

Sullo stato plastico in un terreno sollecitato da un carico inclinato uniformemente distribuito su di una retta del piano limite *

R. JAPPELLI **

SOMMARIO: Si ricercano l'andamento e l'estensione delle zone in stato plastico in un terreno di fondazione con piano limite orizzontale sollecitato da un carico inclinato uniformemente distribuito su di una retta e da un carico verticale uniformemente distribuito su tutto il piano.

Il problema viene trattato associando la condizione di plasticità di RANKINE alle espressioni delle tensioni indotte nel sottosuolo dai carichi applicati, nell'ipotesi che questo sia un semispazio elastico, isotropo ed omogeneo.

Si discute l'equazione risolutiva e si pone in luce l'influenza, che esercitano sulla forma e sulla estensione delle zone plastiche vari fattori, fra i quali la coesione e l'angolo d'attrito del terreno, l'intensità e la direzione del carico lineare. Nella ipotesi che la retta di azione del carico lineare sia verticale si ritrova, come caso particolare, la soluzione che del problema ha già fornito O. FRÖHLICH nel 1934.

Nelle tavole si riportano, infine, le curve direttrici delle superfici che, nelle ipotesi ammesse, delimitano nel sottosuolo i domini degli stati elastico e plastico, tracciate per varie combinazioni dei valori dei parametri.

1. — Le moderne costruzioni, che vengono attuate per scopi e con criteri sempre nuovi e diversi, trasmettono ai terreni di fondazione sistemi di carichi, che si vanno differenziando sempre più da quelli tradizionali.

Così come avviene per il calcolo delle strutture in elevazione, anche nei riguardi del terreno è necessario, perciò, estendere ed adeguare continuamente alle nuove esigenze i metodi di calcolo di cui si dispone.

Da questo punto di vista, uno dei problemi più frequenti e forse meno conosciuti si presenta per lo studio del comportamento del terreno sollecitato da carichi, la cui risultante non sia normale al piano di posa della fondazione, come avviene, ad esempio, nel caso dei muri di sostegno e delle traverse di sbarramento.

È ben noto, infatti, che le componenti orizzontali dei carichi modificano profondamente la distribuzione delle tensioni nel sottosuolo e che esse, pertanto, non possono essere trascurate nei calcoli geotecnici; tuttavia, non appena si abbandona l'ipotesi semplice del carico verticale, si introducono in

questi calcoli complicazioni ed incertezze notevoli.

Per portare un contributo all'argomento è sembrato opportuno, perciò, iniziarne lo studio con la considerazione di qualche caso semplice, che, sebbene corrisponda ad una situazione limite astratta, possa poi servire di guida per la trattazione di casi più complessi, ma aventi un più preciso riferimento alla realtà.

Seguendo questo indirizzo, si prende in esame, nella presente nota, il comportamento di un terreno di fondazione con piano limite orizzontale sollecitato da un carico inclinato uniformemente distribuito su di una retta del piano limite e si studia, per questa condizione piana di carico, quale sia l'andamento delle zone plastiche nel terreno medesimo al variare dell'intensità e dell'inclinazione del carico, nonché dei parametri che caratterizzano il materiale.

2. — Con riferimento alla fig. 1, il carico sia distribuito sulla retta con intensità uniforme s e la sua linea d'azione sia inclinata dell'angolo α rispetto all'orizzontale.

Per maggiore generalità si supponga, inoltre, che il piano limite sia anche sollecitato da un carico uniformemente distribuito di intensità γh .

Il terreno abbia dovunque un peso dell'unità di volume γ ; la sua resistenza al taglio sia caratterizzata nel diagramma σ, τ da una retta limite di parametri c e φ , che indicano, rispettivamente, la coesione e l'angolo d'attrito.

* Ricerca svolta con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche nel Centro Geotecnico della Sicilia, presso l'Istituto d'Irradiazione dell'Università di Palermo.

** Prof. Ing. Ruggiero JAPPELLI, L.D. Inc. di *Tecnica delle Fondazioni e Costruzioni di Terra (Geotecnica)* nella Università di Palermo.

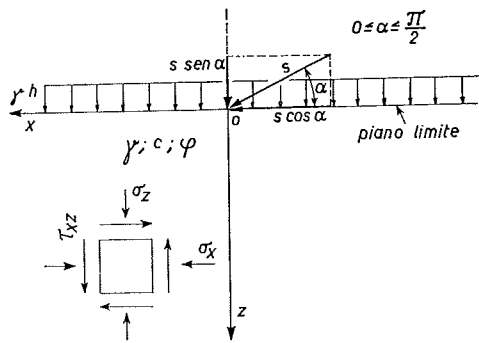


Fig. 1 - Posizione del problema e condizioni di carico sul piano limite.

Per semplificare la trattazione si ammetta che la sollecitazione

$$\sigma_0 = \gamma (z + h)$$

esistente alla profondità generica z e dovuta al peso proprio del terreno ed al carico γh sia la medesima su tutti gli elementi piani normali alle varie direzioni uscenti dal punto.

Le sollecitazioni dovute al carico s nel punto generico di coordinate x, z possono calcolarsi nell'ipotesi che il terreno compreso fra i piani $z = 0$ e $z = \infty$ sia un semispazio omogeneo ed isotropo e che questo si comporti come un solido elastico.

Esse sono note nei due casi particolari, in cui il carico sia verticale ($\alpha = \pi/2$) od orizzontale ($\alpha = 0$) [Grundbau Taschenbuch, 1955].

In virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, le tensioni compressive σ_x, σ_z, τ agenti nel punto (x, z) per effetto della condizione di carico rappresentata in fig. 1 possono calcolarsi sommando alle sollecitazioni σ_0 dovute al carico γh ed al peso proprio del terreno i valori delle tensioni indotte dalle due componenti verticale $s \sin \alpha$ ed orizzontale $s \cos \alpha$ del carico s .

Si ottengono così:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2 s \sin \alpha}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} + \\ &+ \frac{2 s \cos \alpha}{\pi} \frac{x z^2}{(x^2 + z^2)^2} + \gamma (z + h) \\ \sigma_x &= \frac{2 s \sin \alpha}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2} + \\ &+ \frac{2 s \cos \alpha}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + z^2)^2} + \gamma (z + h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2 s \sin \alpha}{\pi} \frac{x z^2}{(x^2 + z^2)^2} + \\ &+ \frac{2 s \cos \alpha}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2} \end{aligned}$$

Si osservi che queste tensioni sono indipendenti dal valore del modulo di Poisson μ . Per la simmetria risulta poi che la τ dovuta alla componente orizzontale $s \cos \alpha$ può ottenersi da quella dovuta alla componente verticale $s \sin \alpha$, scambiando fra loro le coordinate; analogamente la σ_x per effetto di $s \cos \alpha$ si ottiene dalla σ_x dovuta a $s \sin \alpha$ e viceversa.

Le tensioni principali valgono:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{aligned} \right\} &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = \\ &= \begin{cases} \gamma (z + h) \\ \frac{2 s \sin \alpha}{\pi} \frac{z}{x^2 + z^2} + \\ + \frac{2 s \cos \alpha}{\pi} \frac{x}{x^2 + z^2} + \gamma (z + h) \end{cases} \end{aligned}$$

Affinchè nel punto (x, z) si verifichi la rottura è necessario che nel piano σ, τ il cerchio di Mohr di diametro $\sigma_1 - \sigma_3$ sia tangente alla retta limite di equazione $\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi$. Ciò accade quando le tensioni soddisfano la condizione:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \operatorname{cotg} \varphi} = \operatorname{sen} \varphi \quad (1)$$

La (1) è la ben nota condizione di plasticità di RANKINE, comunemente adottata nei problemi di Meccanica dei Terreni [TERZAGHI, 1943].

Introducendo nella (1) i valori di σ_1 e σ_3 innanzi trovati, dopo facili passaggi, si giunge alla seguente condizione di plasticità:

$$\frac{(x^2 + z^2) (z + h + c/\gamma \operatorname{cotg} \varphi)}{z \operatorname{sen} \alpha + x \cos \alpha} - R^2 = 0 \quad (2)$$

avendo posto:

$$R^2 = \frac{s (1 - \operatorname{sen} \varphi)}{\pi \gamma \operatorname{sen} \varphi} \quad (3)$$

L'equazione (2) rappresenta nel piano x, z la curva direttrice della superficie, che delimita il dominio dei punti, nei quali si raggiunge la rottura del terreno, da quelli esterni, che si trovano ancora in regime elastico.

La forma della curva dipende dai valori che assumono i parametri γ , c , φ , che caratterizzano il terreno ed s , α , h , che definiscono l'intensità e la direzione del carico.

Si osservi che per dedurre la (2) si è ammessa implicitamente l'ipotesi che il passaggio tra il regime elastico e quello plastico si verifichi bruscamente e che le espressioni delle tensioni nelle zone in regime elastico possano ancora calcolarsi con le formule della teoria dell'elasticità anche in presenza di zone plastiche. Inoltre, la teoria non tiene conto delle condizioni, che devono verificarsi, affinché sia rispettato l'equilibrio all'interno delle zone in stato plastico. Ne discende che, teoricamente, l'ampiezza di queste zone può crescere indefinitamente al crescere del carico applicato.

Si può ritenere, tuttavia, che queste note limitazioni della teoria non alterino in maniera fondamentale, almeno per valori non troppo elevati del carico [TERZAGHI, 1943], l'andamento generale del fenomeno di plasticizzazione, che si vuole porre in evidenza nella presente nota.

Si osservi che nel caso notevole in cui l'angolo d'attrito $\varphi = 0$ la condizione di plasticità (1) si scrive più semplicemente:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2c \quad (1')$$

e la (2) si riduce alla seguente:

$$x^2 + z^2 - \frac{s}{c\pi} (x \cos \alpha + z \sin \alpha) = 0 \quad (2')$$

nella quale compaiono solo i parametri s , c , α . Nel-

l'ipotesi $\varphi = 0$ la soluzione risulta, dunque, indipendente dal peso dell'unità di volume γ del terreno e dalla intensità del carico uniforme applicato sul piano limite.

Altro caso notevole è quello che si presenta quando la coesione $c = 0$, per cui la condizione di plasticità diviene:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \sin \varphi \quad (1'')$$

e la (2) si riduce alla seguente:

$$(x^2 + z^2)(z + h) - R^2(x \cos \alpha + z \sin \alpha) = 0 \quad (2'')$$

Questa volta l'andamento della curva è influenzato da tutti i parametri.

3. - Per esaminare il tipo della curva (2), che si ottiene nei singoli casi, si ricerchino, innanzitutto, i valori che la x assume per $z \rightarrow 0$.

Convieni porre la (2) sotto la forma:

$$\begin{aligned} x^2 - x \frac{R^2 \cos \alpha}{z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi} &= \\ &= \frac{z R^2 \sin \alpha}{z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi} - z^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Le radici della (4), riguardata come un'equazione di secondo grado nella x , hanno la seguente espressione:

$$\frac{R^2 \cos \alpha}{2(z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi)} \pm \sqrt{\frac{R^4 \cos^2 \alpha}{4(z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi)^2} + \frac{R^2 z \sin \alpha}{z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi} - z^2} \quad (4')$$

Le ascisse (x_{e1} , x_{e2}) dei punti in cui la curva interseca l'asse $z = 0$ possono ottenersi, per assegnati valori dei parametri, ponendo $z = 0$ nella (4').

