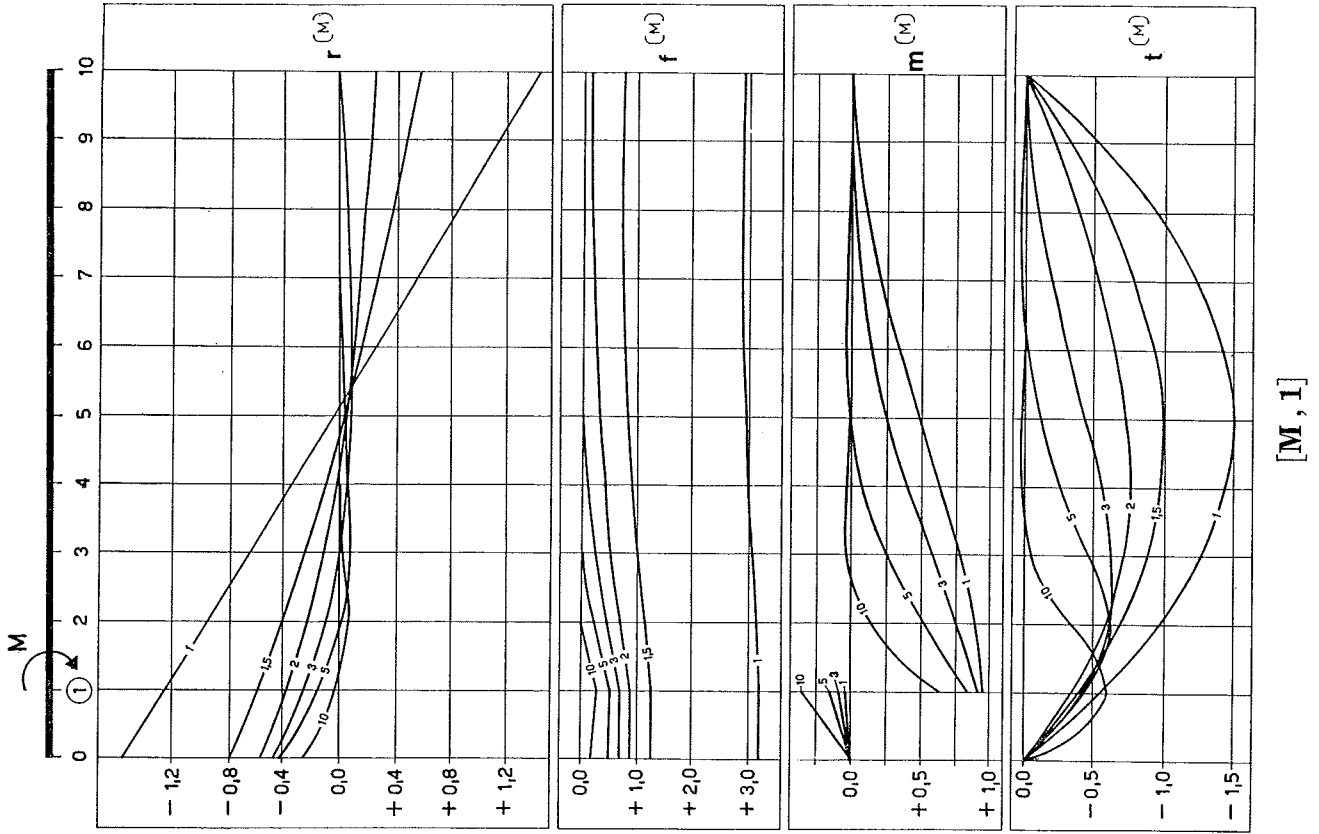
