FENOMENI DI PLASTICIZZAZIONE IN GALLERIE O IN CAVERNE NATURALI

Esempio di calcolo del rivestimento di una galleria

A. GIAMMONA (*)

SOMMARIO: Si studia il comportamento di una galleria scavata artificialmente, o di una caverna naturale che possa considerarsi di forma cilindrica, sotto l'azione di pressioni q esercitantisi uniformemente dalle rocce circostanti (ammissione per rendere l'analisi accessibile al calcolo). Si considera la condizione di plasticizzazione iniziale (~ inizio di rottura) in corrispondenza della parete interna. Supposto per contro che uno strato anulare di roccia circondante il cavo si plasticizzi completamente, si determina la pressione mutua q lungo la superficie cilindrica di confine fra lo strato interno plasticizzatosi e la massa rocciosa elastica circostante. Si calcola infine la resistenza minima da attribuire al rivestimento interno della galleria perchè la plasticizzazione (~ la rottura) della zona anulare interna non si verifichi.

1 - Tensione interna nello strato elastico

Una galleria supposta cilindrica e orizzontale di raggio r_1 (figura 1) venga sollecitata da una pressione q che si possa considerare uniformemente ripartita su altra superficie cilindrica di raggio $r_2 > r_1$. È noto che, ove non vengano raggiunti i limiti elastici in un punto A della superficie di raggio generico r

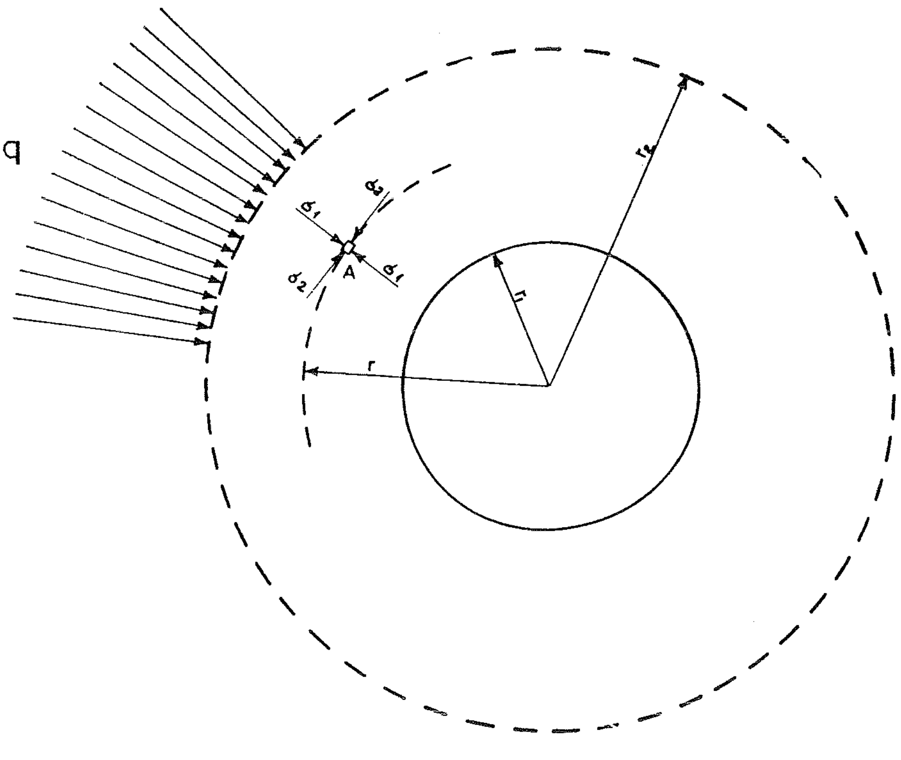

Fig. 1

(*) Dott. Ing. Antonio GIAMMONA, Ispra.

si manifestano due sollecitazioni, radiale σ_1, circonferenziale σ_2, entrambe di compressione e date dalla [1]:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) q \\ \sigma_2 &= \frac{r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) q\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$(q > 0)$ caratteristiche dello stato elastico.

In particolare sulla parete interna di raggio r_1, cioè per $r = r_1$ si hanno le sollecitazioni:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= 2\frac{r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} q = 2\frac{1}{\Gamma^2 - 1} q < 0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

avendo posto il *grado di cavità:*

$$\Gamma = \frac{r_1}{r_2} < 1 \tag{3}$$

Si supponga la σ_3 (sollecitazione assiale) nulla. Allora sulla parete interna si manifesta la sola sollecitazione circonferenziale $\sigma_2 < 0$ data dalla seconda delle (2).