Convieni esaminare separatamente cosa avviene

nei due casi particolari $\varphi = 0$; $c = 0$.

Nell'ipotesi $\varphi = 0$; $c \neq 0$, ricordando la posizione (3) si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{R^2 \cos \alpha}{2(z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi)} \pm \sqrt{\frac{R^4 \cos^2 \alpha}{4(z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi)^2} + \frac{R^2 z \sin \alpha}{z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi} - z^2} &= \\ = \lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{s(1 - \sin \varphi) \cos \alpha}{2\pi\gamma \sin \varphi (z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi)} \pm & \\ \pm \sqrt{\frac{s^2(1 - \sin \varphi)^2 \cos^2 \alpha}{4\pi^2 \gamma^2 \sin^2 \varphi (z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi)^2} + \frac{s(1 - \sin \varphi) z \sin \alpha}{\pi\gamma \sin \varphi (z + h + c/\gamma \operatorname{ctg} \varphi)} - z^2} &= \begin{cases} x_{e1} = 0 \\ x_{e2} = \frac{s \cos \alpha}{\pi c} \end{cases} \end{aligned}$$

Ciò significa che, in questo caso, la curva passa per il punto di applicazione del carico ($x_{e1} = 0$) e che, inoltre, essa interseca l'asse $z = 0$ nel punto di ascissa x_{e2} , il cui valore dipende solo dall'inclinazione α del carico e dal rapporto s/c .

La x_{e2} si riduce a $s/\pi c$ nel caso $\alpha = 0$ e si annulla per $\alpha = \pi/2$. In quest'ultimo caso, dunque, risulta $x_{e1} = x_{e2} = 0$; inoltre, può facilmente verificarsi che la curva è tangente all'asse $z = 0$ nell'origine.

Per $c = 0$; $\varphi \neq 0$ sui valori di x_{e1} e x_{e2} esercita influenza anche il parametro h .

Si supponga dapprima che sia $\alpha = \pi/2$. Con $h = 0$ si ha in tal caso dalla (4')

$$x_{e1} = -R \quad ; \quad x_{e2} = +R$$

cioè la curva non passa per l'origine, ma interseca l'asse $z = 0$ in due punti simmetrici rispetto all'origine medesima. Se invece $h \neq 0$, si ottiene nuovamente:

$$x_{e1} = x_{e2} = 0$$

Anche qui potrebbe dimostrarsi facilmente che

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{f'_x}{f'_z} = - \frac{2x(z+h+c/\gamma \cotg \varphi)(z \operatorname{sen} \alpha + x \cos \alpha) - (x^2+z^2)(z+h+c/\gamma \cotg \varphi) \cos \alpha}{[3z^2+x^2+2z(h+c/\gamma \cotg \varphi)](z \operatorname{sen} \alpha + x \cos \alpha) - (x^2+z^2)(z+h+c/\gamma \cotg \varphi) \operatorname{sen} \alpha}$$

Nel punto di massimo deve essere allora:

$$(z+h+c/\gamma \cotg \varphi)[(x^2-z^2) \cos \alpha + 2xz \operatorname{sen} \alpha] = 0$$

Quest'equazione è soddisfatta dai seguenti valori di z :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha - 1}{\cos \alpha} x \\ z_2 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha + 1}{\cos \alpha} x \\ z_3 &= -(h+c/\gamma \cotg \varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

Scartando la soluzione negativa z_3 , le prime due delle (6) sono le equazioni di due rette, che partono dall'origine degli assi coordinati e che sono inclinate rispetto alla verticale degli angoli:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \operatorname{arctg} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - 1} \\ \beta_2 &= \operatorname{arctg} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + 1} \end{aligned}$$

la curva risulta tangente all'asse $z = 0$ nell'origine.

Se, nella medesima ipotesi $c = 0$; $\varphi \neq 0$, si pone $\alpha \neq \pi/2$ si ottiene dalla (4')

$$x_{e1} = 0 \quad ; \quad x_{e2} = \frac{R^2 \cos \alpha}{h}$$

Risulta, quindi, che in questo caso un punto della curva coincide sempre con il punto di applicazione del carico. Quanto alla x_{e2} , per $h > 0$ essa assume un valore finito, che si annulla per $h \rightarrow \infty$; per $h = 0$, invece, la x_{e2} tende all'infinito per qualsiasi $\alpha \neq \pi/2$.

Tra i punti $(x_{e1}, 0)$ e $(x_{e2}, 0)$ esiste un punto di massimo affondamento della zona plastica nel terreno. Anche le coordinate del punto di massimo dipendono dai valori che assumono i parametri.

Il luogo dei punti di massimo può ricercarsi ovviamente imponendo che la $\frac{dz}{dx}$ si annulli.

Il legame tra le due variabili x, z è dato in forma implicita dalla funzione $f(x, z)$ espressa dalla (2), per cui:

Si verifica facilmente che, nel campo $z > 0$, che qui interessa, la z_2 rappresenta il luogo dei punti di massimo affondamento delle zone plastiche nel terreno. Risulta, così, che questo luogo dipende solo dall'inclinazione α della retta d'azione del carico, indipendentemente dai valori degli altri cinque parametri.