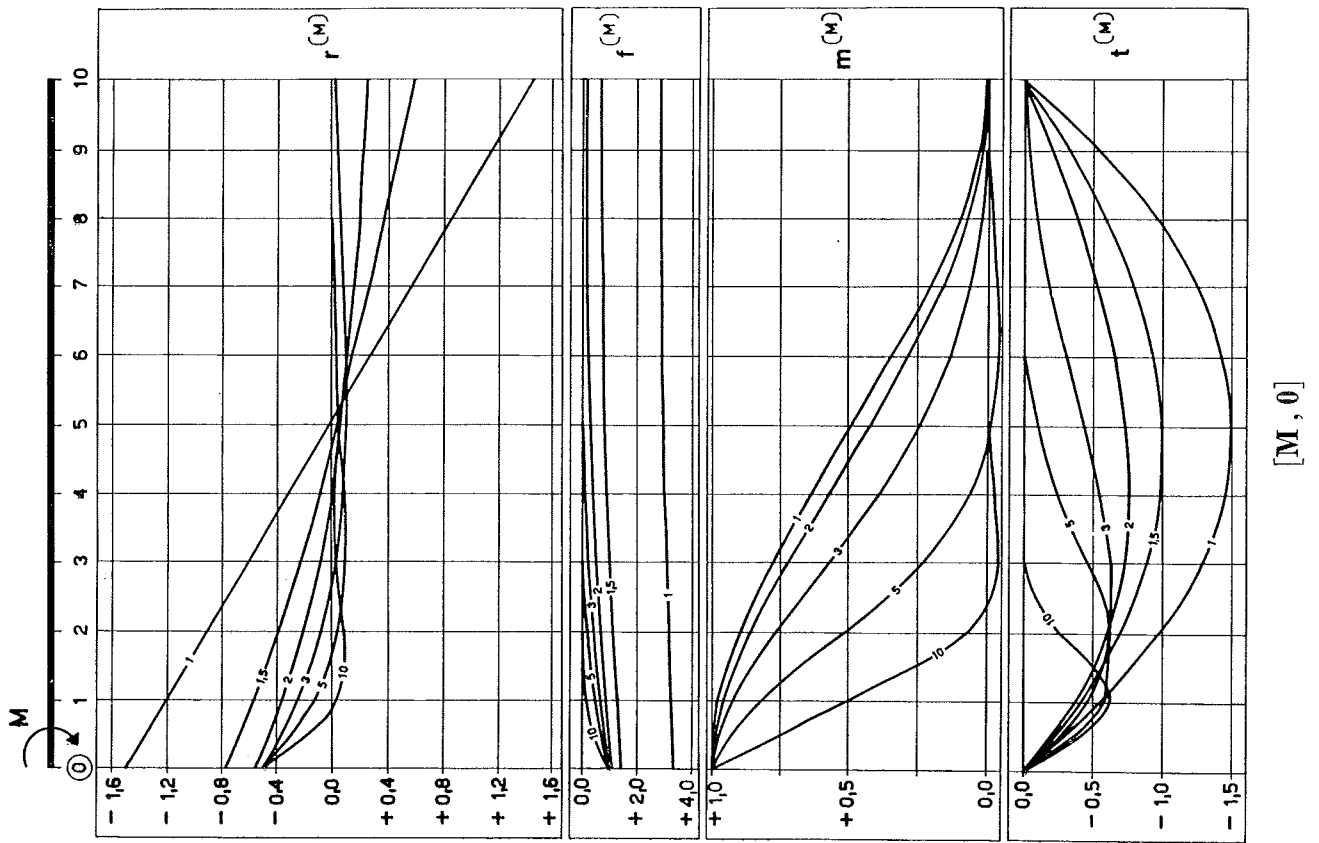
[P, 1]

