

# Sulle condizioni iniziali del processo di consolidazione di un mezzo elastico poroso saturo \*

C. VIGGIANI \*\*

**SOMMARIO:** Le equazioni che reggono il fenomeno della consolidazione tridimensionale di un corpo elastico poroso saturo, già ricavate da BIOT e da MANDEL, vengono richiamate e discusse. All'atto dell'applicazione dei carichi il corpo non può subire alcuna variazione di volume, a causa della supposta incompressibilità dell'acqua e della sostanza costituente lo scheletro solido; questa circostanza permette di analizzare agevolmente le condizioni iniziali del fenomeno. Nella presente nota viene studiata in particolare la distribuzione delle sovrappressioni neutre indotte istantaneamente dai carichi esterni, con riferimento allo schema del semispazio indefinito sottoposto a numerosi tipi di carichi orizzontali e verticali agenti sul piano limite.

L'espressione proposta da SKEMPTON e che pone in relazione la sovrappressione neutra con gli incrementi delle tensioni principali totali massima e minima viene analizzata e discussa, giungendo alla conclusione che essa è applicabile a rigore soltanto nei casi particolari di simmetria radiale delle tensioni o di deformazione piana. Negli altri casi è necessario ricorrere al procedimento generale esposto nella nota.

Vengono infine brevemente ricordati i risultati dell'esperienza, sottolineando le differenze che si riscontrano fra il comportamento dei terreni reali e quello del modello elastico.

## 1. Premessa.

Il modello che si assume per schematizzare il comportamento di un terreno sotto l'azione dei carichi esterni è diverso a seconda del tipo di problema che si considera; nella presente nota tratteremo in quei casi in cui le sollecitazioni indotte nel terreno si mantengono sempre inferiori ai valori limiti cui corrisponde l'inizio di fenomeni di rottura.

Il modello che adotteremo — limitandoci per semplicità al caso di un terreno saturo — è costituito da un corpo poroso, omogeneo, isotropo e dotato di elasticità lineare, completamente saturato da un liquido incompressibile. Supporremo inoltre che il liquido obbedisca alla legge di DARCY [1856] e che la sostanza costituente lo scheletro solido sia di per sé incompressibile, sì che ogni variazione di volume avvenga solo a causa di una corrispondente variazione della porosità.

Mentre le ipotesi di omogeneità, isotropia, saturazione potrebbero agevolmente essere rimosse, almeno in linea di principio, l'ipotesi di elasticità

lineare è il fondamento della trattazione e rappresenta indubbiamente una semplificazione molto accentuata dell'effettivo comportamento del terreno. Tuttavia occorre subito dire che a tale ipotesi si fa ricorso invariabilmente in quanto le difficoltà cui si andrebbe incontro per tener conto delle effettive relazioni sforzi-deformazioni dei terreni sarebbero enormi ed uno sforzo in tal senso sarebbe probabilmente sproporzionato all'approssimazione con cui sono attualmente misurabili i parametri caratteristici dei terreni. D'altra parte la semplice ipotesi elastica risulta di grande utilità per la comprensione di alcuni fenomeni e molto spesso permette di ottenere risultati sufficientemente approssimati per un gran numero di problemi di ricerca ed applicativi [SKEMPTON e BJERRUM, 1957; DAVIS e POULOS, 1963; GIBSON, KNIGHT e TAYLOR, 1963; SCHULTZE, 1963].

Giova qui richiamare brevemente alcuni concetti già noti della meccanica del mezzo poroso bifase.

Considerando un elemento di superficie nell'interno di un tale mezzo, sia:

- $\sigma$  la tensione normale totale, che assumeremo positiva se di compressione
- $\sigma'$  la componente normale delle azioni intergranulari per unità di superficie, o sollecitazione effettiva
- $p_n$  la pressione dell'acqua interstiziale, o pressione neutra.

(\*) Il presente studio rientra in un programma di ricerche che l'Istituto di *Tecnica delle Fondazioni e Costruzioni in Terra (Geotecnica)* dell'Università di Napoli svolge con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche nell'ambito del Gruppo « Terreni e Strutture » sotto la guida del Prof. Ing. Arrigo CROCE.

(\*\*) Dott. Ing. Carlo VIGGIANI, Assistente Straordinario alla Cattedra di *Tecnica delle Fondazioni e Costruzioni di Terra (Geotecnica)* della Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Napoli.

Come è noto, vale la relazione (1):

$$\sigma' = \sigma - p_n \quad (1)$$

Quanto alle sollecitazioni tangenziali, esse vengono naturalmente trasmesse solo attraverso lo scheletro solido.

TERZAGHI [1923] ha mostrato quasi mezzo secolo fa che il comportamento meccanico di un terreno è governato dalle sollecitazioni effettive, ed è pertanto a queste ultime che dovremo far riferimento. Ciò comporta l'introduzione di una ulteriore incognita, la pressione neutra, che si aggiunge alle incognite, componenti di deformazione e di tensione, dei problemi relativi ai mezzi monofase; è inoltre necessario introdurre anche un'altra variabile indipendente, il tempo, in aggiunta alle variabili geometriche.

## 2. Il fenomeno della consolidazione e le equazioni che lo reggono.

### 2.1. Generalità.

All'atto dell'applicazione di un sistema di carichi ad un mezzo bifase come innanzi definito, le sollecitazioni indotte si ripartiscono fra lo scheletro solido ed il liquido; si ha quindi istantaneamente uno stato di tensioni e di deformazioni nello scheletro solido e la fase fluida si trova assoggettata ad un regime di pressioni variabili da punto a punto. Nell'istante immediatamente successivo ha quindi inizio un movimento del liquido governato dalla permeabilità e dalla compressibilità del mezzo e dalle condizioni ai limiti. Questo movimento dà luogo ad una graduale dissipazione delle sovrappressioni neutre e quindi a variazioni delle sollecitazioni effettive e ad ulteriori deformazioni differite nel tempo.

TERZAGHI [1923, 1943] ha per primo descritto con chiarezza questo fenomeno, indicato con il termine « consolidazione », e ne ha dato la formulazione analitica per il caso particolare in cui la deformazione del corpo ed il movimento dell'acqua siano unidirezionali. BIOT [1935, 1941a] ed indipendentemente MANDEL [1950] hanno ricavato le equazioni generali del fenomeno nelle tre dimensioni, adot-

tando per il terreno il modello che abbiamo descritto in precedenza. Converrà dunque richiamare questa formulazione generale del problema e lo faremo seguendo una via un po' diversa da quella adottata dagli AA. citati, e forse più semplice.

Per fissare le idee faremo riferimento alle condizioni ai limiti generalmente adottate nello studio dei problemi di fondazione, e cioè ad un semispazio con piano limite orizzontale costituito da materiale saturato da un liquido in quiete avente su superficie libera concidente con il piano limite del semispazio.

Se si assume come riferimento una terna cartesiana  $Oxyz$  con origine sul piano limite ad asse  $z$  verticale e diretto verso il basso, prima dell'applicazione dei sovraccarichi esisterà nel mezzo un sistema di sollecitazioni effettive e neutre indotte dalle forze di massa gravitazionali, che varranno:

$$p_n = \gamma_w \cdot z$$

$$\sigma'_{z_0} = \gamma z - p_n = \gamma' z \quad (2)$$

$$\sigma'_{x_0} = \sigma'_{y_0} = \frac{1}{m-1} \sigma'_{z_0} = k_0 \sigma'_{z_0}$$

ove

$\gamma_w$  = peso specifico dell'acqua  
 $\gamma$  = peso dell'unità di volume del terreno  
 $\gamma' = \gamma - \gamma_w$  = peso dell'unità di volume del terreno immerso

$m = \frac{1}{\mu}$  = modulo di POISSON dello scheletro solido

$k_0$  = coefficiente di spinta « a riposo ».

Nel punto generico si avrà una quota piezometrica  $h$  che, se assumiamo come piano di riferimento il piano  $xy$ , sarà nulla. L'applicazione di un sistema di sovraccarichi sul piano limite indurrà nel punto considerato una sovrappressione neutra  $u$  e degli incrementi di pressioni effettive  $\Delta\sigma'_x$ ,  $\Delta\sigma'_y$ ,  $\Delta\sigma'_z$ , l'una e gli altri variabili oltre che con le coordinate del punto anche con il tempo. Si avrà allora:

$$p_n = \gamma_w z + u$$

$$h = -u/\gamma_w$$

$$\sigma'_x = \sigma'_{x_0} + \Delta\sigma'_x; \quad \sigma'_y = \sigma'_{y_0} + \Delta\sigma'_y; \quad \sigma'_z = \sigma'_{z_0} + \Delta\sigma'_z$$

(1) L'equazione (1), che equivale a supporre nulla l'area di contatto fra i granuli costituenti lo scheletro solido del terreno, è stata giustificata in base a considerazioni teoriche ed ampiamente confermata dall'esperienza. Una recente sintesi sull'argomento ed una approfondita discussione dei limiti di validità della (1) sono dovute a SKEMPTON [1961].

