

Tensioni nel sottosuolo e cedimenti dovuti a sforzi d'attrito sul piano di posa delle fondazioni *

R. JAPPELLI **

SOMMARIO: Si ricercano per via teorica gli sforzi orizzontali originati dall'attrito, che si sviluppa sulla superficie di contatto delle fondazioni con il terreno.

Una soluzione approssimata di questo problema di meccanica del terreno si è ottenuta con alcune ipotesi semplificative, per il caso della superficie a pianta circolare uniformemente caricata, imponendo la condizione che gli sforzi che si destano al contatto di una superficie *ruvida* abbiano l'intensità necessaria per annullare quegli spostamenti orizzontali, che si verificerebbero nel caso la fondazione avesse invece una base perfettamente *liscia*.

Dal calcolo risulta che i valori delle tensioni normali verticali nel sottosuolo e dei cedimenti del piano di posa, determinati dagli sforzi orizzontali così trovati, potrebbero raggiungere al massimo, nell'ordine di grandezza, il 20 ÷ 30% delle corrispondenti grandezze dovute ai carichi verticali, qualora il modulo di Poisson del terreno assumesse i valori estremi dell'intervallo, in cui sono compresi i risultati delle misure di questo modulo finora citate nella letteratura tecnica.

1. — Nel calcolo delle tensioni trasmesse al sottosuolo dalle opere di fondazione e dei relativi cedimenti si trascura, di regola, l'effetto degli sforzi orizzontali, che si destano al contatto delle strutture con il terreno.

È noto, tuttavia, che anche in assenza di componenti orizzontali dei carichi esterni questi sforzi sono nulli solo nell'ipotesi che la base della fondazione sia perfettamente liscia. Nei casi reali, in cui questa è sempre più o meno ruvida, il terreno è sollecitato al contatto della struttura da sforzi orizzontali, che certamente modificano lo stato tensionale nel sottosuolo ed i cedimenti determinati dai carichi esterni.

L'entità e la distribuzione degli sforzi orizzontali di contatto dipenderà, caso per caso, oltre che dallo stato di ruvidità della base della fondazione, dalla sua forma in pianta, dalla profondità del piano di posa, dalla rigidità della struttura, nonché dalle caratteristiche dei terreni di fondazione.

Lo studio del problema, nella sua generalità, appare, quindi, molto complesso. Alcuni autori accennano all'argomento [FRÖHLICH, 1934; TERZAGHI, 1943; KEZDI, 1958; SZECHY, 1963]; tuttavia, per

quanto risulta, nessuno ne approfondisce lo studio o ne fornisce un'impostazione generale. Allo stato non esiste, quindi, un criterio per stabilire, nei singoli casi, quale sia l'errore che si commette nel calcolare le tensioni ed i cedimenti supponendo la base della fondazione perfettamente liscia.

La soluzione del problema potrebbe ricercarsi per via sperimentale; a tale scopo occorrerebbe effettuare misure molto accurate delle sollecitazioni trasmesse al terreno da fondazioni di diverse caratteristiche in varie condizioni. Sono note, tuttavia, le difficoltà che ancora oggi si incontrano per la messa a punto di apparecchiature adatte a questo scopo e per l'interpretazione dei risultati delle misure.

Si ritiene, perciò, che un'impostazione teorica del problema e la sua risoluzione in qualche caso particolare, sia pure con alcune necessarie ipotesi semplificative, possano essere utili per un primo schema di interpretazione del meccanismo di trasmissione degli sforzi e per una valutazione dei parametri, che su di esso esercitano la loro influenza.

La presente memoria è un saggio di studio teorico del problema, con riferimento alla fondazione a pianta circolare. Le ipotesi semplificative riguardano la fondazione stessa ed il terreno e saranno introdotte nel corso della trattazione.

2. — È noto che gli spostamenti del piano di posa di una fondazione con base perfettamente liscia sottoposta a carichi verticali presentano, in generale, una componente verticale ed una componente orizzontale.

(*) Ricerca svolta con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche nel quadro d'attività del Gruppo di Lavoro Terreni e Strutture nel Centro Geotecnico della Sicilia, presso l'Istituto di Idraulica dell'Università di Palermo.

(**) Prof. Ing. Ruggiero JAPPELLI, Lib. Doc. Inc. di *Tecnica delle Fondazioni e Costruzioni in Terra (Geotecnica)* nell'Università di Palermo.

Si consideri, dapprima, il caso del carico concentrato verticale P applicato sul piano limite di un semispazio elastico, isotropo ed omogeneo. Con i simboli della fig. 1 la teoria dell'elasticità [BOUS-

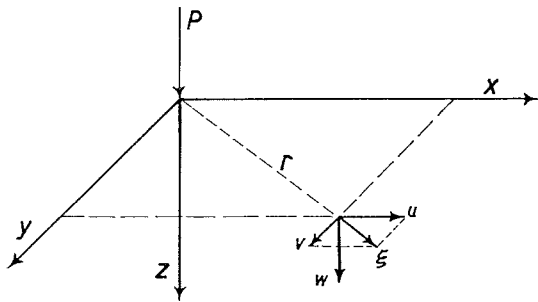


Fig. 1.

SINESQ, 1885] fornisce, in questo caso, le seguenti espressioni degli spostamenti u, v, w di un generico punto del piano limite:

$$u = -\frac{P}{2\pi} \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E} \frac{x}{r^2} \quad (1)$$

$$v = -\frac{P}{2\pi} \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E} \frac{y}{r^2}$$

$$w = \frac{P}{\pi} \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{1}{r}$$

in cui E e μ sono le note costanti elastiche di YOUNG e di POISSON.

Dalla composizione delle u e v può ricavarsi l'espressione dello spostamento orizzontale secondo la direzione del raggio r :

$$\xi = u \frac{x}{r} + v \frac{y}{r} = -\frac{P}{2\pi} \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E} \frac{1}{r} \quad (1')$$

Circa il segno, si noti che lo spostamento w è positivo quando è diretto verso il basso (cedimento); lo spostamento orizzontale radiale ξ è positivo se diretto verso l'esterno.

Risulta che gli spostamenti diminuiscono al crescere della distanza r . Essi dipendono, inoltre, dal modulo μ del materiale.

Quanto al valore di μ ed al suo campo di variabilità per i terreni, i dati disponibili sulla letteratura tecnica sono ancora piuttosto scarsi. L'argomento è stato oggetto di esame anche in occasione dei più recenti congressi internazionali, nei quali si è posto in evidenza che il modulo μ dipende, oltre che dal tipo di materiale, dalle sue

caratteristiche di deformabilità e dallo stato di sollecitazione cui esso è sottoposto. Senza entrare nel merito dei risultati sperimentali pubblicati, che appaiono ancora preliminari e non del tutto chiaramente interpretabili, ci si limita qui a rilevare che dalle misure eseguite sembrerebbe che per i terreni il suddetto modulo possa variare all'incirca nell'intervallo $0,2 \div 0,7$ [TERZAGHI, 1943; JAKOBSON, 1957]. Risulta così, secondo recenti studi, che alcuni terreni, sotto l'azione di sollecitazioni elevate, ma pur senza raggiungere il regime plastico, possono comportarsi come se fosse $\mu > 0,5$ [LORENZ, 1962; EGGESTAD, 1963].