Nella ipotesi che in detta parete, e solo in essa, si manifesti lo stato di plasticizzazione iniziale, tale tensione dovrà uguagliare $-\sigma'_0$, cioè la resistenza a compressione semplice del materiale:

$$2\frac{1}{\Gamma^2 - 1} q = -\sigma'_0 \tag{4}$$

tutto il resto della massa rocciosa si mantiene allo stato elastico.

Il valore della pressione q occorrente per l'inizio della plastificazione sulla parete interna seconda la (4) dipende da Γ: se $\Gamma = 0$ (pressione q agente da distanza tale che si possa trascurare r_1 rispetto a r_2) tale condizione si verifica per $q = \frac{\sigma'_0}{2}$ (fig. 2); la pressione q tende a zero al tendere di Γ all'unità, cioè per r_1 tendente a $r_2 = \infty$.

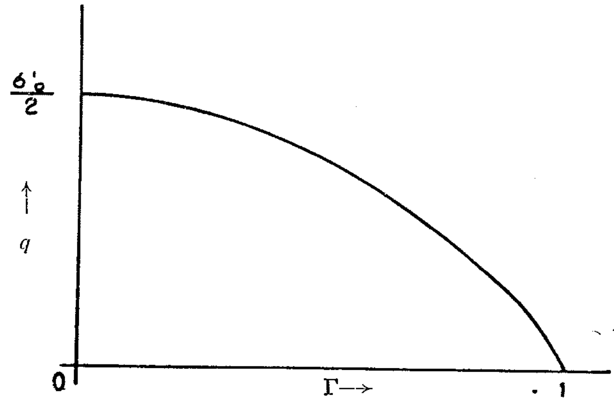

Fig. 2

2 - Plasticizzazione di una zona anulare interna

Si supponga ora (fig. 3) che uno strato cilindrico compreso fra i raggi r_1 ed r_2 si plasticizzi completamente e che la pressione mutua manifestantesi lungo lo strato di raggio r_0 sia q_0.

Posto ρ (1) $= \infty$, trascurando cioè la resistenza a trazione semplice, il valore di q_0 è dato dalla seguente espressione, già ricavata dallo Stassi [2] e qui tra-

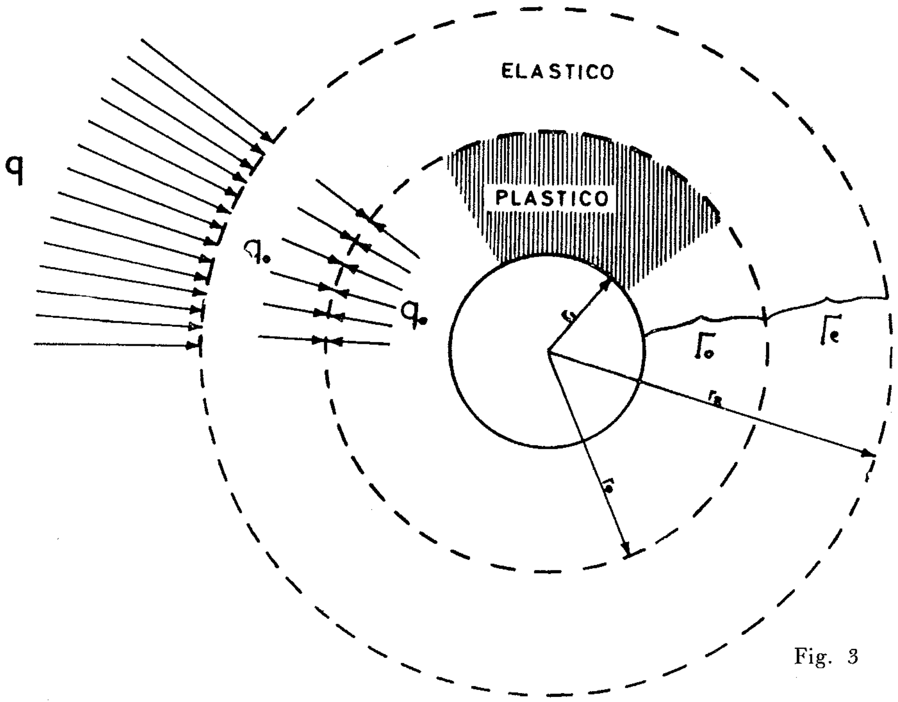

Fig. 3

(1) $\rho = \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} \geq 1$ dove σ'_0 è la resistenza limite alla compressione semplice e σ_0 è la resistenza limite alla tensione semplice.