(2) Sotto l'azione delle sole forze di massa gravitazionali si avrà, per evidenti motivi di simmetria:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

da cui l'espressione di  $\sigma'_{x_0}$ ,  $\sigma'_{y_0}$ .

Per semplicità di formulazione nel seguito ci riferiremo alle sole sollecitazioni indotte dai sovraccarichi, e cioè alla sovrappressione neutra  $u$  ed agli incrementi di pressioni effettive che - abbandonando il prefisso  $\Delta$  - indicheremo con  $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ . Del pari indicheremo con  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  gli incrementi di pressioni totali indotti dai sovraccarichi; e pertanto si avrà:

$$\sigma_x = \sigma'_x + u; \quad \sigma_y = \sigma'_y + u; \quad \sigma_z = \sigma'_z + u.$$

## 2.2. Equazioni di equilibrio e di congruenza.

È noto dall'idraulica che la forza di trascinamento esercitata da un liquido in filtrazione attraverso un mezzo poroso e riferita all'unità di volume è pari al prodotto del peso specifico del liquido per la cadente piezometrica, ed è diretta secondo la direzione della velocità di filtrazione. Tali forze possono essere considerate come un sistema di forze di massa agenti sullo scheletro solido; le loro componenti secondo gli assi coordinati valgono:

$$X = \gamma_w \frac{\partial h}{\partial x}; \quad Y = \gamma_w \frac{\partial h}{\partial y}; \quad Z = \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3)$$

Tenendo presenti le (3), le equazioni che esprimono le condizioni di equilibrio delle forze agenti sul generico elemento di volume dello scheletro solido si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \quad (4) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Esprimendo le sei condizioni di congruenza delle deformazioni in funzione delle componenti speciali di tensione e tenendo conto delle (4), otterremo le equazioni dell'equilibrio elastico o equazioni di BELTRAMI; con forze di massa variabili esse assumono la seguente forma [TIMOSHENKO, 1934]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma'_x + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \\ + \gamma_w \left( \frac{1}{m-1} \nabla^2 h + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma'_y + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \\ + \gamma_w \left( \frac{1}{m-1} \nabla^2 h + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \nabla^2 \sigma'_z + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} + \\ + \gamma_w \left( \frac{1}{m-1} \nabla^2 h + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 T'}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 T'}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 T'}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} &= 0 \end{aligned}$$

in cui si è posto:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \text{operatore di LAPLACE}$$

$T' = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z =$  primo invariante dello stato tensionale in termini di pressioni effettive.

Il sistema formato dalle (4) e dalle (5) ha solo sei equazioni indipendenti, in quanto delle sei condizioni di congruenza utilizzate per ricavare le (5) solo tre sono indipendenti.

A fronte delle sei equazioni disponibili si hanno sette incognite, e cioè le sei componenti di tensione più la quota piezometrica  $h$  o, il che è lo stesso, la sovrappressione neutra  $u = -h \gamma_w$ .

Dovremo quindi procurarci una ulteriore equazione.

## 2.3. Equazione della continuità.

2.3.1. Detta  $\vec{V}$  la velocità di filtrazione, la quantità di acqua che esce dall'unità di volume nel tempo  $dt$  è data, come è noto, da  $\text{div } \vec{V} dt$  ed essendo, per la supposta validità della legge di DARCY,  $\vec{V} = k \text{ grad } h = - \frac{k}{\gamma_w} \text{ grad } u$ , si ha:

$$\operatorname{div} \vec{V} dt = - \frac{k}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dt =$$

$$= - \frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u dt$$

Nello stesso intervallo di tempo  $dt$  il primo invariante delle tensioni effettive  $T'$  avrà subito una

variazione pari a  $\frac{\partial T'}{\partial t} dt$  e di conseguenza, detto  $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  l'invariante di dilatazione cubica, l'unità di volume avrà subito una contrazione:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt = \frac{1 - 2\mu}{E} \frac{\partial T'}{\partial t} dt$$

ove con  $E$  si indica il modulo di YOUNG dello scheletro solido.

Per la continuità dovrà aversi:

$$\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u dt = \frac{1 - 2\mu}{E} \frac{\partial T'}{\partial t} dt$$

e quindi:

$$\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u + \frac{1 - 2\mu}{E} \frac{\partial T'}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Il sistema formato dalle (4), (5) e (6), che equivale alle equazioni di BIOT e di MANDEL, risolve il problema dell'equilibrio elastico in termini di pressioni effettive e permette quindi di calcolare le sollecitazioni effettive, le sovrappressioni neutre e le deformazioni in ogni punto al variare del tempo.

2.3.2. Se con  $T = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  si indica il primo invariante dello stato tensionale in termini di pressioni totali si ha  $T' = T - 3u$  e la (6) può scriversi:

$$\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u + \frac{1 - 2\mu}{E} \frac{\partial}{\partial t} (T - 3u) = 0 \quad (7)$$

da cui:

$$c_{v3} \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

essendo:

$$c_{v3} = \frac{k E}{3 \gamma_w (1 - 2\mu)} \quad (9)$$

Se il problema è di deformazione piana nel piano  $(x, z)$ , si ha:

$$\sigma'_y = \mu (\sigma'_x + \sigma'_z); \quad T' = (1 + \mu) (\sigma_x + \sigma_z - 2u)$$

e quindi la (7) diventa:

$$c_{v2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_x + \sigma_z) \quad (10)$$

avendo posto:

$$c_{v2} = \frac{k E}{2 \gamma_w (1 + \mu) (1 - 2\mu)} \quad (11)$$

coefficiente di consolidazione relativo ad un processo bidimensionale.

Nel caso di deformazione uniassiale secondo l'asse  $z$  si ha analogamente:

$$c_{v1} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \quad (12)$$

con la seguente espressione per il coefficiente di consolidazione unidimensionale<sup>(3)</sup>:

$$c_{v1} = \frac{k E (1 - \mu)}{\gamma_w (1 + \mu) (1 - 2\mu)} \quad (13)$$

I tre coefficienti di consolidazione relativi ai fenomeni mono-, bi- e tridimensionale sono legati fra loro dalle relazioni:

$$c_{v1} = 2 (1 - \mu) c_{v2} = 3 \frac{1 - \mu}{1 + \mu} c_{v3}$$

L'andamento di  $c_{v1}$ ,  $c_{v2}$  e  $c_{v3}$  al variare di  $\mu$  è riportato in fig. 1; per i valori notevoli  $\mu = 0$  e  $\mu = 0,5$  si ha rispettivamente:

$$c_{v1} = 2 c_{v2} = 3 c_{v3} \quad (\mu = 0)$$

$$c_{v1} = c_{v2} = c_{v3} = \infty \quad (\mu = 0,5)$$

<sup>(3)</sup> Se si ricorda l'espressione del modulo di compressione edometrica  $E_{ed}$  in funzione delle costanti elastiche dello scheletro solido:

$$E_{ed} = \frac{E (1 - \mu)}{(1 + \mu) (1 - 2\mu)}$$

la (13) può scriversi:

$$c_{v1} = \frac{k E_{ed}}{\gamma_w}$$

che è l'espressione del coefficiente di consolidazione unidimensionale fornita da TERZAGHI.

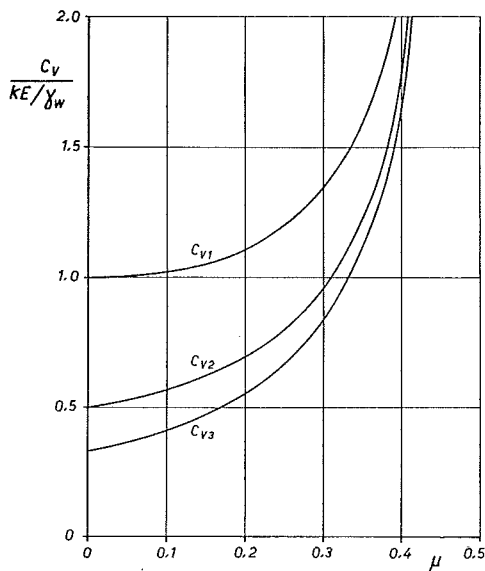


Fig. 1. - Coefficienti di consolidazione per il processo mono-, bi- e tridimensionale.

A  $c_{v3}$  si dà il nome di coefficiente di consolidazione, e l'indice 3 si riferisce al fenomeno tridimensionale.