Nel caso particolare del carico verticale è $\alpha = \pi/2$; $\beta_2 = 0$ e la retta luogo dei massimi si riduce alla $x = 0$, cioè all'asse verticale z . Con carico diretto orizzontalmente risulta $\alpha = 0$; $\beta_2 = \pi/4$ ed il luogo dei massimi è la retta $z_2 = x$, bisettrice dell'angolo fra gli assi coordinati.

Per trovare l'espressione generale z_{\max} del massimo affondamento delle zone plastiche in funzione dei parametri, basta sostituire la (6) nella (2). Si ottiene l'equazione:

$$\begin{aligned} x^2 + x \frac{h+c/\gamma \cotg \varphi}{\operatorname{sen} \alpha + 1} \cos \alpha - \\ - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + 1} \frac{R^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

Scartando la soluzione negativa, si ha:

$$x = - \frac{h + c/\gamma \cotg \varphi}{2 (\text{sen } \alpha + 1)} \cos \alpha + \sqrt{\frac{(h + c/\gamma \cotg \varphi)^2}{4 (\text{sen } \alpha + 1)^2} \cos^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\text{sen } \alpha + 1} \frac{R^2}{2}}$$

e ricordando la (6):

$$z_2 = z_{\max} = - \frac{h + c/\gamma \cotg \varphi}{2} + \sqrt{\frac{(h + c/\gamma \cotg \varphi)^2}{4} + (\text{sen } \alpha + 1) \frac{R^2}{2}} \quad (7)$$

Nel caso particolare del carico verticale ($\alpha = \pi/2$):

$$z_{\max} = - \frac{h + c/\gamma \cotg \varphi}{2} + \sqrt{\frac{(h + c/\gamma \cotg \varphi)^2}{4} + R^2} \quad (7')$$

$$+ \sqrt{\frac{(h + c/\gamma \cotg \varphi)^2}{4} + R^2}$$

e per il carico diretto orizzontalmente ($\alpha = 0$):

$$z_{\max} = - \frac{h + c/\gamma \cotg \varphi}{2} + \sqrt{\frac{(h + c/\gamma \cotg \varphi)^2}{4} + \frac{R^2}{2}} \quad (7'')$$

Nella fig. 2 i valori di z_{\max}/R sono riportati in diagramma in funzione del rapporto h/R per alcuni valori dell'inclinazione α del carico nell'ipotesi che sia $c = 0$.

Si osservi che, per valori finiti degli altri parametri, la z_{\max} si annulla se $h \rightarrow \infty$.

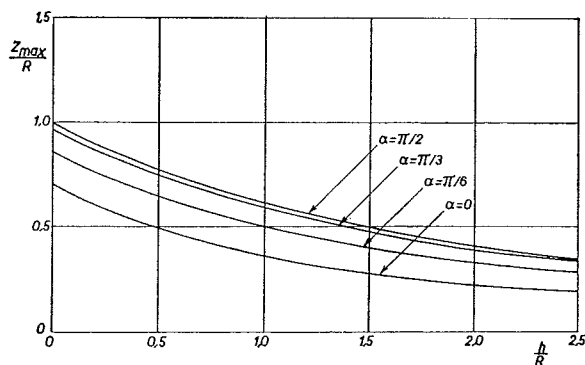


Fig. 2 - Affondamento massimo delle zone plastiche nel terreno in funzione del rapporto h/R per vari valori dell'inclinazione α del carico nell'ipotesi $c = 0$.

4. - Per studiare più in particolare, nei singoli casi, la forma che assume la curva (2), si riconsideri dapprima l'ipotesi che il terreno sia caratterizzato da $\varphi = 0$; $c \neq 0$.

In questo caso, come si è già visto, la (2) si riduce alla (2'), che rappresenta un cerchio con centro di coordinate:

$$x_0 = \frac{s \cos \alpha}{2 \pi c} ; z_0 = \frac{s \text{sen } \alpha}{2 \pi c} \quad (8)$$

Eliminando α si ottiene:

$$x_0^2 + z_0^2 = \frac{s^2}{4 \pi^2 c^2} = \rho^2$$

Ne discende che, per assegnati valori del rapporto s/c , al variare dell'inclinazione α del carico, il centro x_0, z_0 del cerchio, che delimita la zona plastica descrive a sua volta un arco di circonferenza di raggio

$$\rho = \frac{s}{2 \pi c}$$

Se $\alpha = \pi/2$ la curva limite è un cerchio tangente al piano $z = 0$ con il centro sull'asse z alla distanza $z_0 = \frac{s}{2 \pi c}$ dall'origine. Si ritrova, così, la soluzione che di questo problema ha fornito FRÖHLICH appunto nel caso particolare del carico verticale [FRÖHLICH, 1934].

Per $\alpha \neq \pi/2$ il cerchio interseca la $z = 0$ nei punti di ascisse $x_{e2} = \frac{s \cos \alpha}{\pi c}$, che dipendono so-

lo dal rapporto fra la intensità s del carico applicato e la coesione c del terreno.

Se $\alpha = 0$ la curva si riduce ad un semicerchio con centro sull'asse delle x alla distanza $x_{e2} = \frac{s}{\pi c}$ dall'origine.

È facile verificare che, per un determinato valore di α , al variare del rapporto s/c , il centro della curva limite si muove sulla retta di equazione:

$$z_0 = x_0 \text{tg } \alpha$$

che si ottiene eliminando il parametro s/c fra le (8). Questa retta coincide con quella d'azione del carico.

L'affondamento massimo della zona plastica verifica sempre la (6). Il suo valore in funzione dei parametri può ottenersi dalla (7), che, tuttavia, per $\varphi \rightarrow 0$ assume la forma indeterminata $-\infty + \infty$.