Ritornando alla (1') si osservi che, ai fini della trattazione teorica, lo spostamento può essere positivo o negativo, secondo il valore di μ .

Per $\mu < 0,5$, cioè per materiali che tendono a diminuire di volume sotto l'azione degli sforzi applicati, lo spostamento orizzontale è negativo; per $\mu > 0,5$, cioè per materiali che si espandono, lo spostamento orizzontale è positivo; infine, nel caso particolare $\mu = 0,5$, lo spostamento risulta nullo in tutti i punti del piano limite.

In quanto sopra si ammette implicitamente, seguendo alcuni AA. [LORENZ, 1962], che, ai fini degli sviluppi matematici, le ipotesi della teoria della elasticità siano ancora approssimativamente valide anche per $\mu > 0,5$.

Tuttavia, per ricordare le incertezze che sussistono per $\mu > 0,5$, i diagrammi di cui alle figg. 4, 9, 11 e 12 della presente memoria sono indicati a tratteggio in questo campo dei valori del modulo di POISSON.

Gli spostamenti determinati da un carico ripartito su base perfettamente liscia ed infinitamente flessibile possono calcolarsi con le (1), applicando il principio della sovrapposizione degli effetti.

Nella presente nota ci si limita a considerare il caso del carico uniformemente ripartito con intensità p su di un'area circolare di raggio R del piano limite.

Con riferimento alla fig. 2, lo spostamento verti-

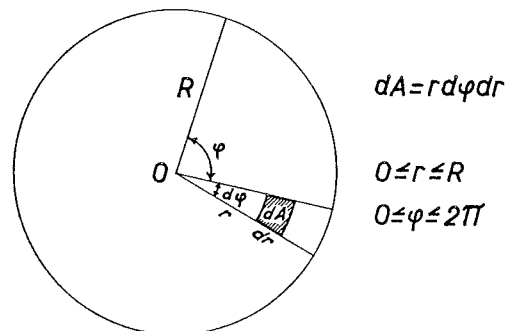


Fig. 2.

cale dw_p , del baricentro 0 dell'area per effetto del carico elementare $p \, dA = p \, r \, d\varphi \, dr$ vale:

$$dw_p = \frac{p}{\pi} \frac{1 - \mu^2}{E} \, d\varphi \, dr$$

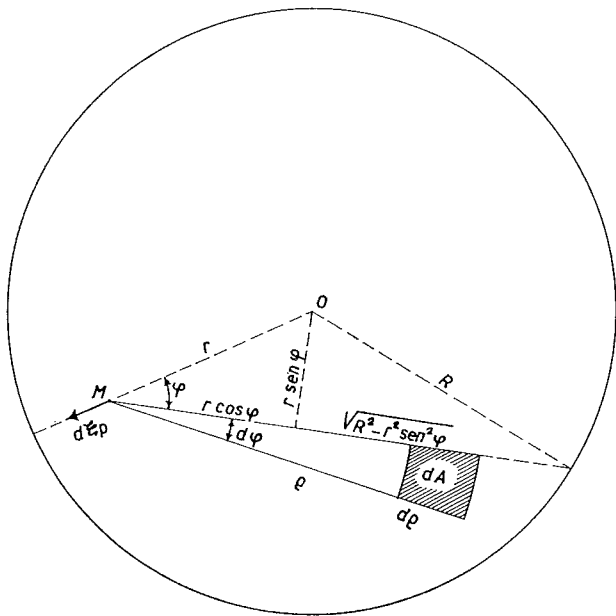
Integrando a tutta l'area si ottiene [TERZAGHI, 1943]:

$$w_p = \frac{p}{\pi} \frac{1 - \mu^2}{E} \int_0^{2\pi} \int_0^R d\varphi \, dr = \frac{2p(1 - \mu^2)}{E} R \quad (2)$$

Gli spostamenti orizzontali possono dedursi con procedimento analogo.

Nel baricentro dell'area lo spostamento orizzontale è nullo per la simmetria del carico. In un punto M interno all'area lo spostamento $d\xi_p$, dovuto al carico elementare generico $p \, dA = p \, \rho \, d\varphi$ vale per la (1') con i simboli della fig. 3:

$$d\xi_p = - \frac{p}{2\pi} \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E} \cos \varphi \, d\varphi \, d\rho$$



$$dA = \rho \, d\varphi \, d\rho$$

$$-\pi \leq \varphi \leq +\pi$$

$$0 \leq \rho \leq r \cos \varphi + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$$

Fig. 3.

Integrando, si ottiene:

$$\xi_p = - \frac{p}{2\pi} \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^R r \cos \varphi + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi \, d\varphi \, d\rho = - \frac{p}{2\pi} \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E} \left[r \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \varphi \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \right]$$

Il primo integrale vale π ; il secondo si annulla, come si riconosce facilmente, posto $k = \frac{r}{R}$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos \varphi \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = R \left[\frac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2k} \arcsen(k \sin \varphi) \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

Si ha così:

$$\xi_p = - \frac{p(1 - \mu - 2\mu^2)}{2E} r \quad (3)$$

Dalla (3), come già dalla (1'), risulta che lo spostamento orizzontale radiale di un generico punto del piano di posa può essere positivo o negativo, secondo il valore di μ . La dipendenza di ξ_p da μ è posta in evidenza dal diagramma di fig. 4, dal quale risulta che per $\mu < 0,5$ gli spostamenti sono diretti verso l'interno dell'area, mentre per $\mu > 0,5$ accade l'opposto.

3. - In realtà, affinché gli spostamenti orizzontali raggiungano i valori innanzi calcolati e possano liberamente verificarsi, è necessario, come si è già scritto, che la fondazione sia infinitamente flessibile con base perfettamente liscia.

Ferma restando la prima ipotesi, si consideri, in-

vece, una base ruvida. In tal caso lo spostamento è impedito, in tutto o in parte, per gli sforzi di attrito che si destano al contatto della base della fondazione con il terreno.

Per semplificare il problema, si ammetta l'ulteriore ipotesi che la base della fondazione, pur restando ruvida e flessibile, sia anche indeformabile nel piano orizzontale.