2.3.3. Le equazioni (4), (5) e (6), ovvero (4), (5) ed (8), che valgono per il fenomeno tridimensionale contengono sia la sovrappressione neutra  $u$  sia le componenti  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  della tensione normale totale (o, il che è lo stesso, le tensioni normali effettive  $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ ). Per tale ragione la loro soluzione presenta difficoltà analitiche non indifferenti ed è stata finora ottenuta solo per pochi casi molto semplici e spesso in maniera incompleta [BIOT, 1941b; BIOT e CLINGAN, 1941; JOSSELYN DE JONG, 1953, 1957; GIBSON e MC NAMEE, 1957; MC NAMEE e GIBSON, 1960a, 1960b; CRYER, 1963; DE LEEUW, 1965].

Esse si semplificano notevolmente se si ammette che l'invariante delle tensioni totali  $T$  resti in ogni punto costante nel tempo; condizione questa che — come vedremo — si verifica in realtà solo in alcuni casi particolari.

In tale ipotesi le (8), (10) e (12) divengono rispettivamente:

$$c_{v3} \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (14 a)$$

$$c_{v2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (14 b)$$

$$c_{v1} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (14 c)$$

L'equazione (14c) è quella alla quale pervenne TERZAGHI [1923] quando per la prima volta im-

pose la trattazione della teoria della consolidazione unidimensionale; successivamente la trattazione fu estesa ai casi a due ed a tre dimensioni da RENDULIC [1936] ottenendo le equazioni (14a) e (14b).

Le equazioni (14) sono estremamente più semplici delle corrispondenti equazioni (8), (10) e (12) in quanto esse contengono come unica incognita la sovrappressione neutra  $u$ , e possono quindi essere risolte indipendentemente dalle equazioni indefinite di equilibrio (4) e dalle condizioni di congruenza (5). Equazioni della medesima struttura reggono molti altri fenomeni fisici; per tale ragione esse sono state studiate a fondo e risolte in un gran numero di casi particolari, anche mediante procedimenti numerici. La trattazione di TERZAGHI-RENDULIC, basata sull'ipotesi che si abbia in ogni punto  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  presenterebbe quindi notevoli vantaggi su quella di BIOT dal punto di vista delle pratiche applicazioni.

Tuttavia l'ipotesi che l'invariante delle tensioni totali resti costante nel tempo non è accettabile se non in casi tutt'affatto particolari, e ciò anche quando i sovraccarichi applicati si mantengono costanti nel tempo (4). Una previsione del decorso del fenomeno sulla base della teoria di TERZAGHI sarebbe quindi affetta da errori la cui entità è difficile valutare. Vi è poi da considerare che la possibilità di integrare le (14) senza tener conto delle condizioni di equilibrio e di congruenza è solo apparente, in quanto occorre individuare le condizioni limite al tempo  $t = 0$  ossia i valori iniziali della unica variabile  $u$ . Mentre per alcuni casi semplici ciò è immediato — e sono appunto i casi trattati da TERZAGHI e da RENDULIC — nel caso generale per ottenere i valori che la sovrappressione neutra  $u$  assume in ogni punto all'inizio del fenomeno bisogna appunto far ricorso alle equazioni generali (4) e (5) assieme all'equazione della continuità (6).

Si è già detto che la soluzione di tali equazioni nei casi in cui le condizioni ai limiti non siano straordinariamente semplici presenta difficoltà analitiche molto gravi. Cionondimeno l'analisi delle condizioni iniziali del fenomeno non è priva di interesse, ed offre lo spunto per alcune considerazioni aventi anche dei riflessi applicativi.

(4) Le variazioni di  $T$  nel tempo anche a carichi applicati costanti — delle quali non è immediato darsi ragione intuitivamente — vengono spiegate dalla teoria e sono causate dalla graduale variazione delle costanti elastiche apparenti in termini di pressioni totali che si verifica durante il processo di consolidazione. Il fenomeno è stato discusso teoricamente e provato sperimentalmente da GIBSON, KNIGHT e TAYLOR [1963].

Nei paragrafi che seguono ci proponiamo di mostrare come tale analisi, basata sulla trattazione generale di BIOT, sia possibile ed anche relativamente agevole.

### 3. Le condizioni iniziali del processo di consolidazione.

3.1. Come già si è detto, i carichi che vengono applicati al tempo  $t = 0$  inducono una distribuzione di sovrappressioni neutre  $u$  nel liquido che satura il mezzo poroso, oltre ad una distribuzione di sollecitazioni nello scheletro solido.

Come l'applicazione dei carichi, così l'insorgere delle sovrappressioni neutre e delle sollecitazioni nel corpo costituiscono una discontinuità nello stato del corpo stesso con riferimento alla variabile tempo.

È da osservare che il corpo non potrà subire istantaneamente alcuna variazione di volume; infatti, stante la supposta incompressibilità della sostanza solida e del liquido, ogni variazione di volume, al finito come nell'infinitesimo, comporterebbe il movimento di una certa quantità di acqua; per valori finiti della permeabilità tale movimento non può però avvenire in un tempo nullo.

Ciò significa che le pressioni neutre generate istantaneamente dall'applicazione dei carichi esterni assumono nei vari punti del corpo valori tali da rendere nulla la divergenza di  $\vec{V}$ ; e poichè nei riguardi del moto dell'acqua il corpo obbedisce alla legge di DARCY, la precedente condizione equivale all'altra:

$$\nabla^2 u_{(t=0)} = 0 \quad (15)$$

Questa relazione permette di calcolare, rispettando le opportune condizioni ai limiti, i valori della sovrappressione neutra. Essa venne ricavata da BIOT [1941] ed è stata risolta per alcuni casi particolari da FLORIN [SCOTT, 1963] con un procedimento applicabile solo nei casi in cui i carichi agiscano normalmente al piano limite di un semispazio.

Possiamo però osservare che la condizione di variazione di volume nulla comporta, oltre alla condizione che non abbia luogo alcun movimento di acqua, anche quella che le variazioni di volume dello scheletro solido siano a loro volta nulle. Avremo cioè che l'invariante di dilatazione cubica dello scheletro solido dovrà soddisfare alla condizione:

$$\varepsilon_{(t=0)} = 0$$

In altre parole le sollecitazioni effettive che si generano nello scheletro solido all'atto dell'applicazione dei carichi devono essere tali che il conseguente coefficiente di dilatazione cubica sia nullo.

Ricordando che è  $\varepsilon = T'(1 - 2\mu)/E$ , la condizione precedente si tramuta in:

$$T'_{(t=0)} = 0$$

Ma poichè  $T' = T - 3u$ , si ottiene in definitiva:

$$u_{(t=0)} = \frac{T_{(t=0)}}{3} \quad (16)$$

La (16) ci offre così un'altra via per il calcolo delle sovrappressioni neutre iniziali; essa si presenta in pratica molto agevole in quanto permette di utilizzare le innumerevoli soluzioni già esistenti per la distribuzione delle sollecitazioni in un semispazio sottoposto a carichi di vario tipo. A questo proposito noteremo che nel calcolare l'invariante delle pressioni totali  $T_{(t=0)}$  occorrerà introdurre per il modulo di POISSON il valore  $m = 2$  che traduce la già descritta proprietà del terreno saturo di non subire variazioni di volume all'atto dell'applicazione dei carichi.

3.2. Consideriamo ad esempio il classico caso di un carico concentrato  $Q$  agente sul piano limite di un semispazio e normalmente ad esso.

Con le formule di BOUSSINESQ [1885] e ponendo  $m = 2$  si ottiene, per un generico punto di coordinate  $x, y, z$  (fig. 2):

$$\sigma_1 = \frac{3Q}{2\pi} z (z^2 + r^2)^{-3/2}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

ove  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sono rispettivamente la massima, l'in-

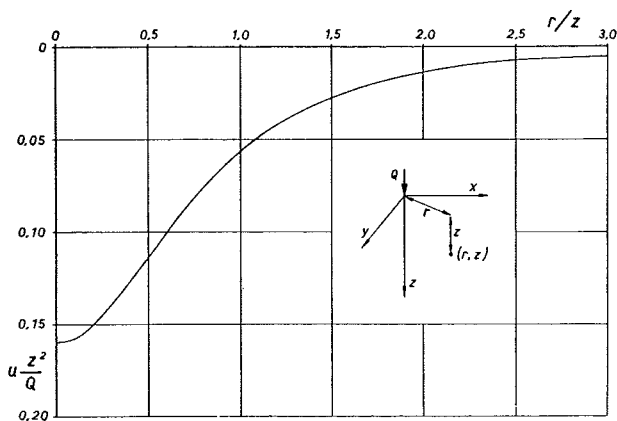


Fig. 2. - Distribuzione delle sovrappressioni neutre indotte da un carico concentrato verticale.

termedia e la minima tensione principale totale. Si avrà allora  $T = \sigma_1$  e, per la (16):

$$u = \frac{T}{3} = \frac{Q}{2\pi} z (z^2 + r^2)^{-3/2} \quad (17)$$

Come è agevole controllare, la (17) soddisfa la equazione di LAPLACE (15) e, come deve essere, fornisce valori nulli della sovrappressione neutra a distanza infinita dal punto di applicazione del carico e su tutti i punti del piano limite. Fa eccezione il punto di applicazione del carico, ove la sovrappressione neutra assume valore infinito, analogamente a quanto accade per le sollecitazioni.