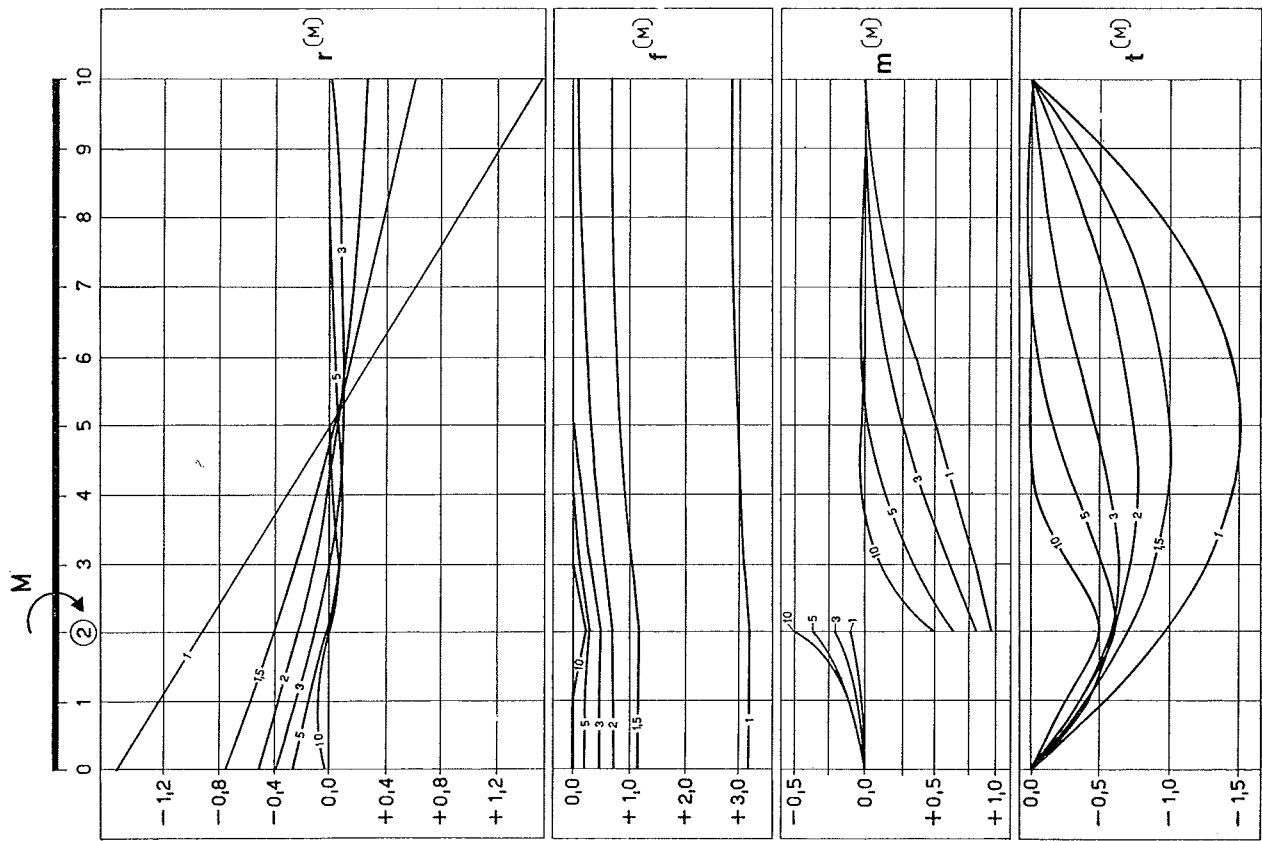


[P, 2]

