

IL CALCOLO A ROTTURA DEI PLINTI A CUNEO

L. BOSCOTRECASE - E. MINERVINI (*)

Sommario - Nella presente nota si determina il valore di rottura del carico agente su un tipo di plinto, a forma di piramide, con la punta rivolta verso il basso.

Il calcolo è condotto attraverso la sistematica applicazione dei cerchi di Mohr e conduce alla determinazione, oltre che delle sollecitazioni di rottura nel terreno circostante al plinto, anche della forma delle superfici di slittamento.

Si danno inoltre grafici e formulari per il rapido calcolo di un plinto di questo tipo, con le caratteristiche geometriche più usate nella pratica tecnica.

1 - Premesse

E' molto sentita attualmente la necessità di studiare nuovi tipi di plinti di fondazione che, per la loro forma, permettano un più razionale sfruttamento dei materiali impiegati e della resistenza del terreno, consentendo inoltre un calcolo più approfondito delle reali condizioni di lavoro.

Tentativi in questo campo sono già stati fatti, giungendo, fra l'altro ad un tipo di plinto a cuneo rovescio, ossia con la punta rivolta verso il basso e la cui portanza possa essere fornita dagli sforzi normali e tangenziali del terreno contro la superficie laterale. Tale tipo di plinto presenta il vantaggio di essere soggetto a trazione solo in una piccolissima zona (tratteggiata in Fig. 1) e con intensità irrilevante, per cui non vi è necessità di armatura.

Infatti, come risulta dalla Fig. 1, l'azione del terreno ha per effetto una compressione del plinto in tutte le direzioni.

Fino ad oggi tale tipo di plinto non è stato studiato in maniera rigorosa.

Degno di nota appare lo studio del LAUCHER [1] il quale ripartisce la portanza in una aliquota assorbita dalla superficie inferiore del plinto, che si fa lavorare al valore massimo ammissibile sul terreno, ed in una rimanente parte che rappresenta la risultante delle forze agenti sulla superficie laterale. Tali forze sono supposte inclinate, rispetto alla normale alla faccia laterale del plinto, dell'angolo di attrito calcestruzzo-terreno e, considerando un piano normale ad esse, devono essere tali da generare una tensione anch'essa non

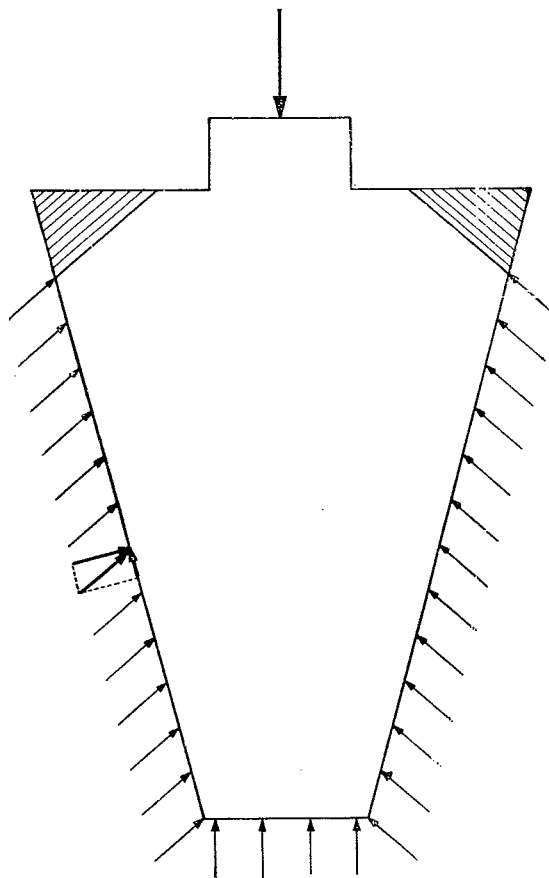


Fig. 1

(*) Dott. Ing. Luciano BOSCOTRECASE: Assistente presso l'Istituto di *Tecnica delle Costruzioni* - Napoli.

Dott. Ing. Ettore MINERVINI: Ordinario di «*Costruzioni*» presso l'Istituto Tecnico «*G. B. Della Porta*» - Napoli; Assistente presso l'Istituto di *Tecnica delle Costruzioni* - Napoli.

superiore al valore ammissibile sul terreno (Fig. 2).

Tale metodo prescinde completamente da essenziali fattori quali il peso dell'unità di volume del terreno, l'angolo di attrito, la coesione, la profondità del piano di posa e dal fatto che la tensione di base e quella

laterale non sono affatto eguali, come verrà dimostrato in seguito.