Passando al limite si ottiene con facili passaggi:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} z_{\max} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{h + c/\gamma \cotg \varphi}{2} + \sqrt{\frac{(h + c/\gamma \cotg \varphi)^2}{4} + (\text{sen } \alpha + 1) \frac{R^2}{2}} =$$

$$= (\text{sen } \alpha + 1) \frac{s}{2 \pi c}$$

Nei due casi particolari di carico verticale e di carico orizzontale, si trova rispettivamente:

$$z_{\max} = \frac{s}{\pi c} ; z_{\max} = \frac{s}{2 \pi c}$$

Nella parte superiore della Tav. I sono rappresentate in coordinate x, z per il caso particolare $\varphi = 0$, fin qui studiato, le curve limiti della zona plastica, che si ottengono per quattro valori di α e per diversi valori del rapporto s/c .

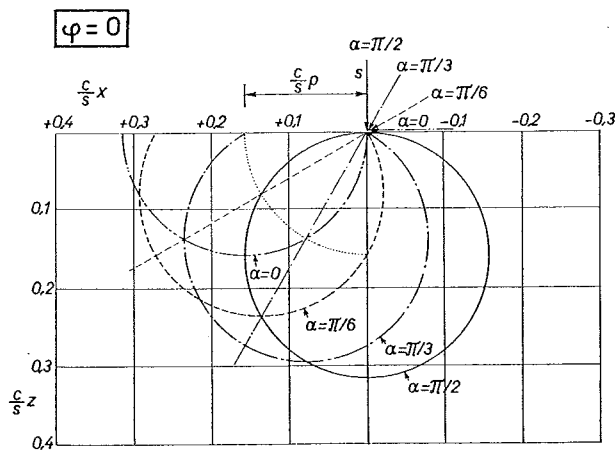


Fig. 3 - Zone plastiche nel terreno nell'ipotesi $\varphi = 0$ al variare dell'inclinazione α della linea d'azione del carico.

L'andamento di queste curve è altresì più sinteticamente rappresentato in fig. 3, dove in coordinate adimensionali ($\frac{c}{s}x, \frac{c}{s}z$) sono tracciati i cerchi corrispondenti a vari valori dell'angolo α d'inclinazione del carico; con riferimento a queste coordinate il problema potrebbe ovviamente discutersi in maniera analoga.

5. - Altro caso limite interessante è quello in cui il terreno sia caratterizzato da $c = 0$; $\varphi \neq 0$.

Per $\alpha = \pi/2$; $h = 0$, la curva è un semicerchio

simmetrico rispetto all'origine ed intersecante l'asse $z = 0$ nei punti di ascisa $x_{e2} = \pm R$.

In ogni altro caso la forma della curva, che delimita la zona plastica, dipende dai valori che assumono i parametri R, h e α .

Per $\alpha \neq \pi/2$; $h = 0$, il punto di emergenza x_{e2} della curva sulla $z = 0$ si sposta all'infinito. Ciò significa che, con un materiale incoerente, non appena la componente orizzontale del carico è diversa da zero, la rottura si estende sull'asse x fino a distanza infinita dal punto di applicazione del carico. Ci si spiega facilmente questo risultato teorico, tenendo presente che un materiale incoerente è in grado di resistere a sforzi di taglio solo se è diversa da zero la sollecitazione normale.

Le curve intersecano l'asse z nei punti che soddisfano l'equazione:

$$z^2 (z + h) - R^2 z \text{sen } \alpha = 0$$

Scartando la radice negativa si ottengono le due coordinate:

$$z_{e1} = 0$$

$$z_{\max} = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + R^2 \text{sen } \alpha}$$

La z_{e2} si annulla se $\alpha = 0$, nel qual caso la zona in stato plastico è tutta compresa nell'intervallo $R^2/h \geq x \geq 0$.

I parametri h, α e R influenzano anche la profondità della zona plastica.

Per $c = 0$ l'espressione generale (7) dell'ordinata massima della curva si riduce alla seguente:

$$z_{\max} = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + (\text{sen } \alpha + 1) \frac{R^2}{2}}$$

Si osservi che per valori crescenti di h la z_{\max} si riduce fino ad annullarsi per $h \rightarrow \infty$.

Nei due casi limiti particolari di carico verticale e di carico orizzontale, si ottiene rispettivamente:

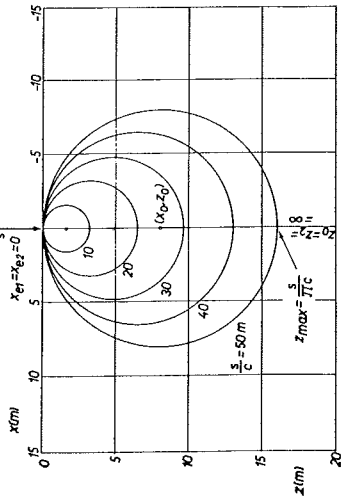
$$z_{\max} = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + R^2} \quad \text{per } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$z_{\max} = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{R^2}{2}} \quad \text{per } \alpha = 0$$

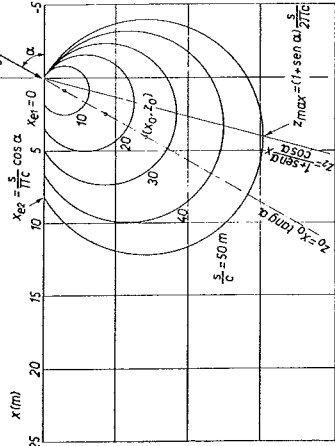
Per $h = 0$ la z_{\max} varia linearmente con R indipendentemente da α e risulta:

$\varphi = 0$

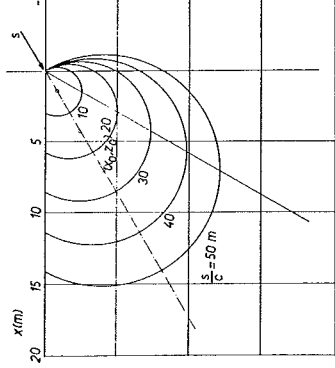
$\alpha = \frac{\pi}{2}$



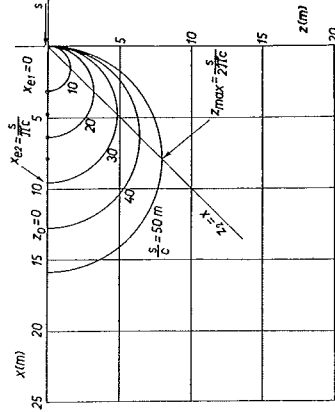
$\alpha = \frac{\pi}{3}$



$\alpha = \frac{\pi}{6}$

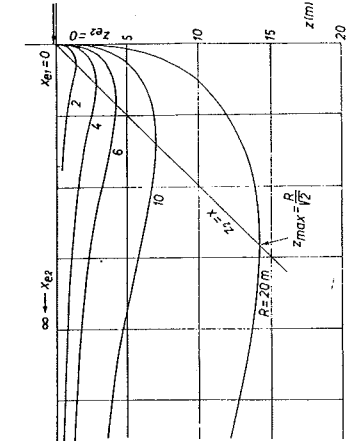
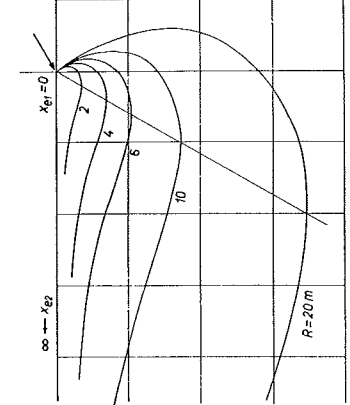
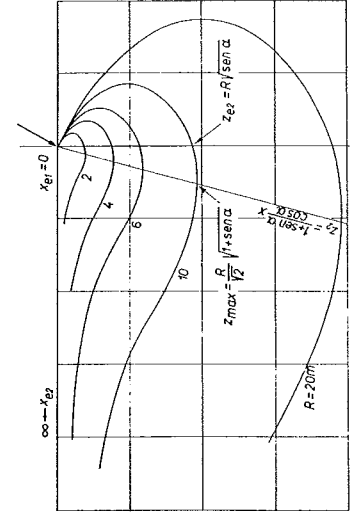
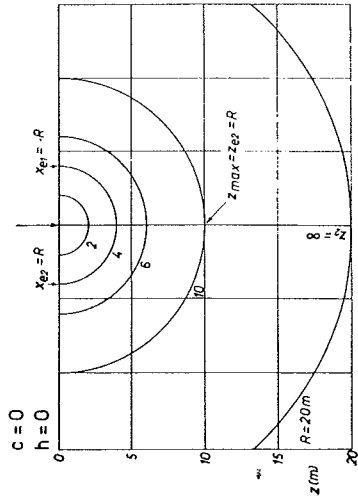


$\alpha = 0$



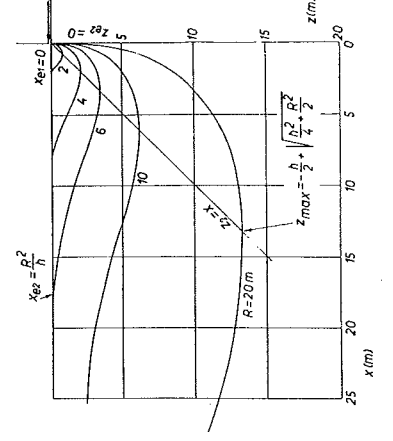
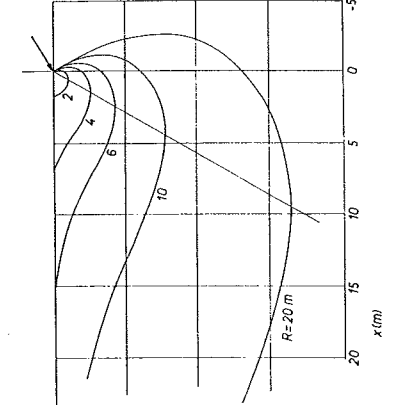
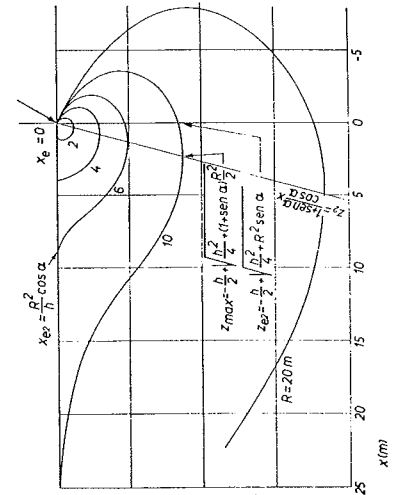
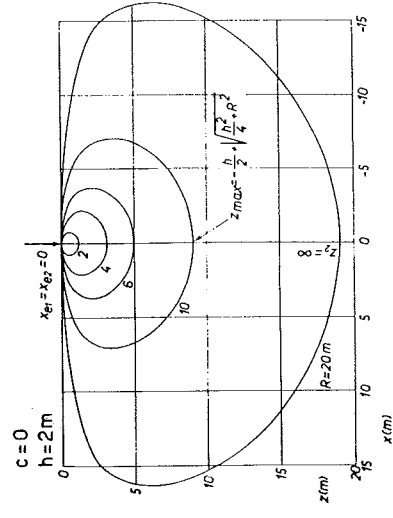
$c = 0$