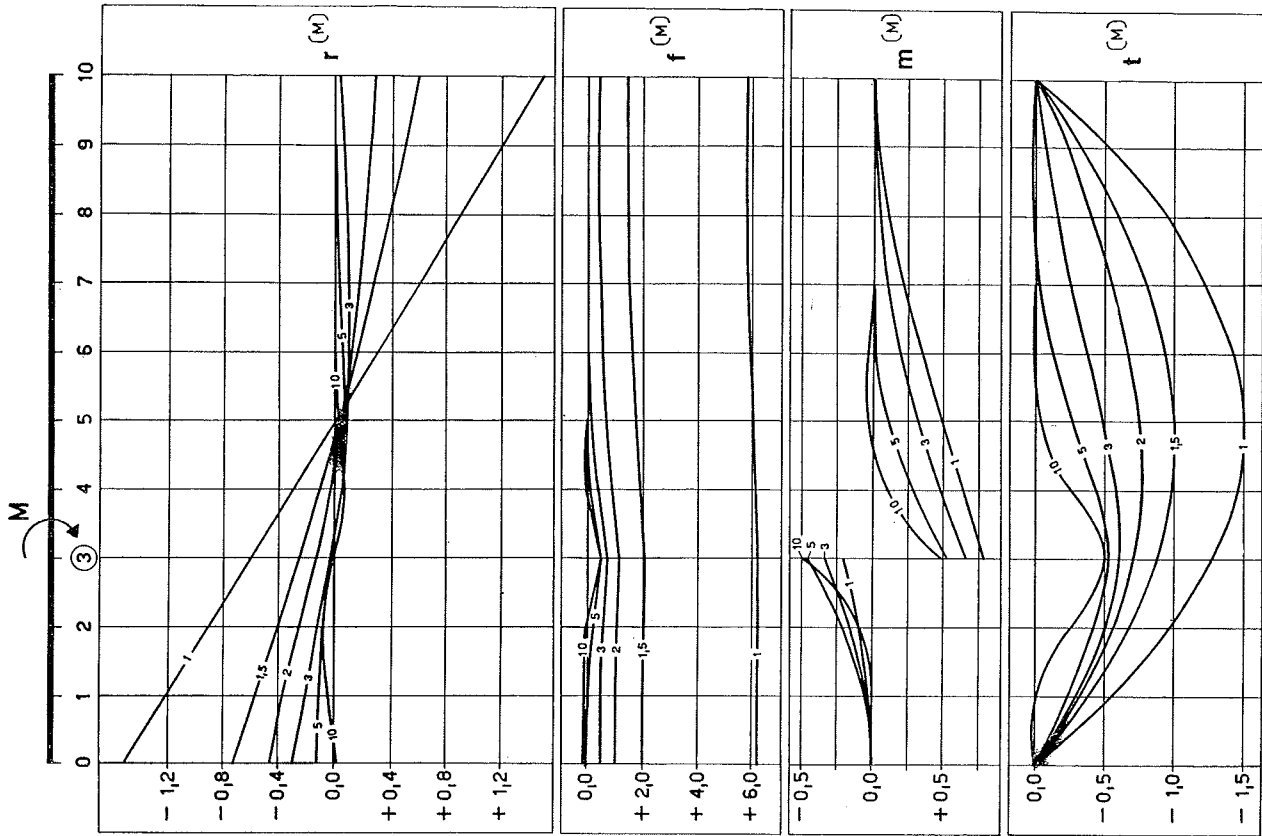


[P, 3]