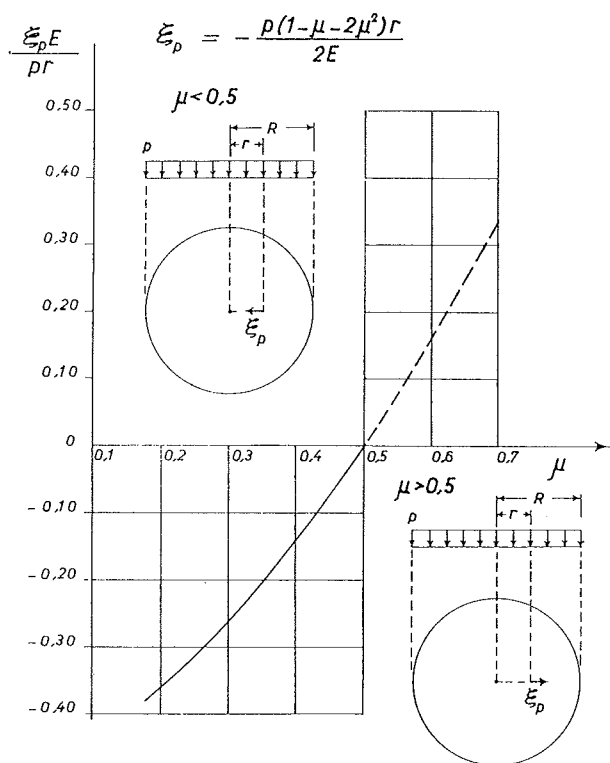


Fig. 4.

Si supponga, infine, che lo sforzo d'attrito s , che si desta in un determinato punto del piano di contatto, assuma il valore massimo non appena risulti $\xi \neq 0$.

Ammesse queste ipotesi, si può immaginare che ogni granello del terreno resti come *incollato* alla superficie di carico e che gli sforzi s assumano i valori corrispondenti alla condizione di spostamento del tutto impedito ($\xi = 0$). Questi sforzi tangenziali sollecitano il terreno in senso centripeto se $\mu > 0,5$ e nel senso opposto se $\mu < 0,5$.

Naturalmente, in ogni caso, la struttura di fondazione viene sollecitata da sforzi eguali e contrari ai precedenti.

In quanto si è scritto innanzi è implicito che, affinché l'esistenza di questi sforzi tangenziali sia fisicamente possibile, è necessario che la base sia molto ruvida; indicato, allora, con δ l'angolo d'at-

trito fra terreno e struttura, in ogni punto si dovrà destare quella frazione della resistenza limite $s_{lim} = p \operatorname{tg} \delta$ occorrente, affinché nel punto medesimo sia assicurata la condizione di spostamento orizzontale nullo.

Se la base non fosse sufficientemente ruvida, cioè se δ fosse piccolo in relazione al minimo valore occorrente per tenere i granelli come incollati alla base stessa, vi sarebbero spostamenti orizzontali almeno in quei punti, in cui si raggiungono sforzi di intensità s_{lim} . Naturalmente, sarebbero i granelli del terreno a muoversi rispetto alla struttura di fondazione, che si è supposta indeformabile. Ad esempio, i punti di una corona circolare più esterna potrebbero spostarsi ed in tutti i punti di questa corona sarebbe, allora, $s = s_{lim}$; in altri, più interni, si avrebbe ancora $s < s_{lim}$.

In ogni caso, la presenza degli sforzi tangenziali, di cui innanzi, modifica lo stato tensionale nel sottosuolo e, di conseguenza, gli spostamenti verticali (cedimenti). Per valutare l'importanza di questo effetto occorre, innanzitutto, calcolare il valore degli sforzi tangenziali. A tal fine si procederà qui imponendo una condizione di congruenza, ricercando, cioè, l'intensità degli sforzi tangenziali radiali, che è necessario applicare sul piano di posa per dar luogo a spostamenti eguali e contrari a quelli (3) che si verificherebbero per fondazione a base liscia sotto l'azione dei carichi verticali.

Tenuto conto di quanto già rilevato in precedenza (fig. 4), questi sforzi saranno diretti verso il baricentro dell'area se $\mu > 0,5$; nel senso opposto per $\mu < 0,5$.

4. - La ricerca dello spostamento orizzontale radiale di un punto del piano limite prodotto da sforzi tangenziali distribuiti su di una area circolare

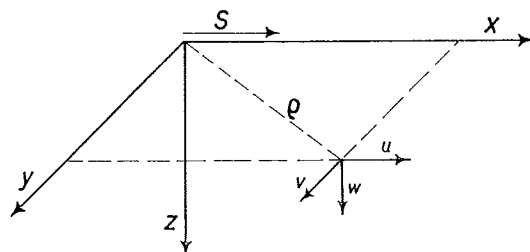


Fig. 5.

può condursi partendo dalle note espressioni (CERRUTI, 1882) degli spostamenti u e v di un generico punto del piano limite per effetto di una forza concentrata S orizzontale, che giace nel piano medesimo, e procedendo per sovrapposizione degli effetti.

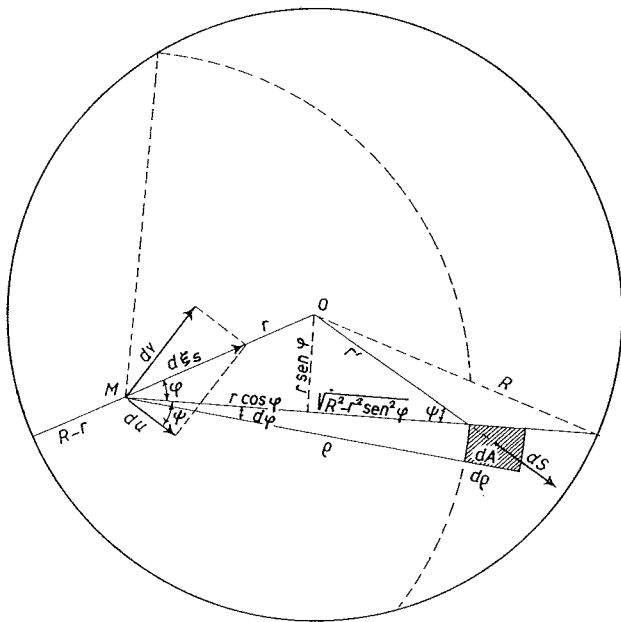
Con i simboli della fig. 5 si ha per la forza concentrata:

$$u = \frac{S(1+\mu)}{\pi E} \left[(1-\mu) \frac{1}{\rho} + \mu \frac{x^2}{\rho^3} \right]$$

$$v = \frac{S}{\pi E} \mu (1+\mu) \frac{xy}{\rho^3} \quad (4)$$

$$w = \frac{S}{2\pi E} (1+\mu) (1-2\mu) \frac{x}{\rho^2}$$

Nella fig. 6 è rappresentata una forza orizzontale di intensità $dS = s dA = s \rho d\varphi d\rho$ agente su di una area elementare dA della superficie circolare di raggio R . Questa forza determina nel punto generico M uno spostamento, le cui componenti nella direzione della dS medesima ed in quella normale possono indicarsi con du e dv .



$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$dS = s dA = \rho d\varphi d\rho$$

$$0 \leq \rho \leq r \cos \varphi + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \varphi} = \rho_{max}$$

Fig. 6.