$h = 0$

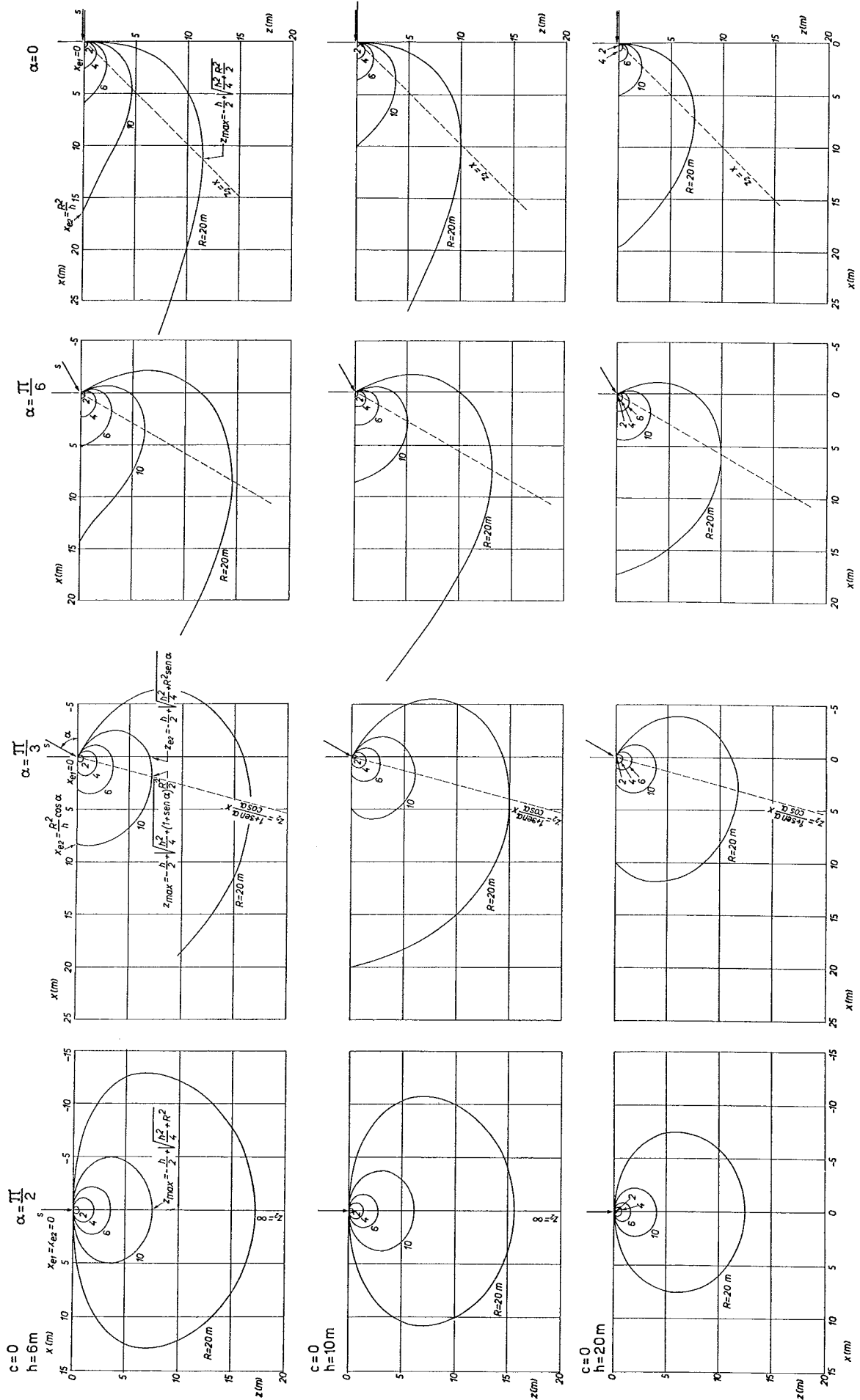


$c = 0$

$h = 2m$



TAV. I.



TAV. II.