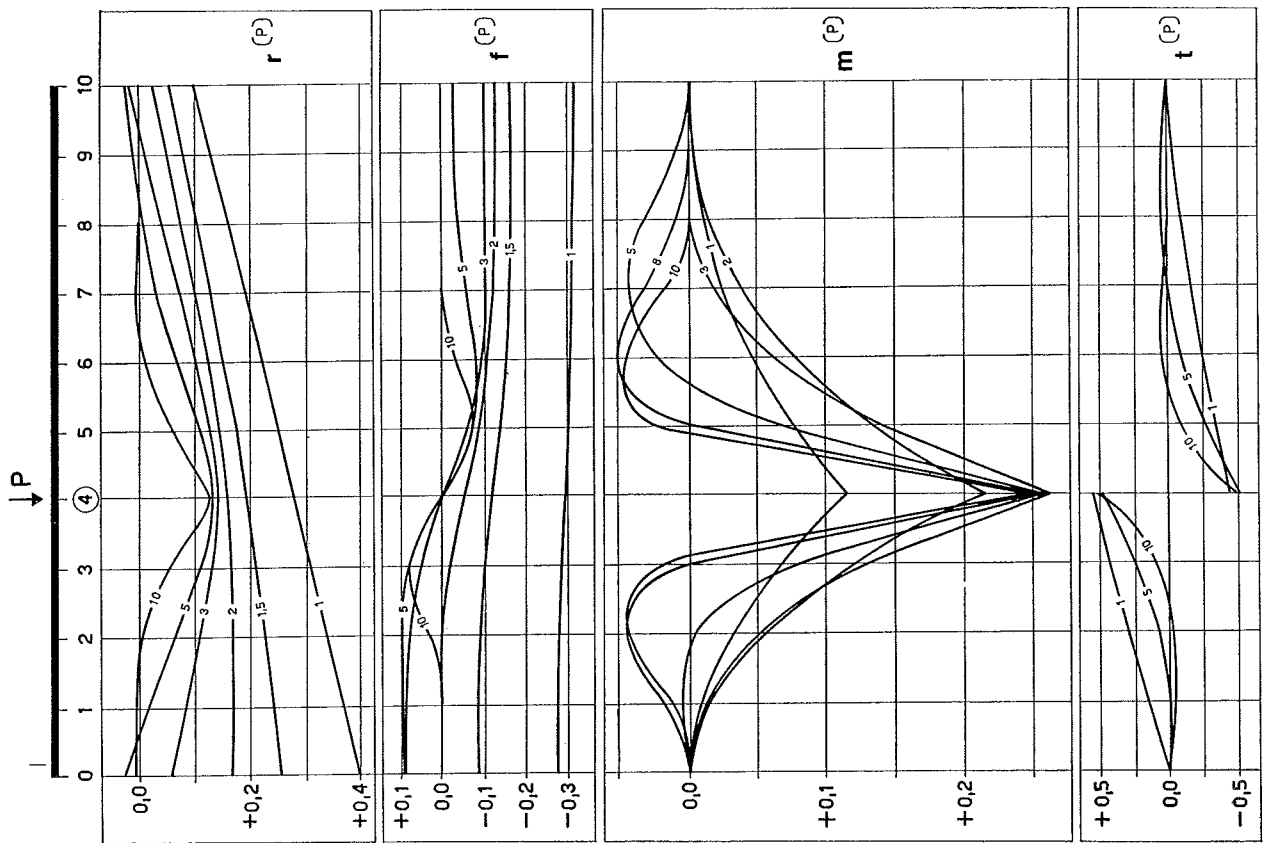




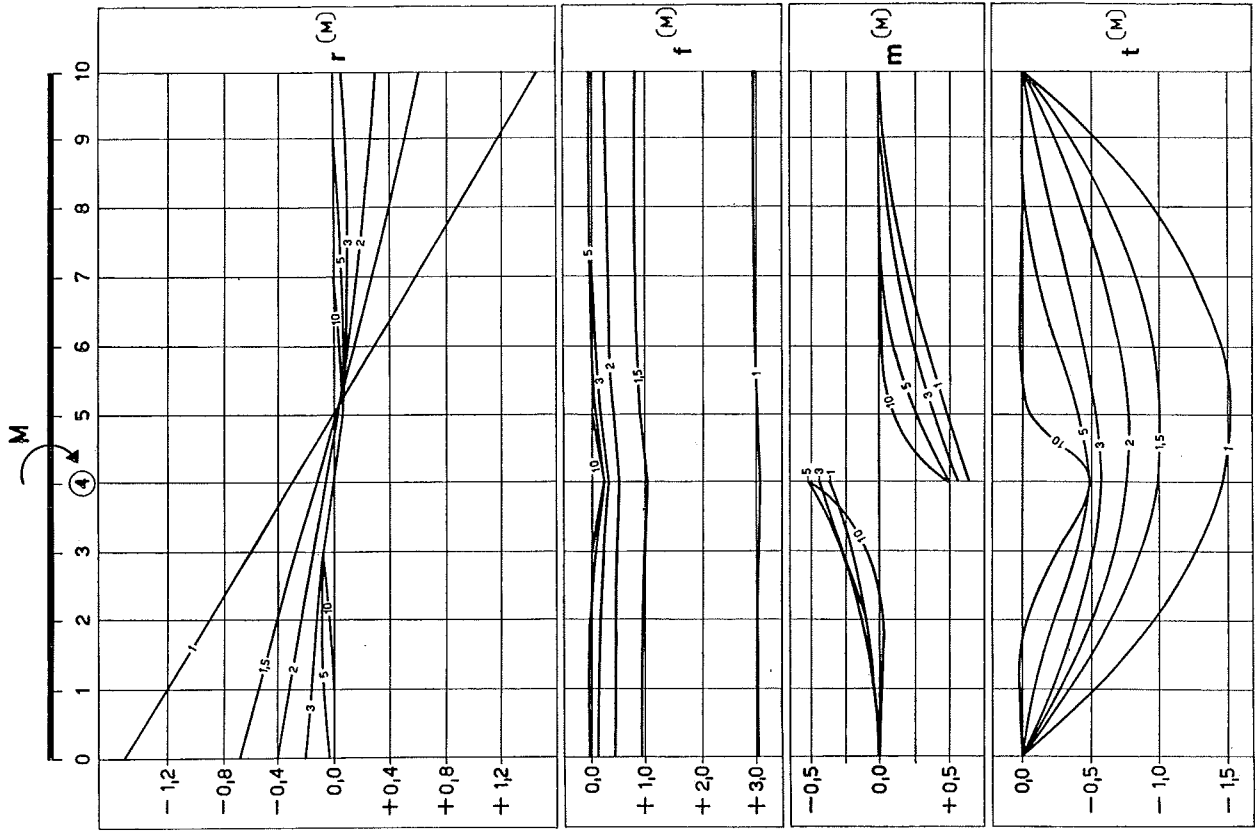
[M, 2]