Come è noto — a causa della presenza del carico concentrato — in quel punto le ipotesi della teoria dell'elasticità cadono in difetto.

L'espressione (17) è posta in diagramma in forma adimensionale in fig. 2.

3.3. Un'altra applicazione può essere fatta ad un problema di deformazione piana, e cioè al caso del carico uniformemente distribuito con intensità  $q$  per unità di lunghezza su di una retta del piano limite, ed agente normalmente ad esso.

Con i simboli della fig. 3 e ponendo  $m = 2$  si ha [HOLL, 1941]:

$$\sigma_x = \frac{2q}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2}; \quad \sigma_y = \frac{q}{\pi} \frac{z}{x^2 + z^2};$$

$$\sigma_z = \frac{2q}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}$$

da cui:

$$T = \frac{3q}{\pi} \frac{z}{x^2 + z^2}$$

e quindi, per la (16):

$$u = \frac{T}{3} = \frac{q}{\pi} \frac{z}{x^2 + z^2} \quad (18)$$

La (18) <sup>(5)</sup> soddisfa l'equazione (15) e dà conto dei valori della sovrappressione neutra sulle superfici limiti del corpo. Anche in questo caso la retta di applicazione del carico costituisce un luogo di punti singolari ove la  $u$  assume valore infinito.

La (18) è posta in diagramma in forma adimensionale in fig. 3.

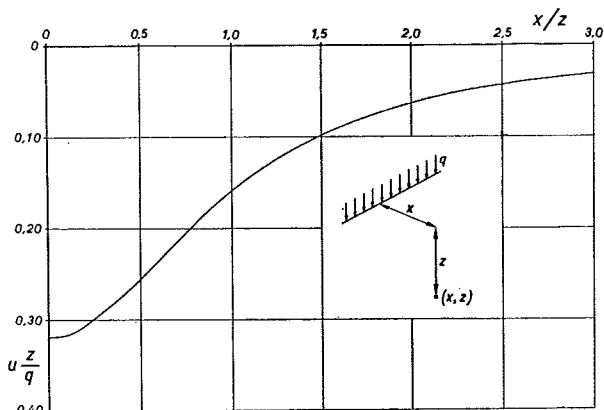


Fig. 3. - Distribuzione delle sovrappressioni neutre indotte da un carico verticale uniformemente ripartito su di una retta.

Le espressioni della sovrappressione neutra indotta da carichi di vario tipo agenti sul piano limite e normalmente o parallelamente ad esso sono riportate in Appendice. Esse sono state ricavate applicando la (16), ovvero procedendo per sovrapposizione degli effetti a partire dalle espressioni relative a condizioni di carico elementari. Tutte le equazioni soddisfano la (15) e le appropriate condizioni ai limiti.

Nella stessa Appendice i risultati ottenuti sono illustrati con diagrammi adimensionali.

3.4. Oltre dieci anni fa SKEMPTON [1954] ha proposto di porre la sovrappressione neutra che si genera istantaneamente all'atto dell'applicazione dei carichi in relazione con le pressioni principali totali, suggerendo una nota formula:

$$u = \sigma_3 + A (\sigma_1 - \sigma_3) = A \sigma_1 + (1 - A) \sigma_3 \quad (19)$$

valida per i terreni saturi e nella quale non compare la sollecitazione principale intermedia.

Per il modello di terreno che è alla base della presente trattazione si ha  $A = 1/3$  per gli stati tensionali dotati di simmetria radiale ed  $A = 1/2$  per gli stati di deformazione piana. Nel primo caso infatti, essendo  $\sigma_2 = \sigma_3$ , si ha  $T = \sigma_1 + 2 \sigma_3$ ; applicando la (16) si ricava:

$$u = \frac{T}{3} = \frac{1}{3} \sigma_1 + \frac{2}{3} \sigma_3$$

che coincide con la (19) quando si ponga  $A = 1/3$ .

Per uno stato di deformazione piana e per  $m = 2$  si ha  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  e quindi  $T = 3/2 (\sigma_1 + \sigma_3)$ . Applicando la (16) si ha:

$$u = \frac{T}{3} = \sigma_3 + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

<sup>(5)</sup> Alla stessa espressione era giunto FLORIN [SCOTT, 1963] risolvendo la (15) con l'ausilio di un'analogia idrodinamica.

che coincide con la (19) quando si ponga  $A = 1/2$ .

È facile dimostrare come l'espressione (19) di SKEMPTON sia a rigore valida solo nei casi particolari ora citati.

Infatti per quanto detto in precedenza è chiaro che la sovrappressione neutra  $u$  è funzione di tutte e tre le tensioni normali; qualora esista una relazione fra la  $\sigma_2$  e le altre due tensioni principali — come accade per i due casi di deformazione piana e di simmetria radiale delle tensioni — risulta possibile esprimere la  $u$  in funzione delle sole tensioni principali estreme. Nel caso generale invece è necessario portare esplicitamente in conto la  $\sigma_2$ .

Un esempio varrà a chiarire meglio il discorso.

Si consideri un'area rettangolare di lati  $a$  e  $b$  (con  $a > b$ ) sul piano limite di un semispazio, uniformemente caricata da un carico verticale di intensità  $p$  per unità di superficie (fig. 4). Nei punti

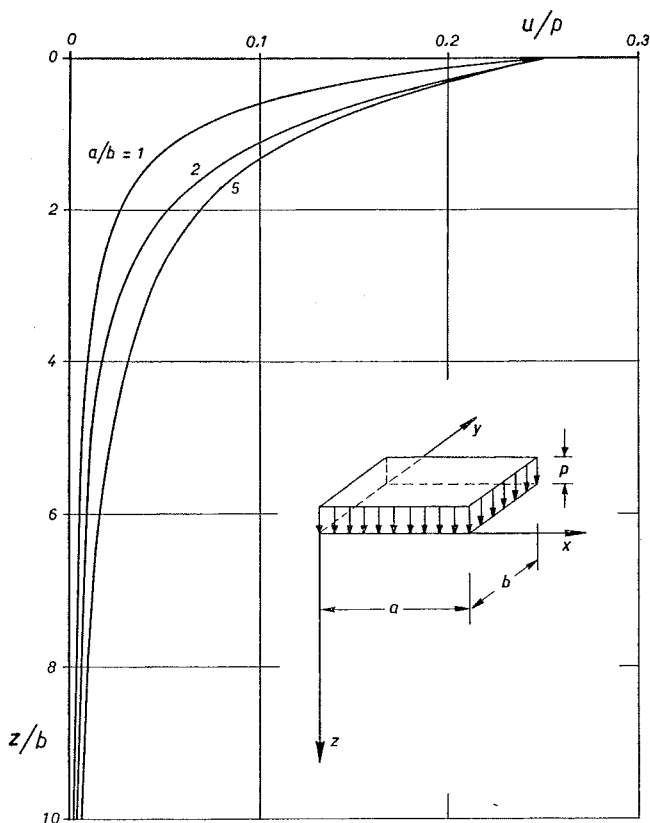


Fig. 4. - Distribuzione delle sovrappressioni neutre indotte da un carico uniformemente ripartito su di un'area rettangolare.

della verticale passante per un vertice del rettangolo si ha [KOLLBRUNNER, 1946] con  $m = 2$ :

$$\sigma_x = \frac{p}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{n}{\zeta \sqrt{1+n^2+\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{1+n^2+\zeta^2}} \frac{n}{\zeta^2+n^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{p}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{n}{\zeta \sqrt{1+n^2+\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{1+n^2+\zeta^2}} \frac{n}{1+\zeta^2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{p}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{n}{\zeta \sqrt{1+n^2+\zeta^2}} + \frac{n\zeta}{\sqrt{1+n^2+\zeta^2}} \left( \frac{1}{1+\zeta^2} + \frac{n}{n^2+\zeta^2} \right) \right] \quad (20)$$

dove si è posto  $n = a/b$  e  $\zeta = z/b$ , e l'asse  $x$  è parallelo al lato  $a$ .