scritta con gli opportuni adattamenti (q_0 al posto di q, r_0 al posto di r_2):

$$ln \left[\frac{r^2_0}{r^2_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{q^2_0}{\sigma'^2_0} + 2\frac{q_0}{\sigma'_0} + 1} - \left(\frac{q_0}{\sigma'_0} - 1\right) \sqrt{-3\frac{q^2_0}{\sigma'^2_0} + 6\frac{q_0}{\sigma'_0} + 1} \right] = \tag{5}$$

$$= \sqrt{3}\left[arcsen\frac{1}{2} - arcsen\frac{3\sigma'_0 - 3q_0 - \sqrt{-3q^2_0 + 6\sigma'_0 q_0 \quad \sigma'^2_0}}{4\sigma'_0} \right] \quad (5)$$

formula assai complessa e che può permettere di ricavare i valori di q_0 in funzione di $\Gamma_0 = \frac{r_1}{r_0}$ solo per mezzo di un grafico (fig. 4) nel quale si traduce la (5) e che è stato ricavato attribuendo successivi valori a q_0/σ'_0 e ricavando i corrispondenti valori di r_1/r_0.

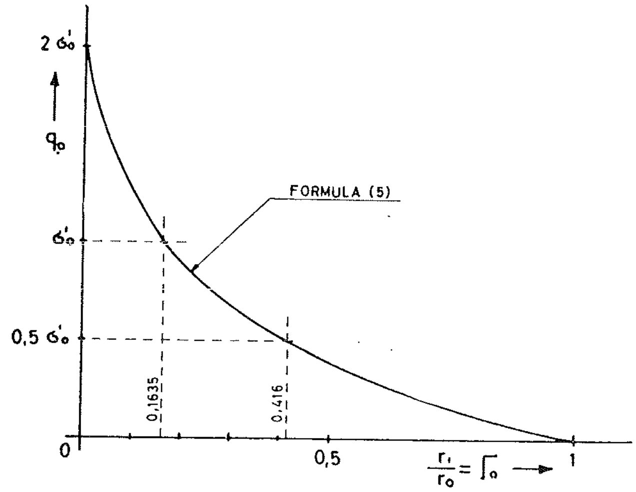

Fig. 4

3 - Espressioni semplificate

La forma della curva suggerisce di semplificare l'eventuale calcolazione, parificando la curva di figura 4 a un arco di iperbole equilatera di equazione:

$$(\Gamma_0 + 0{,}312)\left(\frac{q_0}{\sigma'_0} + 0{,}624\right) = 0{,}82 \tag{6}$$

la quale permette di esplicitare la pressione occorrente

$$\frac{q_0}{\sigma'_0} = \frac{0{,}82}{\Gamma_0 + 0{,}312} - 0{,}624 \tag{7}$$

ossia:

$$\frac{q_0}{\sigma'_0} = \frac{a}{\Gamma_0 - b} - 2b \tag{8}$$

avendo posto $a = 0{,}82$; $b = 0{,}312$.

Il prodursi di uno stato plastico nell'interno di una caverna o cavità posta a relativamente grande profondità sotto la superficie terrestre non è un fatto improbabile: ciò determina cadute o distacco di massi e, nel tempo, per il graduale incremento di r_1, ampliamento dello spessore $r_0 - r_1$ della roccia plasticizzatasi con conseguente instabilità di ampie zone sotterranee e possibilità di movimenti sismici. Naturalmente si è schematizzato dal punto di vista geometrico il fenomeno in esame, onde renderlo accessibile al calcolo; si è supposto altresì tutta la zona considerata omogenee ed isotropa e quindi di resistenza σ'_0 costante.

Il fenomeno, benchè con entità minore, si presenta anche nelle gallerie minerarie ed in quelle stradali e ferroviarie [3] (da ricordare i « colpi di montagna »).