Qui interessa la componente $d\xi_s$ dello spostamento secondo il raggio r del cerchio; con i simboli della fig. 6 essa ha la seguente espressione:

$$d\xi_s = du \cos(\varphi + \psi) + dv \sin(\varphi + \psi) =$$

$$= du (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) +$$

$$+ dv (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) =$$

$$= (du \cos \psi + dv \sin \psi) \cos \varphi +$$

$$+ (dv \cos \psi - du \sin \psi) \sin \varphi \quad (5)$$

Tenuto conto che:

$$x = \rho \cos \psi \quad ; \quad y = \rho \sin \psi$$

risulta per le (4):

$$du = \frac{s(1+\mu)}{\pi E} (1 - \mu + \mu \cos^2 \psi) d\varphi d\rho \quad (6)$$

$$dv = \frac{s\mu(1+\mu)}{\pi E} \cos \psi \sin \psi d\varphi d\rho$$

Sostituendo le (6) nella (5) ed integrando, risulta per lo spostamento nel punto generico M :

$$\xi_s = \frac{1+\mu}{\pi E} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{max}} s [(1-\mu) \cos \psi + \mu \cos^3 \psi + \mu \cos \psi \sin^2 \psi] \cos \varphi d\varphi d\rho + \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{max}} s (1-\mu) \sin \psi \sin \varphi d\varphi d\rho \right] \quad (7)$$

La (7) è l'espressione generale dello spostamento orizzontale radiale che si verifica in un punto generico di una superficie circolare sottoposta ad un sistema di sforzi tangenziali diretti secondo il raggio.

La (3) rappresenta, invece, lo spostamento orizzontale radiale che si verificherebbe nel medesimo punto per effetto di carichi verticali uniformemente ripartiti.

Nelle ipotesi ammesse, il calcolo degli sforzi tangenziali s che si destano al contatto tra il terreno ed una fondazione con base ruvida, può effettuarsi imponendo la condizione:

$$\xi_s = \xi_p \quad (*)$$

Per risolvere in via approssimata l'equazione (*) si procederà qui per tentativi, formulando delle ipotesi sulla distribuzione degli sforzi s nell'area in esame e ricercando le corrispondenti soluzioni degli integrali che compaiono nella (7).

5. - Si supponga, dapprima, che la s sia uniformemente distribuita come in fig. 7 a. In una seconda ipotesi, che si giudica più aderente alla realtà fisica del fenomeno oggetto di studio, si ammetta che la s sia linearmente variabile da 0 nel baricentro dell'area fino ad un valore s_1 al contorno, secondo la legge (v. fig. 7 b):

$$s = \frac{r}{R} s_1 = k s_1 \quad (8)$$

Nella prima ipotesi di distribuzione uniforme, dopo una serie di sviluppi, per i quali si rimanda

all'appendice, lo spostamento radiale ξ_s assume la seguente espressione:

$$\xi_s = - \frac{s(1 - \mu^2)}{\pi E} R k \left[\pi \ln \frac{1}{k} + \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varphi - \text{sen } \varphi \cos \varphi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\text{sen } \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\text{sen } \varphi \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}} \right) d\varphi \right] \quad (7'')$$

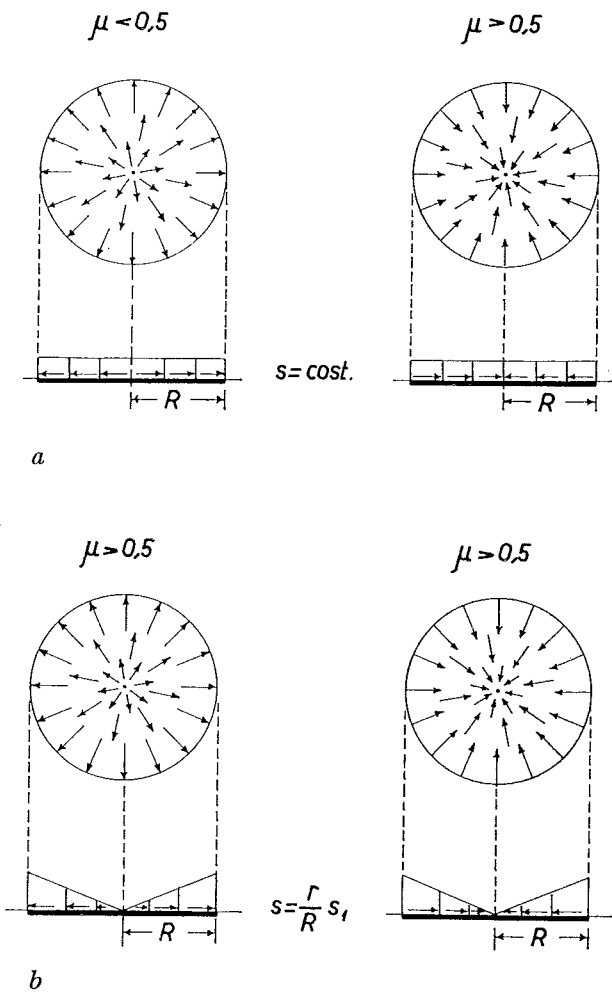


Fig. 7.

Nel caso generale $0 < r < R$ la soluzione dell'integrale, che compare nella (7'') comporta difficoltà notevoli. Tuttavia, per $r = R$, cioè al contorno dell'area, l'espressione (7'') si semplifica:

$$\xi_{sR} = - \frac{s(1 - \mu^2)}{\pi E} 2 R \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi - \text{sen } \varphi \cos \varphi}{\text{sen } \varphi} d\varphi =$$

$$= - \frac{s(1 - \mu^2)}{\pi E} 2 R \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\varphi}{\text{sen } \varphi} d\varphi - \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right] \quad (7''')$$

Il primo integrale, che compare nella precedente espressione, può risolversi come segue:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\varphi}{\text{sen } \varphi} d\varphi = \left[\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2(2^{2n-1} - 1)}{(2n+1)(2n)!} B_{2n} \varphi^{2n+1} \right]_0^{\pi/2} \quad (9)$$

dove la B_{2n} indicano i numeri di una particolare serie di BERNOULLI [GRÖBNER, HOFREITER, 1965; JAHNKE, EMDE, LÖSCH, 1960].

Il valore della (9), limitando lo sviluppo della serie ai primi quattro termini, risulta pari a 1,83. Dalla integrazione grafica, eseguita con il planimetro, della funzione $\varphi/\text{sen } \varphi$ risulta per la (9) il valore 1,86.

In definitiva, tenuto conto che il secondo integrale della (7''') vale 1, lo spostamento radiale ξ_{sR} di un punto del contorno assume la seguente espressione:

$$\xi_{sR} = - 0,86 s \frac{1 - \mu^2}{\pi E} 2 R \quad (10)$$

Per $r = 0$ si verifica facilmente dalla (7'') che risulta $\xi_{s0} = 0$.