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti le tensioni  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  lungo la verticale passante per il centro di un rettangolo di lati  $2a$ ,  $2b$ , possono ottenersi moltiplicando per 4 le espressioni precedenti; in questo caso esse sono, per ragioni di simmetria, le tensioni principali e si ha  $\sigma_x \equiv \sigma_1$ ,  $\sigma_y \equiv \sigma_2$ , e  $\sigma_z \equiv \sigma_3$ .

Applicando la (16) dopo aver moltiplicato per 4 le (20) si ottiene:

$$u = \frac{T}{3} = \frac{2p}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{n}{\zeta \sqrt{1+n^2+\zeta^2}} \quad (21)$$

Se ora applichiamo al caso in esame l'espressione di SKEMPTON (19) otterremo:

$$u = \sigma_3 + A (\sigma_1 - \sigma_3) = \quad (22)$$

$$\frac{2p}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{n}{\zeta \sqrt{1+n^2+\zeta^2}} + \frac{n\zeta}{\sqrt{1+n^2+\zeta^2}} \left( \frac{2A-1}{1+\zeta^2} + \frac{A}{n^2+\zeta^2} \right) \right]$$

Paragonando fra di loro la (21) e la (22) ricaviamo per  $A$  l'espressione:

$$A = \frac{n^2 + \zeta^2}{1 + 2n^2 + 3\zeta^2} \quad (23)$$

illustrata nella fig. 5. Come si vede, nel caso generale di  $1 < n < \infty$ ,  $A$  risulta essere funzione della forma della superficie di carico (e cioè di  $n$ ) e della posizione del punto considerato (e cioè di  $\zeta$ ). Nel caso particolare di  $n = 1$  (e cioè nel caso del qua-



TABELLA I

Tipo di terreno	Valori di A
Argille molli sensibili	> 1
Argille normalmente consolidate	0,5 ÷ 1
Argille preconsolidate	0,25 ÷ 0,5
Argille sabbiose fortemente preconsolidate	0 ÷ 0,25

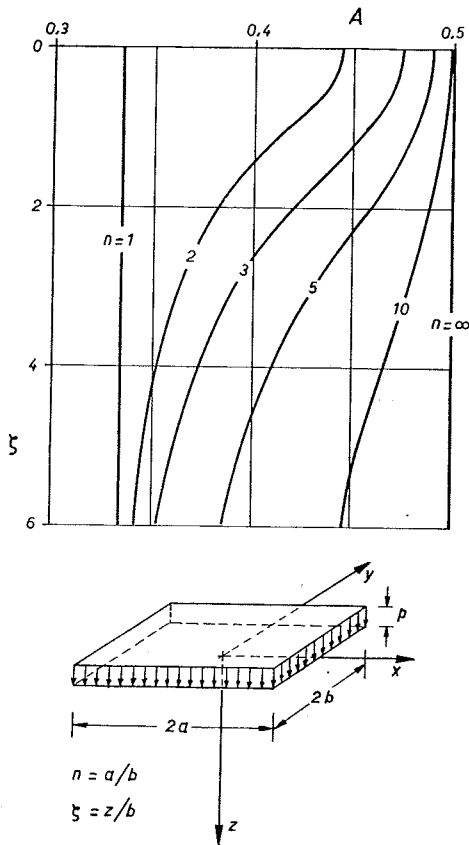


Fig. 5. - Variazione del coefficiente A di Skempton con la posizione del punto considerato e con la forma dell'area di carico.

drato, in cui i punti della verticale passante per il centro sono in condizioni di simmetria radiale) si ritrova  $A = 1/3$  indipendentemente dal valore di  $z$ .

Nell'altro caso particolare di  $n = \infty$  (e cioè per la striscia, problema di deformazione piana) si ha di nuovo che A è indipendente da  $z$  e vale  $A = 1/2$ .

3.5. È qui da osservare che se dalla teoria si passa all'esperienza e cioè se al modello finora considerato si sostituisce un terreno reale il problema, come è facile immaginare, appare molto più complesso. La recente letteratura è ricca di indagini sperimentali nelle quali sono state effettuate misure della sovrappressione neutra durante prove di compressione triassiale, e quindi nel caso particolare di simmetria radiale delle tensioni. Sono stati in tal modo misurati per i terreni naturali valori di A diversi da  $1/3$ ; alcuni valori tipici [SKEMPTON e BJERRUM, 1957], relativi al campo di sollecitazioni che normalmente si hanno al disotto di una fondazione, sono elencati nella Tabella I.

Questo fatto trova la sua spiegazione nel comportamento dei terreni naturali, diverso da quello del corpo elastico sia per la non linearità della re-

lazione fra tensioni e deformazioni sia — e soprattutto — per la ben nota proprietà dei terreni naturali di dar luogo a variazioni di volume sotto l'azione di sollecitazioni tangenziali (dilatanza).

Una espressione che ponga in relazione la sovrappressione neutra con le tensioni totali che la inducono dovrebbe pertanto tener conto — oltre che di tutte e tre le tensioni principali — anche delle azioni tangenziali. Un'espressione di questo tipo è dovuta ad HENKEL [HENKEL, 1961; HENKEL e SOWA, 1963; HENKEL e WADE, 1966] che dall'analisi di una ampia serie di prove trasse la relazione:

$$u = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} + \frac{a}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (24)$$

dove il coefficiente a sarebbe funzione solo del tipo di terreno e della storia delle sollecitazioni che precedentemente hanno agito su di esso.

La (24), applicata al modello elastico posto a base della presente nota, coincide con la (16) purché si ponga  $a = 0$ ; e questo proprio perché nella (24) il termine

$$\frac{a}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

rappresenta l'influenza sulla sovrappressione neutra delle tensioni tangenziali, influenza che per il corpo elastico non dilatante è nulla.

Dal punto di vista delle pratiche applicazioni l'equazione (19) di SKEMPTON è attualmente largamente diffusa e la misura di A viene invariabilmente effettuata mediante prove di compressione triassiale e cioè in uno dei casi particolari in cui la (19) risulta valida. Quando però i valori di A così determinati vengano adoperati per la previsione delle pressioni neutre indotte da un generico sistema di carichi occorre tener presente le considerazioni svolte in precedenza circa la dipendenza di A dallo stato tensionale.

APPENDICE

Distribuzione iniziale delle sovrappressioni neutre.

I. Carico concentrato verticale.

Il caso è già stato trattato nel testo, pervenendo alla formula:

$$u = \frac{Q}{2\pi} z (z^2 + r^2)^{-3/2} \quad (a.1)$$

che è illustrata nella fig. 2 del testo.

II. Carico concentrato orizzontale.

Assumendo  $m = 2$ , con i simboli della fig. A. 1 si ha [GERRUTI, 1882]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3Q}{2\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ \sigma_y &= \frac{3Q}{2\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ \sigma_z &= \frac{3Q}{2\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ T &= \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ u &= \frac{3Q}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (a.2)$$

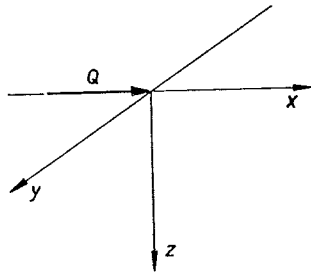


Fig. A. 1. - Carico concentrato orizzontale.

III. Carico concentrato inclinato.

Con i simboli della fig. A. 2., ed agendo per sovrapposizione degli effetti a partire dalle formule (a. 1) ed (a. 2) si ottiene:

$$u = \frac{Q}{2\pi} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (z \cos \alpha + x \sin \alpha) \quad (a.3)$$

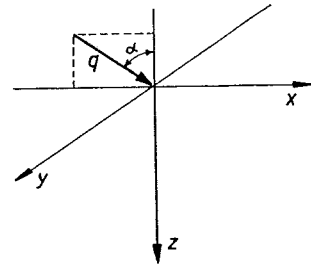


Fig. A. 2. - Carico concentrato inclinato.

IV. Carico verticale uniformemente ripartito su di una retta.

Il caso è già stato trattato nel testo, pervenendo alla formula:

$$u = \frac{q}{\pi} \frac{z}{x^2 + z^2} \quad (a.4)$$

che è illustrata nella fig. 3 del testo.

V. Carico orizzontale uniformemente ripartito su di una retta.

Assumendo  $m = 2$  e con i simboli della fig. A. 3 si ha [LOVE, 1927]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2q}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + z^2)^2} \\ \sigma_y &= \frac{q}{\pi} \frac{x}{x^2 + z^2} \\ \sigma_z &= \frac{2q}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2} \\ T &= \frac{3q}{\pi} \frac{x}{x^2 + z^2} \\ u &= \frac{q}{\pi} \frac{x}{x^2 + z^2} \end{aligned} \quad (a.5)$$

La (a.5) è rappresentata, come caso particolare per  $\alpha = \pi/2$  nella successiva fig. A.4.