4 - Strato esterno elastico

Lo strato esterno di spessore $r_2 - r_0$ trovasi nello stato inizialmente plastico, lungo la superficie cilindrica di raggio r_0, sotto l'azione della pressione esterna q e della pressione interna q_0. Nella zona compresa fra r_0 ed r_2 il materiale permane elastico e le sollecitazioni principali ivi, radiale σ_1, circonferenziale σ_2 sono espresse dalle note formule:

$$\sigma_1 = \frac{1}{r^2_2 - r^2_0}\left[r^2_0\left(1 - \frac{r^2_2}{r^2}\right) q_0 - r^2_2\left(1 - \frac{r^2_0}{r^2}\right) q \right]$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{r^2_2 - r^2_0}\left[r^2_0\left(1 + \frac{r^2_2}{r^2}\right) q_0 - r^2_2\left(1 + \frac{r^2_0}{r^2}\right) q \right] \tag{9}$$

per r compreso fra r_0 ed r_2 (vedi fig. 3).

In particolare, per $r = r_0$, si ha:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_1)_0 &= -q_0 \\ (\sigma_2)_0 &= \frac{r^2_0 + r^2_2}{r^2_2 - r^2_0} q_0 - 2\frac{r^2_2}{r^2_2 - r^2_0} q \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Siccome tale strato di raggio $r = r_0$ si trova nello stato di plastificazione iniziale, le tensioni principali $(\sigma_1)_0$, $(\sigma_2)_0$ ivi operanti devono soddisfare sia le equazioni (10) dello stato elastico, sia la condizione di plastificazione ritenuta più adatta al problema in esame. Adottando la condizione Stassi, quale la più idonea allo scopo, nella quale si deve porre $\sigma_3 = 0$ (assiale); e ponendo ancora $\rho = \infty$ (materiale di resistenza pressochè nulla alla trazione), detta condizione si semplifica nella:

$$\sigma^2_1 - \sigma_1\,\sigma_2 + \sigma^2_2 + \sigma'_0\,(\sigma_1 + \sigma_2) = 0 \tag{11}$$

ponendo ancora:

$$\frac{r_0}{r_2} = \Gamma_e \tag{12}$$

(grado di cavità della zona esterna elastica) si ottiene:

$$(3 + \Gamma^4_e)\,q^2_0 - 2\,(3 + \Gamma^2_e)\,q_0\,q + 2\,\sigma'_0\,(1 - \Gamma^2_e)(\Gamma^2_e\,q_0 - q) + 4q^2 = 0 \tag{13}$$

la quale per $\Gamma_e = 1$ (spessore nullo dello strato esterno elastico) dà $q = q_0$, ciò che risulta ovvio; e per $\Gamma_e = 0$ (spessore infinito, cioè azione q proveniente da distanza che si possa considerare infinitamente grande):

$$q_0 = q - \sqrt{\frac{q(2\sigma'_0 - q)}{3}} \tag{14}$$

la quale conferma che questo valore di q non può superare $2\sigma'_0$, conformemente a quanto visto per q_0 in fig. 4.

5 - Sul rivestimento interno di una galleria

Dal punto di vista fisico la limitazione $0{,}5\ \sigma'_0 < q$ $q < 2\ \sigma'_0$ è chiara: al valore $q = 0{,}5\ \sigma'_0$ corrisponde la *plastificazione iniziale* dell'intradosso della galleria; a $q = 2\ \sigma'_0$ corrisponde la *plastificazione totale*. Risulta dalla (14) che nel primo caso $q_0 = 0$ e quindi non occorrerebbe rivestimento (così come per $q < 0{,}5$ σ'_0), nel secondo caso $q_0 = 2\sigma'_0$ e quindi il rivestimento dovrebbe comportare una sollecitazione uniforme sul suo estradosso pari al doppio della resistenza a compressione del materiale costituente la roccia.

Ciò noturalmente nell'ipotesi che lo strato anulare interno plasticizzatosi debba essere sostituito con un rivestimento il cui estradosso abbia raggio r_0. Comunque, anche senza che si asporti lo strato placistizzatosi, lo stato plastico di questo strato verrebbe a rientrare ove la pressione q_0 si riversasse nell'estradosso del rivestimento in conseguenza delle ipotesi fatte sui valori relativi dei raggi ($r_1/r_2 = 0$; $r_0/r_2 = 0$).

Se Γ_e è al di sotto di un certo valore (per esempio 1/5, 1/10, ...) cioè che in genere si può senz'altro ammettere, nella (13) l'influenza di tale termine, che vi compare alla seconda e alla quarta potenza, è di ben scarsa rivelanza, così che la (14) può essere ritenuta la soluzione generale del problema, come se cioè la pressione q agisca da distanza infinitamente grande.