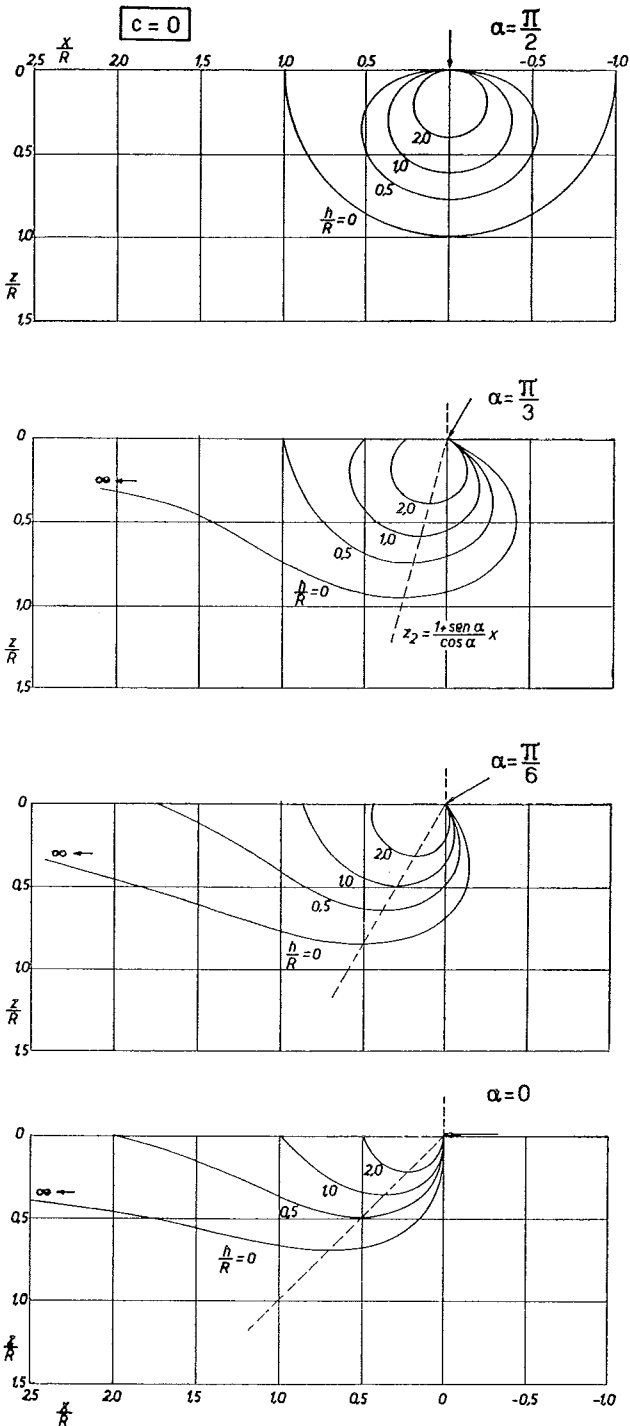


Fig. 4 - Zone plastiche nel terreno nell'ipotesi $c = 0$ al variare dell'inclinazione α della linea d'azione del carico e del fattore h/R .

$$z_{\max} = R \quad \text{per } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$z_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad \text{per } \alpha = 0$$

Per $c = 0$, dunque, a parità di altri fattori, l'influenza di h si manifesta attraverso una riduzione della profondità della zona plastica. Per il caso particolare del carico verticale si ritrova anche qui la soluzione fornita da FRÖHLICH nel 1934.

La Tav. I, nella parte centrale, pone in evidenza l'andamento delle curve studiate nel caso $c = 0$, $h = 0$, per quattro valori dell'inclinazione α del carico s al variare del coefficiente R .

Nella parte inferiore della medesima Tav. I e nella successiva Tav. II sono tracciate le analoghe curve corrispondenti ad assegnati valori finiti dell'altezza del carico h sul piano limite.

L'andamento di tutte queste curve può rappresentarsi più sinteticamente in fig. 4 nelle coordinate adimensionali $\frac{x}{R}$, $\frac{z}{R}$ in funzione del

fattore $\frac{h}{R}$ per vari valori dell'inclinazione α del carico; è appena il caso di osservare che in queste coordinate il problema potrebbe facilmente discutersi in maniera analoga.

I dati numerici per il tracciamento delle curve sono stati ottenuti con un programma Fortran dalla macchina del *Centro di Calcolo Elettronico* della Facoltà di Ingegneria di Palermo, il cui Direttore, Prof. Ing. Giuseppe APRILE, l'A. ringrazia per l'efficace collaborazione.

BIBLIOGRAFIA

FRÖHLICH O., (1934) - *Druckverteilung im Baugrund* - Springer, Berlino.
 — (1955) - *Grundbau Taschenbuch* - Vol. I, W. Ernst u. S., Berlino.
 TERZAGHI K., (1943) - *Theoretical Soil Mechanics* - J. Wiley, New York.

S U M M A R Y

A. discusses the transition from the state of elastic to that of plastic equilibrium in a subsoil bounded by a horizontal plane subjected to a flexible inclined uniform line load and to a vertical overall uniformly distributed surcharge.

The location of the outer boundary of the zone of plastic flow is obtained by combining the equations which represent the stresses due to the external loads and to the dead weight of the soil with those expressing the RANKINE

stress conditions for failure. The stresses due to the line load are computed assuming that the subsoil is a homogeneous, isotropic halfspace; for the stresses due to the weight of the soil a stress ratio $k_0 = 1$ is assumed for simplicity.

The general solution of the problem is given in the form

$$(a) \quad \frac{(x^2 + z^2)(z + h + c/\gamma \cotg \varphi)}{z \sin \alpha + x \cos \alpha} - R^2 = 0$$

where γ , c , φ are respectively the unit weight, the cohesion and the angle of internal friction of the soil, $R^2 = \frac{s(1 - \text{sen } \varphi)}{\pi \gamma \text{sen } \varphi}$ is a coefficient; the meaning of the other symbols is explained in fig. 1.

The discussion of equation (a) leads to evidentiate the influence of various factors such as the parameters c and φ of the soil, the intensity s and the inclination α of the applied line load and, finally, the height h of the uniformly distributed load γh on the shape of the boundaries of the zones of plastic flow.

The results of computation are presented graphically for different values of the above mentioned parameters.

The $\varphi = 0$ limiting case shows that the outer boundaries of plastic flow for different ratios s/c are arcs of circles, the

centers of which are located on the line of action of load and with maximum depth on the line of equation $z = \frac{\text{sen } \alpha + 1}{\cos \alpha} x$, irrespective of h values.

For non cohesive soils ($c = 0$) the shapes of the boundaries depend on the values of parameter R ; the curves intersect the x axis at a distance $\frac{R^2}{h} \cos \alpha$ from the origin and have their maxima located on the same preceding line. When $h = 0$ the zone of plastic flow extends to infinity along the x axis.

It can be noted that in the particular case of a vertical load ($\alpha = \pi/2$) the solution given here coincides with that furnished in 1934 by O. FRÖHLICH.