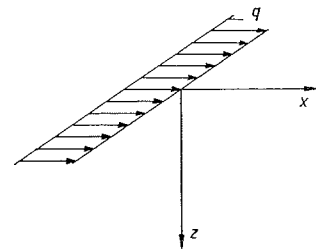


Fig. A. 3. - Carico orizzontale uniformemente ripartito su di una retta.

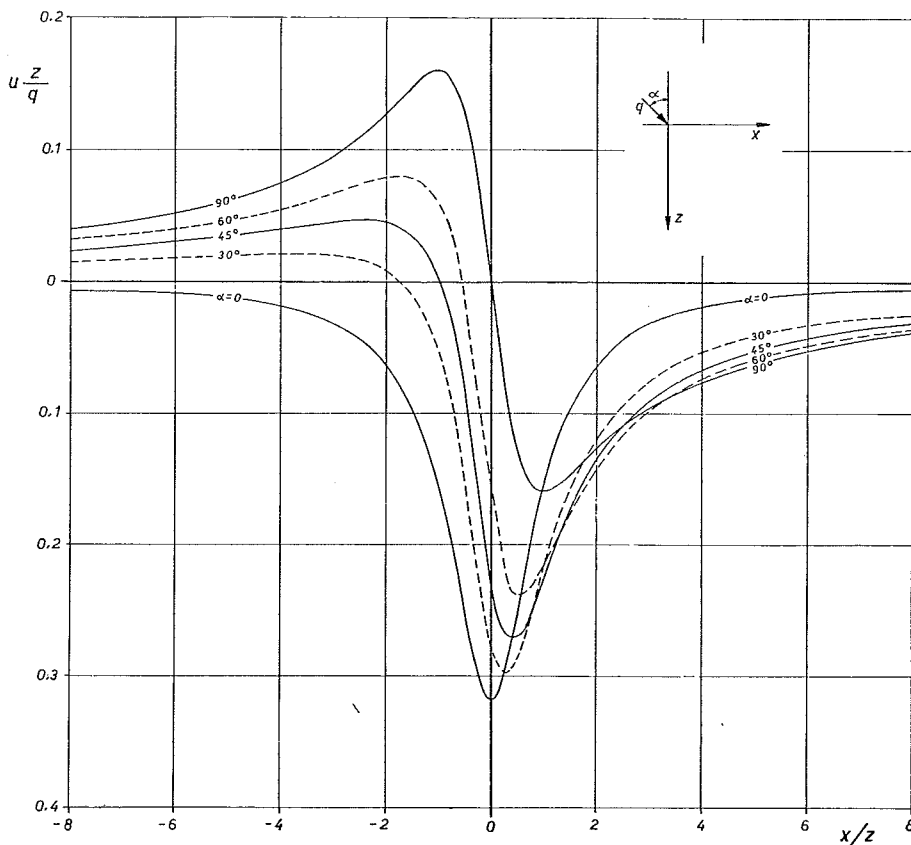


Fig. A.4. - Distribuzione delle sovrappressioni neutre indotte da un carico inclinato uniformemente ripartito su di una retta.

VI. Carico inclinato uniformemente ripartito su di una retta.

Con i simboli della fig. A. 4, ed agendo per sovrapposizione degli effetti a partire dalle formule (a.4) ed (a.5) si ottiene:

$$u = \frac{q}{\pi} \frac{x \operatorname{sen} \alpha + z \operatorname{cos} \alpha}{x^2 + z^2} \quad (\text{a.6})$$

illustrata in fig. A.4, che contiene come casi particolari la fig. 3 ( $\alpha = 0$ ) e la espressione (a.5) ( $\alpha = \pi/2$ ).

VII. Carico verticale uniformemente ripartito su di una striscia.

Con riferimento alla fig. A. 5, la soluzione verrà ottenuta per sovrapposizione degli effetti.

Il carico agente su di una linea di spessore infinitesimo  $d\xi$  ed a distanza  $\xi$  dall'asse della striscia vale  $p d\xi$ ; esso induce in un generico punto di coordinate  $(x, z)$  una sovrappressione neutra che vale, per la (a.4):

$$du = \frac{p d\xi}{\pi} \frac{z}{z^2 + (x - \xi)^2}$$

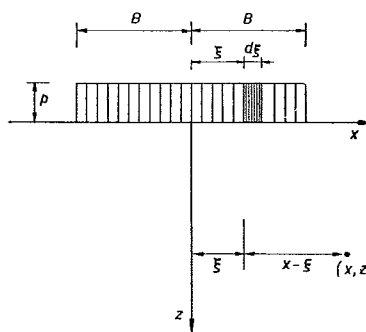


Fig. A.5. - Carico verticale uniformemente ripartito su di una striscia.

La sovrappressione indotta dal carico agente su tutta la striscia varrà allora:

$$u = \int_{-B}^B du = \int_{-B}^B \frac{p}{\pi} \frac{z d\xi}{z^2 + (x - \xi)^2} =$$

$$\frac{p}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x - \xi}{z} \right]_{-B}^B$$

e cioè:

$$u = \frac{p}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{x + B}{z} - \operatorname{arctg} \frac{x - B}{z} \right) \quad (\text{a.7})$$

relazione illustrata nella fig. A.6.

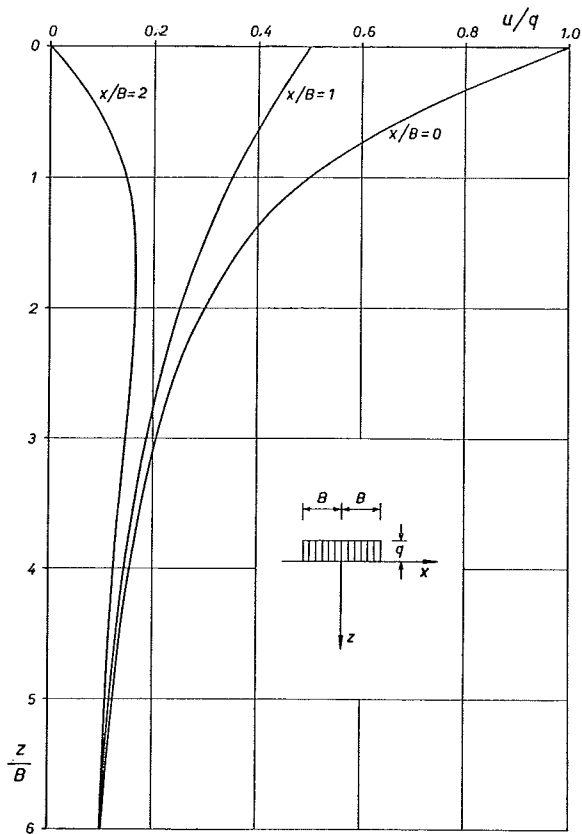


Fig. A.6. - Distribuzione delle sovrappressioni neutre indotte da un carico verticale uniformemente ripartito su di una striscia.

VIII. Carico orizzontale uniformemente ripartito su di una striscia.

Il problema sarà risolto in modo analogo a quello precedente, e basandosi sulla formula (a.5). Si avrà cioè:

$$u = \int_{-B}^B \frac{p}{\pi} \frac{(x - \xi) d\xi}{z^2 + (x - \xi)^2} = \frac{p}{2\pi} \ln \frac{z^2 + (x + B)^2}{z^2 + (x - B)^2} \quad (a.8)$$

relazione illustrata nella fig. A.7.

IX. Carico verticale variabile con legge triangolare su di una striscia.

Con riferimento alla fig. A.8 il carico agente sulla linea di spessore infinitesimo  $d\xi$  ed a distanza  $\xi$  dal bordo scarico della striscia vale  $p \frac{\xi}{B} d\xi$ ; esso

induce in un generico punto di coordinate  $x, z$ , una sovrappressione neutra che vale, per la (a.4):

$$du = \frac{p z}{\pi B} \frac{\xi d\xi}{z^2 + (x - \xi)^2}$$

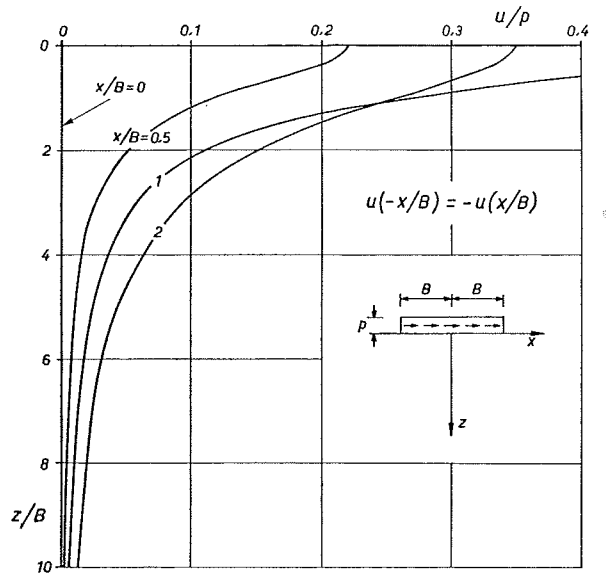


Fig. A.7. - Distribuzione delle sovrappressioni neutre indotte da un carico orizzontale uniformemente ripartito su di una striscia.