In una galleria supposta cilindrica e nella condizione sopra descritta, è necessario assumere le necessarie precauzioni perchè lo stato plastico sia efficacemente contrastato nella sua azione mediante centinatura (miniere) e rivestimenti murari (gallerie stradali o ferroviarie). Qualora si richiedesse l'annullarsi dello stato plastico del cunicolo interno, allora la reazione minima che tale rivestimento dovrebbe opporre alla pressione delle rocce circostanti dovrebbe uguagliare la q_0 data dalla (14). Il valore di tale q_0, supposto che l'azione q si possa intendere agente da distanza molto grande, è indipendente dal diametro della galleria (posto $\Gamma_e = 0$); questo però esercita la sua influenza sullo spessore del rivestimento, sull'estradosso del quale agisce la stessa q_0 in verso centripeto. A qucsto rivestimento è pure applicabile l'analisi fin qui condotta.

6 - Esempio d'applicazione

Una galleria del diametro interno di 20 m., si si trovi nel suo tratto più sollecitato, a dovere sopportare un carico $q = 270\ kg/cm^2$ mentre la resistenza del materiale sia $\sigma'_0 = 500\ kg/cm^2$. La resistenza di rivestimento, per la (14) dovrà essere tale da sopportare una pressione sul suo estradosso:

$$q_0 = 270 - \sqrt{\frac{270\ (1000 - 270)}{3}} = 14\ kg/cm^2$$

Supposto che il rivestimento debba essere in conglomerato cementizio di resistenza di 300 kg/cm², ne risulta:

$$\frac{p}{\sigma'_0} = \frac{14}{300} = \frac{1 - \Gamma^2}{2}$$

cioè $\Gamma = 0{,}95$. Il diametro esterno del rivestimento dovrà dunque essere, al minimo, 20 : 0,95 = 21,10 m, con uno spessore (21,10 — 20) : 2 = 0,55 m. Si avrebbe in tal caso la plasticizzazione iniziale (praticamente la rottura iniziale) del rivestimento del suo intradosso. Uno spessore sufficientemente maggiore di quello calcolato assicurerebbe la stabilità del rivestimento.

Se q è uguale 436 kg/cm² allora q_0 uguale 150 kg/cm² e quindi $\Gamma = 0$. Nessun rivestimento sarebbe capace di resistere alla pressione delle rocce circostanti. Nell'esempio proposto si suppone una galleria ri sezione circolare ed il rivestimento di sezione anulare per semplicità di calcolo.

Bibliografia

[1] Stassi d'Alia F., *Lo stato plastico della materia e il comportamento dei solidi di rivoluzione nello stato plastico iniziale e totale e nello stato elastico-plastico,* Rendiconti e Pubblicazioni del Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in cemento armato, vol. XIV, 1961, Milano (formula 34).

[2] Stassi d'Alia F., formula (81).

[3] Stabilini F., *Tecnica delle Costruzioni,* vol. I.

Phenomena of plasticity in tunnels and natural caves

Summary: We are studying the proceeding of an artificially excavated tunnel or of a natural cave which could be considered as cilindrical under the action of the pressures q exercising themselves uniformly from the surrounded rocks (admission necessary torend the analyses accessible to the calculation).

It is to consider the initial condition of plastification (beginning of breakage) in correspondence with the internal wall.

Supposing the contrary, that an annular stratum of rocks surrounding the hollow, is completely plastified, a mutual pressure q will be formed the long of the cilindrical area of the confines between the initial stratum which is plastified and the surrounding elastic rocky mass.

Finally, we calculate the least resistence which we have to attribute for the internal lining because the plastification (~ the breakage) of the internal annular zone is not verifiable.

Péhnomène de plastification dans les galeries ou cavernes naturelles

Sommaire: On étudie le procédé d'une galerie creusée artificiellement, ou d'une caverne naturelle qui peut être considérée comme cylindrique sous l'action des pressions q s'exerçant uniformément de la part de la roche environnante (admission pour rendre les analyses accessibles au calcul). On considère la condition de plastification initiale (~ début de la cassure) en correspondance à la paroi interne. Supposant par contre qu'une couche annulaire de roches environnant le vide, se plastifie complètement, il se forme une pression réciproque q le long de la surface cylindrique de limite entre la couche interne qui s'est plastifiée et la masse rocheuse élastique environnante.

Enfin, on calcule la résistance minimum qu'il faut attribuer au revêtement intérieur de la galerie, afin que la zone annulaire intérieure ne se vérifie pas (~ cassure).