Con la seconda ipotesi, innanzi accennata, di distribuzione linearmente variabile per la s , la (7) si trasforma nella seguente, che si deduce facilmente partendo dalla (7') dell'appendice (1):

$$\xi_s = \frac{s_1}{R \pi E} (1 + \mu) \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{\max}} (\rho - r \cos \varphi) \cdot \cos \varphi d\varphi d\rho - (1 - \mu) \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{\max}} r \text{sen}^2 \varphi d\varphi d\rho \right]$$

(1) Con riferimento alla fig. 6, si indica qui con r' la distanza, che intercorre fra l'area elementare dA ed il baricentro 0. Si ha:

$$r' = \sqrt{r^2 \text{sen}^2 \varphi + (\rho - r \cos \varphi)^2}$$

Il valore generico della s assume, allora, la seguente espressione:

$$s = \frac{r'}{R} s_1 = \frac{s_1}{R} \sqrt{r^2 \text{sen}^2 \varphi + (\rho - r \cos \varphi)^2}$$

Il primo integrale vale:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{\max}} (\rho - r \cos \varphi) \cos \varphi \, d\varphi \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \left[\operatorname{sen} \varphi \right]_0^{2\pi}$$

Per il secondo integrale si ha:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{\max}} r \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi \, d\rho = \int_0^{2\pi} r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}^2 \varphi \sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \, d\varphi =$$

$$= \left[\frac{r^2 \operatorname{sen}^3 \varphi}{3} \right]_0^{2\pi} + Rr \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \, d\varphi$$

Risulta, così

$$\xi_s = \frac{s_1}{R \pi E} (1 + \mu) \left\{ \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \left[\operatorname{sen} \varphi \right]_0^{2\pi} - \right.$$

$$- (1 - \mu) r^2 \left[\frac{\operatorname{sen}^3 \varphi}{3} \right]_0^{2\pi} +$$

$$\left. - (1 - \mu) Rr \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \, d\varphi \right\} \quad (11)$$

Nel caso generale $0 < r < R$ i limiti di integrazione sono quelli indicati, per cui i primi due termini sono nulli e risulta:

$$\xi_s = - \frac{s_1}{\pi E} (1 - \mu^2) R k \cdot$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \, d\varphi$$

L'integrale è del tipo ellittico e la soluzione può esprimersi come segue [GRÖBNER, HOFREITER, 1965; JAHNKE, EMDE, LÖSCH, 1960]:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \, d\varphi = \left[\frac{1 - k^2}{3 k^2} F(\varphi, k) + \right.$$

$$\left. - \frac{1 - 2 k^2}{3 k^2} E(\varphi, k) \right]_0^{2\pi} = A(k)$$

Lo spostamento ξ_s assume allora la seguente espressione:

$$\xi_s = - \frac{s_1}{\pi E} (1 - \mu^2) R k A(k) \quad (11'')$$

Dalla (11') si verifica facilmente che per $r = 0$ ($k = 0$) risulta $\xi_{s0} = 0$.

Nel caso $r = R$ ($k = 1$) l'integrazione va estesa da $\varphi = -\pi/2$ a $\varphi = +\pi/2$, per cui dalla (11) si ha facilmente:

$$\xi_{sR} = - \frac{4}{3} \frac{s_1}{\pi E} (1 - \mu^2) R \quad (10)$$

Al contorno dell'area è possibile anche un confronto fra le soluzioni trovate nelle due ipotesi, innanzi ammesse. Dalle (10) e (10') risulta così che una distribuzione lineare degli sforzi s con ordinata massima s_1 al contorno dell'area determina uno spostamento orizzontale eguale a quello prodotto da una distribuzione uniforme di intensità $0,775 s_1$. Ciò conferma che le due soluzioni trovate forniscono risultati paragonabili nel loro ordine di grandezza. Nel seguito, tuttavia, si farà riferimento alla seconda soluzione, valida in tutto l'intervallo $0 \leq k \leq 1$ e basata su di un'ipotesi, che si giudica più aderente alla realtà.

Dalle (11'') e (10') risulta:

$$\frac{\xi_s}{\xi_{sR}} = \frac{3}{4} k A(k)$$

L'andamento della ξ_s/ξ_{sR} è rappresentato nella fig. 8 in funzione di k . Si osservi che, per semplificare i successivi passaggi, alla curva calcolata può

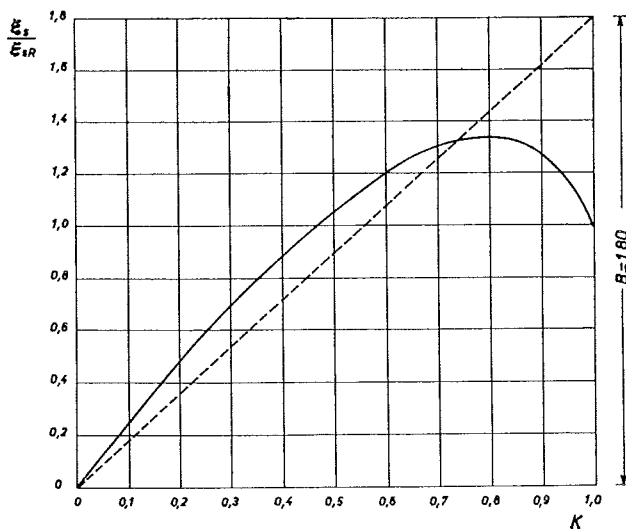


Fig. 8.

sostituirsi senza grave errore la funzione lineare rappresentata nella medesima figura:

$$\frac{\xi_s}{\xi_{sR}} = B k$$

con B che si aggira intorno a 1.80.

In questa ipotesi semplificativa la (11'') si scrive:

$$\xi_s = -\frac{4}{3} \frac{s_1}{\pi E} (1 - \mu^2) B R k \quad (11''')$$

6 - La formula (11''') può valere come espressione approssimata dello spostamento orizzontale radiale ξ_s che si verifica in un punto generico di un'area circolare di raggio R per effetto di un sistema di sforzi orizzontali distribuiti con legge triangolare con ordinata massima s_1 al contorno.

La (3) ricavata nel paragrafo 2 fornisce, invece, lo spostamento orizzontale radiale ξ_b , che si verificherebbe nel medesimo punto di una fondazione con base liscia sottoposta all'azione di carichi verticali p uniformemente ripartiti. Risulta che anche questo spostamento, nelle ipotesi ammesse, è linearmente variabile con la distanza dal baricentro dell'area:

$$\xi_b = -\frac{p (1 - \mu - 2 \mu^2)}{2 E} k R \quad (3')$$

Introdotte le espressioni (11''') e (3') nella (*), si ricava facilmente il valore s_1 dello sforzo unitario orizzontale che dovrebbe destarsi per annullare tale spostamento in ogni punto dell'area:

$$s_1 = \frac{3}{8} \frac{1 - 2 \mu}{1 - \mu} \frac{\pi}{B} p = C p \quad (12)$$

dove la C è funzione solo del modulo μ .

Per $\mu = 0,5$ gli spostamenti orizzontali ξ_b sono nulli e si ritrova $C = 0$; $s_1 = 0$. per $\mu < 0,5$ gli spostamenti tenderebbero a verificarsi verso l'interno dell'area; quindi, risulta s rivolto verso l'esterno ($C > 0$). Per $\mu > 0,5$ accade l'opposto e lo sforzo s cambia segno ($C < 0$).

L'andamento della C in funzione del modulo di Poisson è rappresentato in fig. 9, nel campo in cui più frequentemente ricadono i valori sperimentali di μ riportati sulla letteratura.