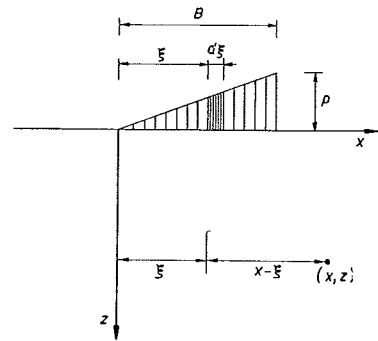


Fig. A.8. - Carico verticale variabile con legge triangolare su di una striscia.

La sovrappressione neutra indotta dal carico agente su tutta la striscia varrà allora <sup>(6)</sup>:

<sup>(6)</sup> Si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{p z}{B \pi} \int_0^B \frac{\xi d\xi}{z^2 + (x - \xi)^2} &= \frac{p}{B \pi z} \int_0^B \frac{\xi d\xi}{1 + (\xi - x)^2/z^2} = \\ &= \frac{p}{B \pi} \left[ \int_0^B \frac{(\xi - x)/z}{1 + (\xi - x)^2/z^2} d\xi + \int_0^B \frac{x/z}{1 + (\xi - x)^2/z^2} d\xi \right] = \\ &= \frac{p x}{B \pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\xi - x}{z} \right]_0^B + \frac{p z}{2 B \pi} \left[ \ln \left\{ 1 + \left( \frac{\xi - x}{z} \right)^2 \right\} \right]_0^B \end{aligned}$$

da cui la (a.9).

$$u = \int_0^B du = \frac{p x}{B \pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{z} - \operatorname{arctg} \frac{x-B}{z} \right) + \frac{p z}{2 B \pi} \ln \frac{z^2 + (x-B)^2}{z^2 + x^2} \quad (\text{a.9})$$

espressione illustrata nella fig. A.9.

#### X. Carico verticale uniformemente ripartito su di un semipiano.

Il problema sarà risolto analogamente ai casi precedenti basandosi sulla formula (a.5). Si avrà:

$$du = \frac{P}{\pi} \frac{z}{z^2 + (x - \xi)^2} d\xi$$

e quindi

$$u = \int_0^\infty du = \frac{P}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{z} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{a.10})$$

relazione illustrata in fig. A.10.

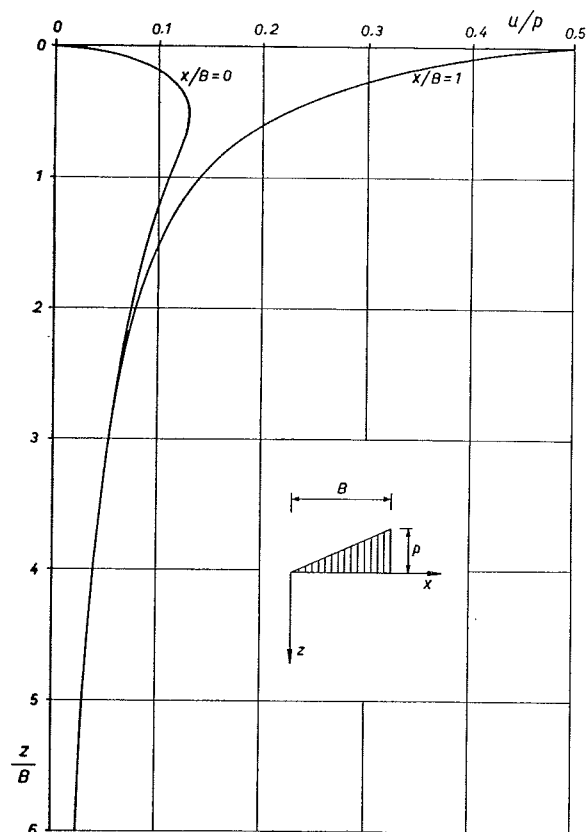


Fig. A.9. - Distribuzione delle sovrappressioni neutre indotte da un carico verticale variabile con legge triangolare su di una striscia.

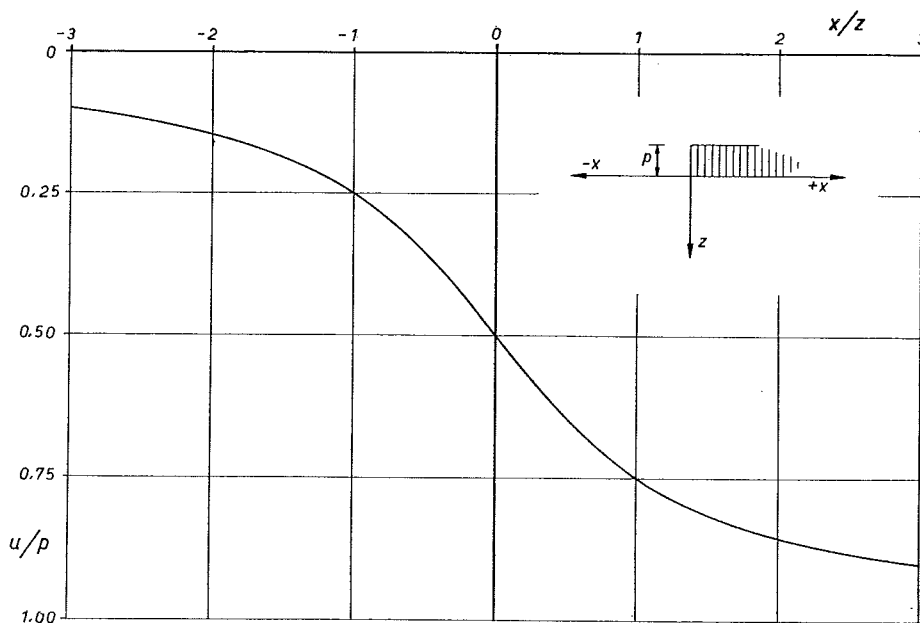


Fig. A.10. - Distribuzione delle sovrappressioni neutre indotte da un carico verticale uniformemente ripartito su di un semipiano.

#### XI. Carico verticale uniformemente ripartito su un rettangolo.

Il caso è già stato trattato nel testo, limitatamente ai punti della verticale passante per un vertice del rettangolo, pervenendo alla formula:

$$u = \frac{P}{2 \pi} \operatorname{arctg} \frac{n}{\zeta \sqrt{1 + n^2 + \zeta^2}} \quad (\text{a.11})$$

con  $n = a/b$  e  $\zeta = z/b$ ; l'espressione è illustrata nella fig. 4 del testo.

Con procedimento di sovrapposizione degli effetti analogo a quello proposto da STEINBRENNER [1934] la (a.11) può essere agevolmente estesa ad un punto generico ed ad aree di carico di forma qualsiasi, purchè scomponibili in rettangoli.

## XII. Carico verticale uniformemente ripartito su di un cerchio.

Limitatamente ai punti della verticale passante per il centro del cerchio, si ha, con riferimento alla fig. A.11 [TIMOSHENKO, 1934] ed avendo posto  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_z &= p (1 - \cos^3 \alpha) \\ \sigma_x = \sigma_y &= \frac{P}{2} (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) \\ T &= 3 p (1 - \cos \alpha) \\ u &= p (1 - \cos \alpha) \end{aligned} \quad (a.12)$$

relazione illustrata nella fig. A.11.

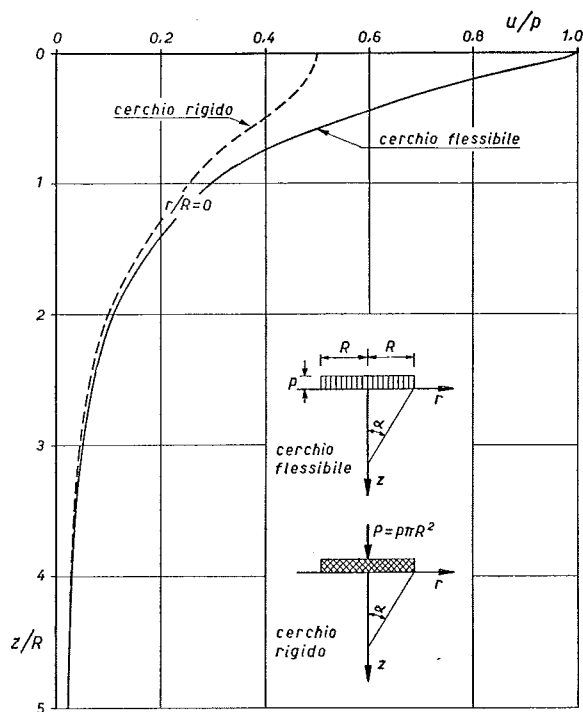


Fig. A.11. - Sovrappressioni neutre indotte da un carico verticale uniformemente ripartito su di un cerchio e da una piastra circolare rigida caricata assialmente nei punti della verticale passante per il centro.