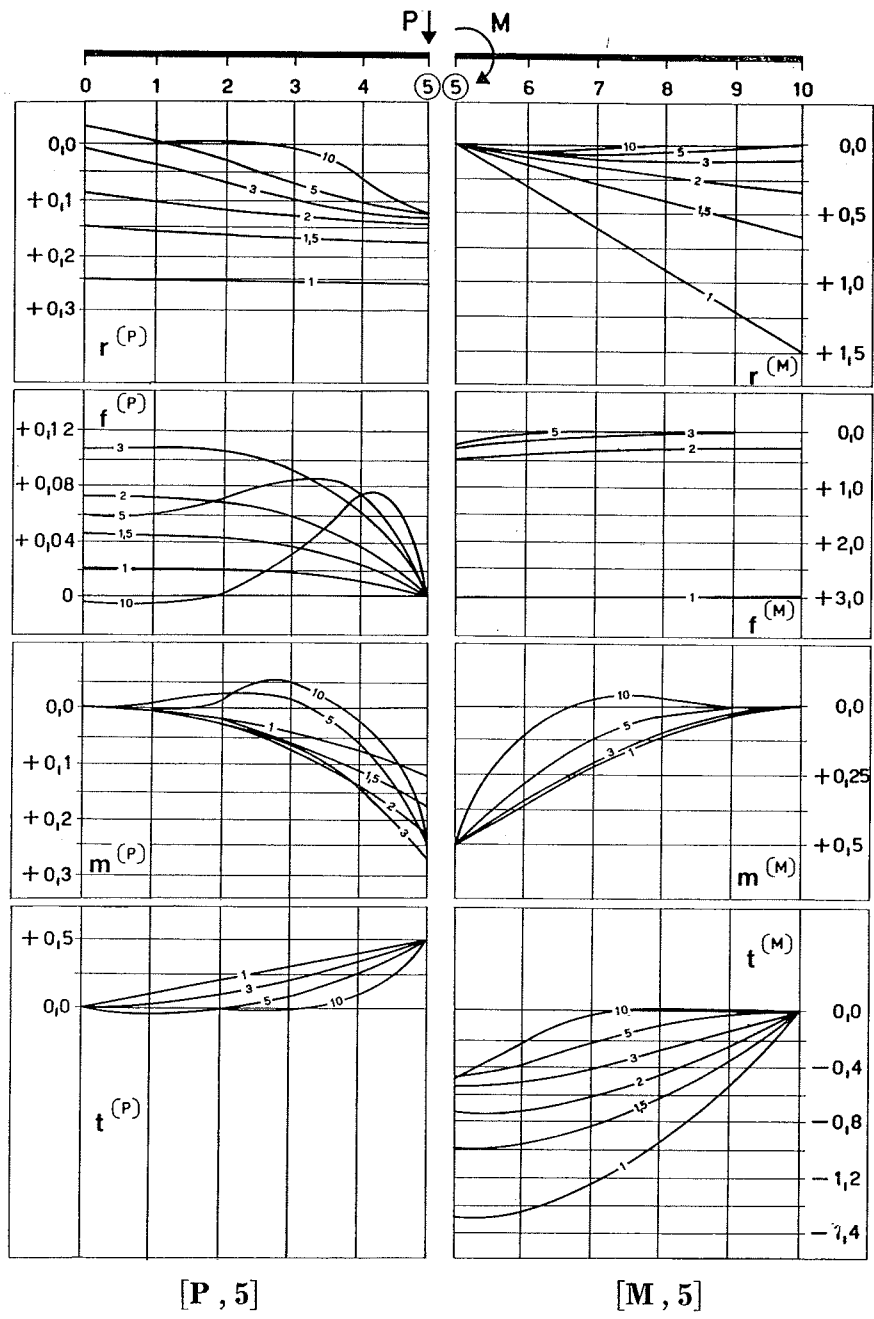
[M, 3]



[P, 4]



[M, 4]