Il metodo proposto tiene invece conto dell'effettivo comportamento del terreno alle varie profondità e

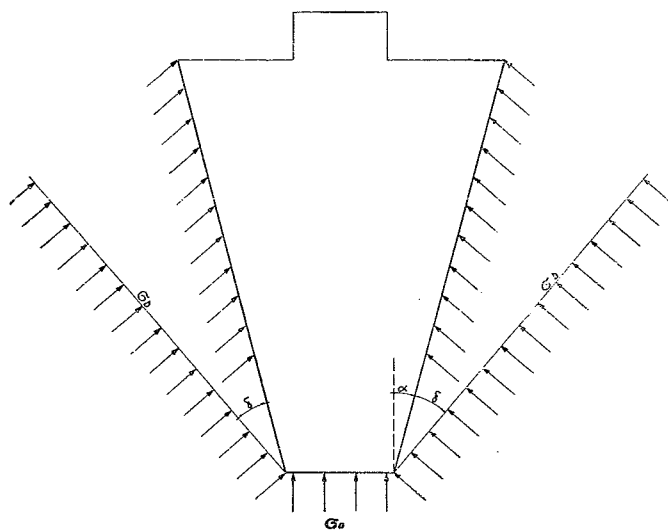


Fig. 2

giunge alla determinazione della portanza mediante il calcolo del carico di rottura per scorrimento e rifiuimento del terreno ai lati del plinto.

Si è studiato il caso di stati di sollecitazione piani quali si verificano ad esempio in presenza di fondazioni nastriformi; i risultati ottenuti vengono applicati anche ai plinti a piramide trascurando l'effetto spaziale a vantaggio di stabilità.

2 - Metodo proposto

E' noto che per le terre la curva intrinseca (inviluppo di tutti i cerchi di MOHR relativi alla rottura), è costituita da due rette inclinate simmetricamente rispetto all'asse delle σ dell'angolo di attrito φ , il cui punto d'incontro dista dall'origine degli assi della

quantità $p_c = \frac{c}{\text{tg } \varphi}$ dove con c si indica la coesione.

Dunque il cerchio di MOHR relativo ad un cubetto di materiale in stato di incipiente rottura, dovrà essere tangente alle rette intrinseche.

Ciò premesso, studiamo la penetrazione nel terreno di un ideale cuneo con angolo di apertura 2β (Fig. 3).

Si distinguono due casi: [2]

a) se l'angolo β è minore di $\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ (cuneo acuto)

esso penetrerà direttamente nel terreno che scorrerà lungo la sua superficie laterale

b) se l'angolo β è maggiore di $\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ (cuneo

ottuso) si formerà sotto il cuneo un secondo cuneo

di terra di angolo $\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$.

Comunque un cubetto di terreno tangente alla superficie che scorre, si trova in condizioni di rottura, ed il relativo cerchio di MOHR dovrà essere tangente alle rette critiche nei punti A_1 e B_1 ; in particolare il