E' interessante confrontare i valori dello sforzo s, innanzi dedotto, con quelli che corrispondono alla resistenza limite $s_{lim} = p \operatorname{tg} \delta$ allo slittamento fra terreno e struttura. Ricordando la (8), risulta $s < s_{lim}$ quando $kC < \operatorname{tg} \delta$. La suddetta condizione può verificarsi in tutto l'intervallo $0 \leq k \leq 1$ solo

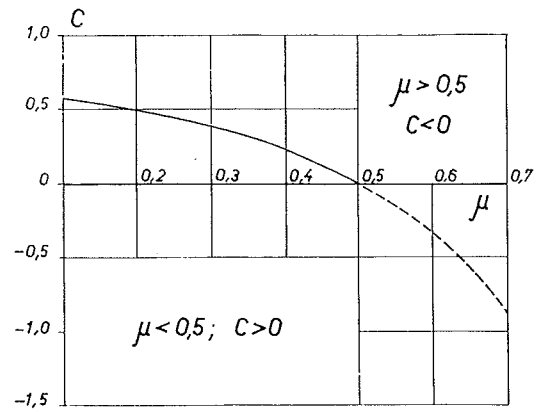


Fig. 9.

se $-\operatorname{tg} \delta < C < +\operatorname{tg} \delta$, cioè se il modulo μ del terreno risulta compreso tra i valori:

$$\frac{1 - D}{2 - D} < \mu < \frac{1 + D}{2 + D}$$

avendo posto $D = (8B/3\pi)\operatorname{tg} \delta$. Per valori di μ esterni all'anzidetto intervallo, si raggiunge la condizione limite $s = s_{lim}$ in tutta la corona circolare definita da $\operatorname{tg} \delta / C < k < 1$.

Dalla fig. 9 risulta immediatamente l'intervallo dei valori di μ , in cui si verifica $s < s_{lim}$ per un determinato valore di δ . Posto, ad esempio, $\delta = 20^\circ$, $\operatorname{tg} \delta = 0,36$, risulta $s < s_{lim}$ all'incirca nell'intervallo $0,3 < \mu < 0,6$.

7. - Per compiere ora un altro passo innanzi occorre ricercare quale influenza esercitino gli sforzi orizzontali s sulle tensioni agenti nel sottosuolo e quindi sui cedimenti.

Per quanto riguarda le tensioni, si limitino le considerazioni alle tensioni normali agenti sugli elementi piani orizzontali situati a profondità variabile lungo la verticale baricentrica dell'area.

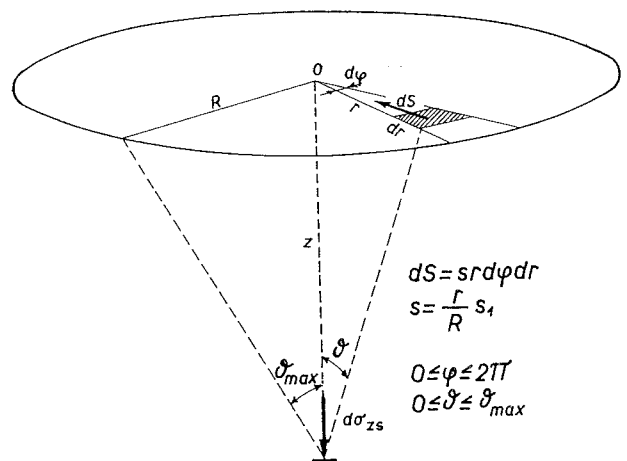


Fig. 10.

Applicando una nota formula [CERRUTI, 1882], la tensione $d\sigma_{zs}$ dovuta ad una forza concentrata dS orizzontale agente su di un'area elementare del piano limite (v. fig. 10) può esprimersi come segue:

$$d\sigma_{zs} = \frac{3 s r d\varphi dr}{2 \pi z^2} \operatorname{sen} \vartheta \cos^4 \vartheta$$

Si ha:

$$r = z \operatorname{tg} \vartheta ; \quad dr = \frac{z d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$$

Sostituendo, semplificando e ricordando la (8) risulta:

$$d\sigma_{zs} = \frac{3 s_1 z}{2 \pi R} \operatorname{sen}^3 \vartheta d\varphi d\vartheta$$

Integrando a tutta l'area:

$$\sigma_{zs} = \frac{3 s_1 z}{2 \pi R} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta_{\max}} \operatorname{sen}^3 \vartheta d\vartheta = \frac{3 s_1 z}{2 \pi R} \cdot$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta - \cos \vartheta \right] d\varphi =$$

$$= \frac{s_1 z}{R} (\cos^3 \vartheta_{\max} - 3 \cos \vartheta_{\max} + 2)$$

Posto $\lambda = \frac{z}{R}$ la precedente si trasforma con facili passaggi:

$$\sigma_{zs} = s_1 \lambda \left[2 - \frac{3 \lambda + 2 \lambda^3}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} \right]$$

D'altra parte, per un carico verticale uniformemente ripartito con intensità p sull'area in esame, si ha, come è noto, [TERZAGHI, 1943]:

$$\sigma_{zp} = p (1 - \cos^3 \vartheta_{\max}) = p \left[1 - \frac{\lambda^3}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} \right]$$

Ricordando la (12) risulta:

$$\frac{\sigma_{zs}}{\sigma_{zp}} = C \left[2 \lambda - \frac{3 \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^{3/2} - \lambda^3} \right] \quad (13)$$

Si riconosce che l'espressione entro parentesi quadra tende a 0 per $\lambda \rightarrow 0$ e per $\lambda \rightarrow \infty$.

Il valore trovato per il rapporto σ_{zs}/σ_{zp} è rappresentato in funzione di λ e di μ con i diagrammi di fig. 11. Risulta, ad esempio, che per $\mu = 0,2$ l'influenza di σ_{zs} sulla σ_{zp} si riduce a valori inferiori al

10% circa non appena $\lambda > 2$. Naturalmente, come i diagrammi pongono bene in evidenza, l'influenza è tanto maggiore quanto più il modulo μ si discosta in più o in meno dal valore 0,5; si riconosce, tuttavia, che con terreni di fondazione che si comportano con $\mu > 0,5$ l'influenza di una determinata variazione di μ è più marcata di quanto non lo sia nel campo $\mu < 0,5$.

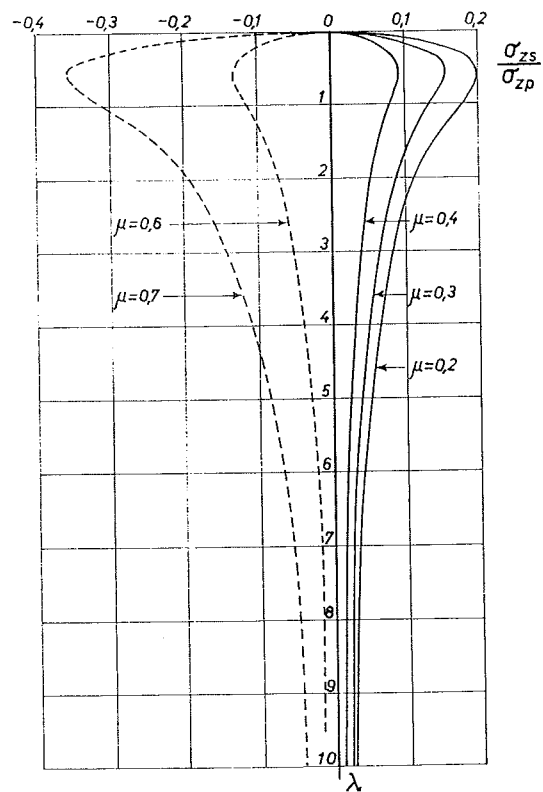


Fig. 11.