## XIII. Carico verticale e centrato su di una piastra circolare rigida.

Si consideri una piastra circolare rigida poggian- te sul piano limite di un semispazio, ed assogget-

tata ad un sistema di carichi aventi risultante ver- ticale e centrata P. Sia  $p = P/\pi R^2$  la pressione me- dia esercitata dalla piastra.

Limitatamente ai punti della verticale passante per il centro del cerchio si ha, con i simboli della fig. A.11 ed assumendo  $m = 2$  [FISCHER, 1957]:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 1/2 p \operatorname{sen}^2 \alpha (1 + 2 \cos^2 \alpha) \\ \sigma_x = \sigma_y &= 1/2 p \operatorname{sen}^4 \alpha \\ T &= 3/2 p \operatorname{sen}^2 \alpha \\ u &= 1/2 p \operatorname{sen}^2 \alpha \end{aligned} \quad (a.13)$$

relazione illustrata nella fig. A.11.

## BIBLIOGRAFIA

- BIOT M. A. (1935) - *Le problème de la consolidation des matières argileuses sous une charge*. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. B, 55.
- BIOT M. A. (1941 a) - *General theory of three-dimensional consolidation*. Journ. Appl. Phys., vol. 12.
- BIOT M. A. (1941 b) - *Consolidation settlement under a rectangular load distribution*. Journ. Appl. Phys., vol. 12.
- BIOT M. A., CLINGAN F. M. (1941) - *Consolidation settlement of a soil with an impervious top surface*. Journ. Appl. Phys., vol. 12.
- BOUSSINESQ J. (1885) - *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthiers et Villars, Paris.
- CERRUTI V. (1892) - *Acc. Lincei, Mem. Fis. Mat., Roma*.
- CRYER C. W. (1963) - *A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi*. Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 16.
- DARCY H. (1856) - *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris.
- DAVIS E. H., POULOS H. G. (1963) - *Triaxial testing and three-dimensional settlement analysis*. Proc. IV Australia-New Zealand Conf. Soil. Mech. Found. Eng.
- DE LEUW E. H. (1965) - *The theory of three-dimensional consolidation applied to cylindrical bodies*. Proc. VI Int. Conf. Soil. Mech. Found. Eng., Montreal.
- FISCHER K. (1957) - *Zur Berechnung der Setzung einer starren, mittig belasteten Kreisplatte auf geschichteter Unterlage*. Beton und Stahlbetonbau, H. 10.
- GIBSON R. E., MC NAMEE J. (1957) - *The consolidation settlement of a load uniformly distributed over a rectangular area*. Proc. IV Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., London.
- GIBSON R. E., KNIGHT K., TAYLOR R. W. (1963) - *A critical experiment to examine theories of three-dimensional consolidation*. Proc. Eur. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Wiesbaden.
- HENKEL D. J. (1960) - *The shear strength of saturated remoulded clays*. ASCE Res. Conf. on Shear Strength Cohesive Soils. Boulder, Colo.
- HENKEL D. J., SOWA V. A. (1963) - *The influence of stress history on stress paths in undrained triaxial tests on clay*. ASTM NRC Symp. Lab. Shear Test. Soils, Ottawa.
- HENKEL D. J., WADE N. H. (1966) - *Plane strain test on a saturated remoulded clay*. Journ. Soil Mech. Div., Proc. ASCE, SM. 6.

- HOLL D. L. (1941) - *Plane strain distribution of stress in elastic media*. Iowa Eng. Exp. Stat. Bull. 148.
- JOSSELYN DE JONG G. DE (1953) - *Consolidation around pore pressure meters*. Journ. Appl. Phys., vol. 24.
- JOSSELYN DE JONG, G. DE (1957) - *Application of stress functions to consolidation problems*. Proc. IV Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., London.
- KOLLBRUNNER C. F. (1947) - *Fundation und Konsolidation, band I*. S.D.V. Fachbucher, Zurich.
- LOVE A. E. H. (1927) - *Mathematical theory of elasticity*. 4th ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- MANDEL J. (1950) - *Étude mathématique de la consolidation des sols*. Act. du Coll. Int. Mech. de Poitiers, 4, 9.
- MC NAMEE J., GIBSON R. E. (1960 a) - *Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media*. Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 13.
- MC NAMEE J., GIBSON R. E. (1960 b) - *Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum*. Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 13.
- RENDULIC L. (1936) - *Porenziffer und Porenwasserdruck in Tonen*. Der Bauingenieur, 17.
- SCHULTZE E. (1963) - *Beispiele für Setzungsbeobachtungen in bindigen und nichtbindigen Boden*. Proc. Eur. Conf. Soil Mech. Found Eng., Wiesbaden.
- SCOTT R. F. (1963) - *Principles of soil mechanics*. Addison Wesley Publishing Co., Palo Alto, Calif.
- SKEMPTON A. W. (1954) - *The pore pressure coefficients A and B*. Geotechnique, IV.
- SKEMPTON A. W. (1961) - *Effective stress in soils, concrete and rock*. Proc. Conf. Pore Press. Suction in Soils, Butterworths, London.
- SKEMPTON A. W., BJERRUM L. (1957) - *A contribution to the settlement analysis of foundation on clay*. Geotechnique, VII.
- STEINBRENNER W. (1934) - *Tafeln zur Setzungsberechnung*. Die Strasse, vol. 1.
- TERZAGHI K. (1932) - *Die Berechnung der Durchlässigkeitziffer des Tonen aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen*. Ak. Wiss. Wien Mat. Nat. Klasse, II, 23.
- TERZAGHI K. (1943) - *Theoretical soil mechanics*. Wiley, New York.
- TIMOSHENKO S. (1934) - *Theory of elasticity*. Mc Graw Hill, New York.

## SUMMARY

### An analysis of initial conditions in the consolidation of a fluid saturated porous elastic medium.

The equations governing the three-dimensional consolidation of a porous elastic medium saturated by an incompressible fluid that obeys DARCY'S law are derived starting from the equilibrium and compatibility equations of the classical theory of elasticity and from the continuity condition; the equations obtained are the same derived by BIOT [1935, 1941 a] and independently by MANDEL [1950].

The simplified TERZAGHI-RENDULIC [RENDULIC, 1936; TERZAGHI, 1943; FLORIN, 1948] approach to three-dimensional consolidation is discussed, pointing out its practical advantages and its inconsistencies.

A complete solution of BIOT'S equations for other than very simple problems is an extremely difficult task, and so far it has been obtained only in a very limited number of cases. On the contrary, the initial stress and deformation conditions may be easily analyzed on the basis of the theory.

At the instant of loading no volume change may take place, due to the incompressibility of water and solid matter and to the finite permeability of the medium that does not allow any instantaneous flow of water. This condition leads to the equations (15) and (16), where  $u$  is the initial excess pore pressure and  $T$  the first invariant of total stress tensor.

Eq. (16) is much easier to handle in practice, due to the

many cases in which the expression of  $T$  is already available from the classical theory of elasticity.

On the basis of eq. (16) the expression of the excess pore pressure induced in an half-space by various types of loads normal or parallel to the surface has been obtained. Formulas and related graphs are given throughout the text (figg. 2, 3, 4) and in an Appendix.

SKEMPTON'S [1954] pore pressure equation is shown to be — for the elastic porous medium — a particular form of eq. (16) valid only for plane strain or axially symmetrical problems.  $A$  being equal to 1/2 and 1/3 respectively.

In other problems the equation is not applicable, since it does not take into account the intermediate principal stress  $\sigma_2$ ; accordingly  $A$  is not a constant, but it varies from point to point depending on stress conditions (fig. 5).

Going to real soils — as is well known —  $A$  varies within a very broad range due to non-linearity of stress-strain relationships and to dilatancy effects. HENKEL'S [1961] generalization of pore pressure equations (eq. 24) takes separately into account the volumetric and deviatoric components of total stress tensor; pore pressure parameter  $a$  does not depend on the state of stress.

In the case of the porous elastic medium, in absence of dilatancy effects,  $a$  equals 0 and HENKEL'S equations reduces to eq. (16).