BIBLIOGRAFIA

- BARBARITO B. (1959) - *Calcolo semplificato della trave su mezzo elastico*. L'Ingegnere, n. 10.
- BARBARITO B. (1960) - *Le linee d'influenza della trave su mezzo elastico*. Atti Fondaz. Politecn. del Mezzogiorno.
- BOSCOTRECASE L. (1962) - *Sul calcolo delle travi e dei reticoli di travi su mezzo elastico*. Tecnica Italiana, novembre.
- BOSCOTRECASE L. (1965) - *Travi e reticoli di travi su mezzo elastico risolte con l'ausilio di un elaboratore elettronico*. L'Ingegnere, n. 3.
- CAPURSO M. (1965) - *Sul calcolo delle travi di fondazione su suolo di Wiegardt*. La Ricerca Scientifica..
- CAPURSO M. (1965) - *Sul calcolo delle strutture di fondazione su suolo di Wiegardt generalizzato*. La Ricerca Scientifica.
- CESTELLI GUIDI C. (1951) - *Meccanica del terreno e stabilità delle fondazioni*. Hoepli, Milano.
- DODGE A. (1964) - *Influence function for beams on elastic foundations*. Journal of the Structural Division, vol. 90, n. ST4, agosto.
- FANELLI E. (1957) - *Trave di lunghezza finita su suolo elastico*. Giornale del Genio Civile, aprile-maggio.
- FRANCIOSI V. (1957) - *Contributo allo studio delle travi su mezzo elastico*. L'Ingegnere, n. 4.
- HETENY M. (1958) - *Beams on elastic foundation*. Univ. of Michigan, Studies Scientif. Series, vol. XVI.
- MAURO A. (1966) - *Una soluzione della trave su appoggio elastico continuo*. Ist. Sc. di Costr., n. 56, Trieste.
- MAZZOLANI F. M. (1964) - *Una generalizzazione del problema della trave su suolo elastico e sue applicazioni attraverso un calcolatore elettronico*. Giornale del Genio Civile, marzo.
- MELE M. (1966) - *Proprietà e determinazione dei parametri caratteristici di un nuovo modello di fondazione*. Tecnica Italiana, n. 9.
- PAGANO M. (1963) - *Strutture*. Vol. I, Ed. Liguori, Napoli.
- POZZATI P. (1953) - *Metodi per il calcolo delle fondazioni*. Zanichelli, Bologna.
- RAITHEL A. (1951) - *Un metodo di iterazione per la trave su mezzo elastico*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli.
- RAYMONDI C. (1957) - *Sul problema delle travi con appoggio elastico continuo*. Atti dell'Ist. di Sc. di Costr., n. 57, Pisa.
- RAYMONDI C. (1959) - *Complementi allo studio della trave su suolo elastico*. Atti dell'Ist. di Sc. d. Costr., n. 65, Pisa.
- SOLLAZZO A. (1966) - *Un'interpretazione meccanica di un modello di fondazione*. Ist. Sc. di Costr., n. 57, Trieste.
- SOLLAZZO A. (1966) - *Equilibrio della trave su suolo di Wiegardt*. Tecnica Italiana, n. 4.
- TERZACHI K. (1955) - *Evaluation of coefficients of subgrade reaction*. Géotechnique.
- VLASOV V. Z., LEONT'EV N. N. (1966) - *Beams, plates and shells on elastic foundations*. Israel Progr. for Scient. Transl. Jerusalem.
- WIEGHARDT K. (1922) - *Über den Balken auf nach giebigiger Unterlage*. Zeitschrift für Angewandte - Mathematik und Mechanik.
- ZANABONI O. (1955) - *Soluzione abbreviata della trave su suolo elastico*. Ingegneria Ferroviaria.

SUMMARY

The design of beams on Winkler subsoil

The A. briefly discusses the hypothesis on which the simple Winkler-Zimmermann theory of beams on elastic foundation is based, pointing out their inconsistencies, but also the usefulness of the theory in practical design work, provided adequate values of the coefficient of subgrade reaction are selected.

Referring to a finite-length elastic beam, the A. has calculated the values of displacements w , rotations φ , bending moments M , shear forces T and soil pressure σ_v , induced in all the sections of the beam by concentrated unit loads (P) (fig. 3) and moments (M) (fig. 4) acting on the beam in sections equally spaced at 1/10 of its length.

The results are given in form of graphs and, by super-

position, they may be used to study the beam acted upon by quite general loads and moments distribution (see tables [P, 0] to [P, 5] and [M, 0] to [M, 5]).

The range of values of « ideal lengths » αl explored, corresponds to all possible « beam-soil » combination, including the infinitely stiff beam ($\alpha l \leq 1$) and the beam of infinite length ($\alpha l \geq 10$).

Numerical calculations have been carried out by an electronic computer; a flow chart is given in fig. 5.

The graphs greatly simplify and speed up the design work, completely eliminating the most tedious numerical calculations. It is believed that their use will lead to a more rational design of the foundation beams.

Some numerical examples are given to introduce the reader to the use of the graphs.