Si vuole valutare, infine, l'effetto della presenza degli sforzi orizzontali s sul cedimento che si verifica nel baricentro dell'area.

Sempre con riferimento alla fig. 10, ricordando la terza delle (4), il cedimento dw_s del punto in cui la verticale z interseca il piano limite sollecitato da una forza elementare orizzontale di intensità $sr d\varphi dr$, vale:

$$dw_s = \frac{s (1 + \mu) (1 - 2 \mu)}{2 \pi E} d\varphi dr$$

Ricordando la (8) ed integrando, si ha:

$$w_s = \frac{s_1 (1 + \mu) (1 - 2 \mu)}{2 \pi E R} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr =$$

$$= \frac{s_1 (1 + \mu) (1 - 2 \mu)}{2 E} R$$

Risulta, così, che, per un dato verso degli sforzi s , lo spostamento verticale del baricentro dell'area è positivo o negativo secondo il valore di μ : per $\mu < 0,5$ si ha $w_s > 0$, mentre per $\mu > 0,5$ risulta $w_s < 0$. Dalle precedenti considerazioni è già noto, tuttavia, che i mezzi caratteristici da $\mu < 0,5$ sono sollecitati in senso centrifugo ($C > 0$), mentre per $\mu > 0,5$ gli sforzi s sono diretti in senso centripeto ($C < 0$). In realtà, quindi, lo spostamento w_s , qualunque sia μ , è sempre positivo, cioè diretto verso il basso. Ciò risulta chiaramente introducendo nella precedente espressione la (12) e ricordando i segni della C già richiamati:

$$w_s = C p \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{2 E} R \quad (14)$$

Ricordando l'espressione (2) del cedimento dovuto ad un carico verticale uniformemente distribuito con intensità p , risulta, infine:

$$\frac{w_s}{w_p} = C \frac{1 - 2\mu}{4(1 - \mu)} = \frac{3}{32} \frac{\pi}{B} \frac{(1 - 2\mu)^2}{(1 - \mu)^2} \quad (14')$$

Per $\mu = 0,5$ la fondazione si comporta come se la base fosse perfettamente liscia e si ritrova $w_s/w_p = 0$.

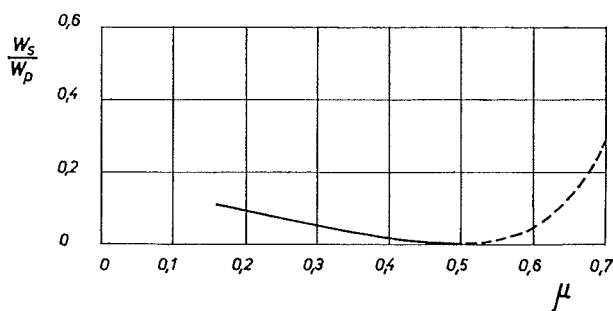


Fig. 12.

L'influenza di μ sul valore w_s/w_p è posta in evidenza dal diagramma di fig. 12. Si può osservare che, nelle ipotesi ammesse e per μ compreso nell'intervallo $0,2 < \mu < 0,7$ l'incremento di cedimento che si verifica per effetto degli sforzi orizzontali, raggiunge al massimo, all'incirca, il 30% del cedimento determinato dai carichi verticali.

Per un'immediata interpretazione dei precedenti sviluppi si riassumono nella tabella i segni delle grandezze introdotte nei calcoli.

μ	ξ_s	s	C	σ_{ss}	w_s
$< 0,5$	+	centrifugo	+	+	+
$> 0,5$	-	centripeto	-	-	-

N. B. ξ positivi se diretti verso l'esterno.
 w positivi se diretti verso il basso.

8. Conclusioni.

La teoria esposta nella presente memoria consente di valutare in via approssimata l'entità degli sforzi orizzontali, che si destano per attrito al contatto fra una superficie di carico ed il terreno.

Le ipotesi semplificative ammesse nella trattazione riguardano il terreno, che si è assimilato ad un semispazio omogeneo, isotropo ed elastico; la fondazione, che si è supposta costituita da una membrana infinitamente flessibile e, tuttavia, indeformabile nel piano orizzontale; gli sforzi tangenziali, il cui meccanismo di trasmissione si è immaginato avvenire come per il tramite di una *colla* infinitamente rigida.

Dai calcoli effettuati per la superficie circolare, che, peraltro, potrebbero estendersi a superfici di forma diversa, si deduce che le tensioni normali verticali nel sottosuolo ed i cedimenti del piano limite determinati dagli sforzi orizzontali rappresentano una frazione delle corrispondenti grandezze dovute ai soli carichi verticali.

L'errore, che si commette nel trascurare l'influenza degli sforzi orizzontali, è nullo solo se il modulo di Poisson del terreno $\mu = 0,5$; per $\mu \neq 0,5$ esso è tanto più elevato quanto più il modulo si discosta dal predetto valore, fino a raggiungere al massimo nell'ordine di grandezza il 20 ÷ 30% allorchè μ si avvicina ai valori estremi dell'intervallo, in cui sono compresi i risultati delle misure di questo modulo riportati sulla letteratura tecnica.

Quanto alle ipotesi semplificative ed alla loro influenza sui risultati ottenuti, alcune di esse sono ben note e le loro limitazioni comuni a numerose trattazioni di problemi di meccanica dei terreni.

Per le ultime due si può dire, invece, che in realtà la fondazione non è certo rigorosamente indeformabile e che, inoltre, la relazione che lega gli spostamenti orizzontali ai corrispondenti sforzi è certamente ben più complessa di quella qui immaginata; in particolare, gli spostamenti orizzontali hanno certamente un valore finito allorchè gli sforzi raggiungono il loro valore massimo.

Per entrambi questi motivi gli sforzi orizzontali e, quindi, i loro effetti nei riguardi delle tensioni nel sottosuolo e dei cedimenti potranno essere, nella realtà, inferiori ai valori innanzi calcolati.

APPENDICE

Con riferimento alla fig. 7 si osservi che:

$$\cos \psi = \frac{\rho - r \cos \varphi}{\sqrt{(\rho - r \cos \varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}; \quad \operatorname{sen} \psi = \frac{r \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{(\rho - r \cos \varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Sostituendo nella (7) risulta:

$$\begin{aligned} \xi_s = & \frac{s(1+\mu)}{\pi E} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{\max}} \left[(1-\mu) \frac{\rho - r \cos \varphi}{\sqrt{(\rho - r \cos \varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} + \mu \frac{(\rho - r \cos \varphi)^3}{[(\rho - r \cos \varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]^{3/2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu \frac{\rho - r \cos \varphi}{\sqrt{(\rho - r \cos \varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \cdot \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{(\rho - r \cos \varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right] \cos \varphi \, d\varphi \, d\rho + \right. \\ & \left. - (1-\mu) \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{\max}} \frac{r \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{(\rho - r \cos \varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \, d\varphi \, d\rho \right\} = \frac{s(1+\mu)}{\pi E} \cdot \\ & \cdot \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{\max}} \frac{\rho - r \cos \varphi}{\sqrt{(\rho - r \cos \varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \cos \varphi \, d\varphi \, d\rho - (1-\mu) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_{\max}} \frac{r \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{(\rho - r \cos \varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \, d\varphi \, d\rho \right] \end{aligned} \quad (7')$$

Con la posizione: $\rho - r \cos \varphi = t$; $d\rho = dt$; il primo integrale si trasforma nel seguente:

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \int_{t=-r \cos \varphi}^{t=\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \frac{t}{\sqrt{t^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \, dt$$

L'integrale in dt si riduce alla seguente espressione:

$$\left[\sqrt{t^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right]_{t=-r \cos \varphi}^{t=\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = R - r$$

Sostituendo, si ha quindi:

$$\int_0^{2\pi} (R - r) \cos \varphi \, d\varphi = (R - r) \left[\operatorname{sen} \varphi \right]_0^{2\pi} = 0$$

Con il medesimo cambiamento di variabile il secondo integrale della (7') diventa:

$$\int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi \int_{t=-r \cos \varphi}^{t=\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \frac{1}{\sqrt{t^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \, dt$$

L'integrale in dt si riduce alla seguente espressione:

$$\ln \left[t + \sqrt{t^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right]_{t = -r \cos \varphi}^{t = \sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \ln \frac{\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + R}{r (1 - \cos \varphi)}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}^2 \varphi \ln \frac{\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + R}{r (1 - \cos \varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} r \ln \frac{\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + R}{r (1 - \cos \varphi)} d \left(\frac{\varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} \right) = \\ & = r \left[\frac{\varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} \ln \frac{\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + R}{r (1 - \cos \varphi)} \right]_0^{2\pi} + r \int_0^{2\pi} \frac{\varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} d \left(\ln \frac{\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + R}{r (1 - \cos \varphi)} \right) = \\ & = r \left[\pi \ln \frac{R}{r} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} \cdot \frac{r^2 \operatorname{sen} \varphi (1 - \cos \varphi) - R \operatorname{sen} \varphi (R + \sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi})}{(1 - \cos \varphi) [R (\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + R) - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]} d\varphi \right] \end{aligned}$$

Con facili passaggi, che si omettono per brevità, e posto $k = \frac{r}{R}$ questa espressione si trasforma nella seguente:

$$Rk \left[\pi \ln \frac{1}{k} + \int_0^{2\pi} \frac{\varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right) d\varphi \right]$$

da cui la (7'').

BIBLIOGRAFIA

- AUTORI VARI (1955) - *Grundbau Taschenbuch*, Vol. I. Wilhelm Ernst, Berlino.
- BOUSSINESQ (1885) - *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier Villard, Parigi.
- CERRUTI (1882) - *Acc. Lincei, Mem. Fis. Mat.*, Roma.
- EGGESTAD A. (1963) - *Deformation measurements below a model footing on the surface of dry sand*. Proc. Eur. Conf. Soil Mech. a. Found. Eng., Wiesbaden.
- FRÖHLICH O. (1934) - *Druckverteilung im Baugrunde mit besonderer Berücksichtigung der plastischen Erscheinungen*. Springer, Vienna.
- GRÖBNER, HOFREITER (1965) - *Integraltafeln*. Springer, Berlino.
- JAHNKE, EMDE, LÖSCH (1960) - *Tafeln höherer Funktionen*. Teubner, Leipzig.
- JAKOBSON B. (1957) - *Some fundamental properties of sand*. Proc. IV Int. Conf. Soil Mech. a. Found. Eng., Vol. I, Londra.
- KEZDI A. (1958) - *Beiträge zur Berechnung der Spannungsverteilung im Boden*. Bauingenieur, 2.
- LORENZ H. (1963) - *Verdichtung und Verdrängung als Mass für die Tragfähigkeit von Gründungen auf rolligem Boden*. Vorträge der Baugrundtagung im Essen - Wilh. Ernst., Berlino.
- OHDE J. (1939) - *Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund*. Bauingenieur, 8.
- SZECZY K. (1963) - *Der Grundbau*. Springer, Berlino.
- TERZAGHI K. (1943) - *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley, New York.

SUMMARY

Stresses and displacements due to frictional resistance at the base of foundations

SUMMARY: In Soil Mechanics investigations concerning stresses and displacements of the subsoil it is generally assu-

med that the shearing stresses at the base of foundations are equal to zero. It is well known, however, that even in absence of horizontal components of external loads, these stresses are zero only if the base is perfectly smooth.

In reality, the intensity and the distribution of horizontal

contact stresses depend in different cases on the properties of the soil, on the state of roughness and on the shape of the horizontal section of the base, on the depth of the foundation plane and on the rigidity of the whole structure.

In the present article an approximate theoretical solution of the problem is obtained for a circular uniformly loaded surface under some simplifying assumptions.

The assumptions concern the foundation, that is regarded as perfectly flexible and unstretchable in the horizontal plane; the soil, considered as an elastic half-space; and, finally, the mechanism of transmission of frictional stresses, assumed to reach in a certain point their maximum value as soon as in the same point the horizontal displacement is different from zero.

From the known expressions of the displacement of a point of a semi-infinite solid due to a concentrated horizontal load (CERRUTI, 1882), applying the principle of superposition of stress and strain, a formula is found for the horizontal displacement ξ_s of a point of a circular surface submitted to a certain system of radial tangential stresses s .

On the other hand a known expression is available for the horizontal displacement ξ_p of the same point if the applied load is vertical and uniform with intensity p .

With these expressions a congruence equation

$$\xi_s = \xi_p \quad (*)$$

is written, imposing that the horizontal contact stresses, that become active for a vertically uniformly loaded foundation with a rough base, have the intensity necessary to just counteract those horizontal displacements, that would develop in case of a similar foundation with a perfectly smooth base.

An approximate solution of equation (*) furnishes the intensity s of the tangential stresses developing at the base of a rough foundation loaded by a vertical uniform load p . Such tangential stresses disappear only if the Poisson's ratio μ of the soil has the value of 0,5.

A successive computation shows that for $\mu \neq 0,5$ the normal stresses induced in the subsoil by the above found system of surface tangential loads and the corresponding vertical displacements of the foundation plane would reach at their maximum the 20 ÷ 30% of the corresponding values due to the vertical loads, if the Poisson's ratio of the soil attains the extremes of the interval of experimental values reported in scientific literature.