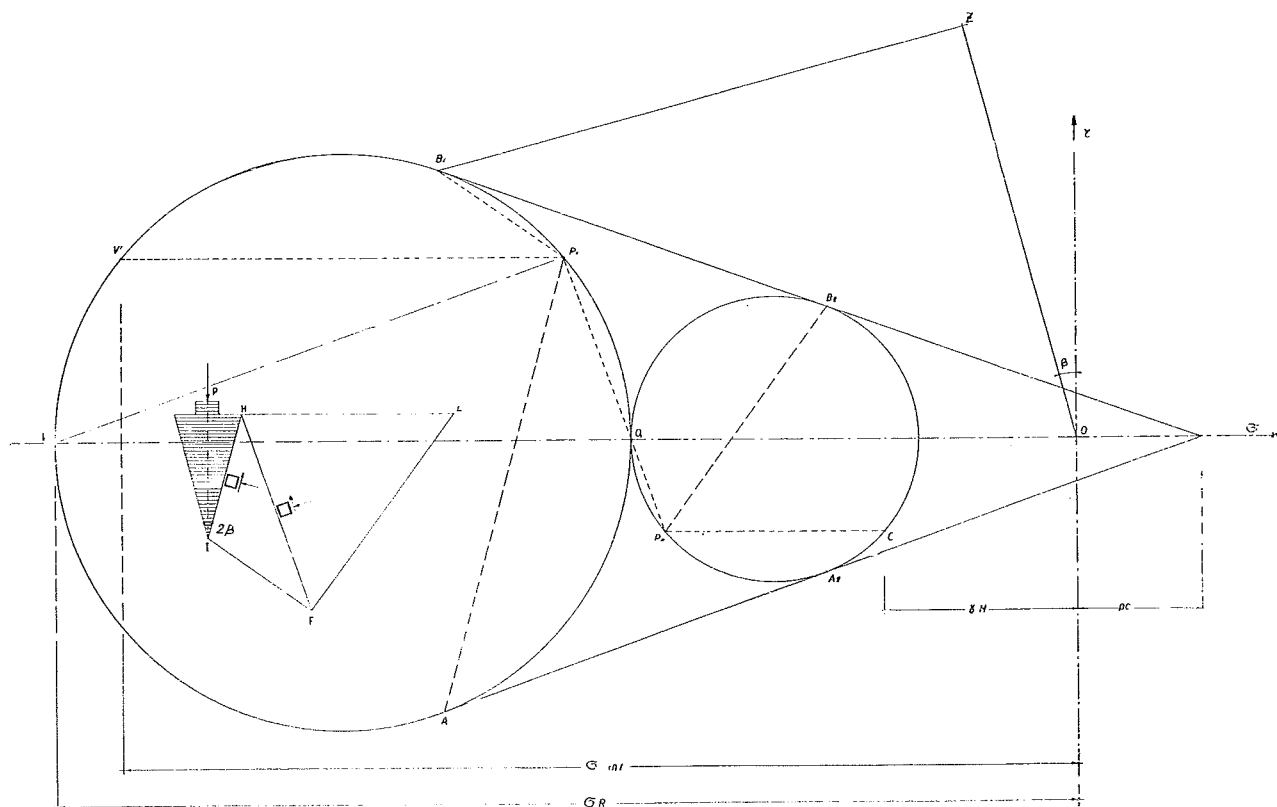


Fig. 3

punto A_1 è rappresentativo della faccia del cubetto parallela alla superficie di scorrimento HI .

Tirando da A_1 la parallela a tale superficie, si definisce P_1 polo osservatorio dal quale si guardano tutti gli altri punti del cerchio di MOHR, secondo direzioni che sono le giaciture delle corrispondenti facce.

Per quanto riguarda la forma della superficie secondo cui scorre il masso di terreno spostato, si faranno due ipotesi: nella prima si considerano superfici di scorrimento piane; nella seconda si considerano superfici curve di cui si determinerà graficamente l'andamento.

Nei due casi verrà ricavato il carico di rottura e quindi, attraverso l'introduzione di un opportuno coefficiente di sicurezza, la portanza del cuneo.

Caso di superfici di slittamento piane

Con riferimento alla stessa Fig. 3, per ottenere l'altra direzione di scorrimento basterà tirare da P_1 la retta P_1B_1 , definendo una superficie di scorrimento IF , parallela a P_1B_1 .

La retta P_1O_1 definisce invece la faccia HF , su cui la sollecitazione è tutta normale; non essendovi tensione tangenziale si presume che la direzione del moto del terreno sia la P_1V , normale ad HF .

Si ha dunque un primo prisma di terra HIF , il cui movimento disloca un secondo prisma di terra, HFL ; studiando un cubetto di quest'ultimo posto in posizione intermedia tra H ed F ed anch'esso in con-

dizioni di rottura, si viene a definire un secondo cerchio di MOHR, tangente al primo (infatti lungo la HF , la σ principale relativa ai due cubetti è la stessa) e tangente anche alle rette critiche.

Imponendo ora la condizione che un cubetto di tale prisma, se orientato con la faccia superiore orizzontale, debba ricevere una pressione pari a γH (H = altezza di terra sovrastante il cubetto) si deduce che il punto C deve distare dall'asse delle τ proprio della quantità γH , ciò che permette di definire la scala del disegno e consente di iniziare il procedimento con un cerchio arbitrario.

Definita la scala, è possibile ricavare il valore della σ e della τ agenti sulla superficie laterale del cuneo, in fase di rottura tali valori sono evidentemente le coordinate del punto B .

Se si vuole ottenere la componente verticale $t_{t,v}$ della tensione totale (risultante di σ e τ nella Fig. 3), basterà tirare a partire dall'origine degli assi una retta inclinata dell'angolo β rispetto all'asse delle τ e da B_1 la normale a quest'ultima. Il segmento OZ rappresenta la ricercata componente che, moltiplicata per la superficie laterale del cuneo, fornisce la portanza laterale a rottura.

Nelle pratiche applicazioni non è materialmente possibile realizzare la punta del cuneo per cui questo viene mozzato e presenta quindi anche una portanza di base che si ottiene moltiplicando l'area di base per la σ agente sotto di essa (coordinata orizzontale di V').

Per quanto riguarda il coefficiente di sicurezza, essendo le ipotesi di partenza particolarmente gravose, basterà adottare un valore non superiore a 2 [2].

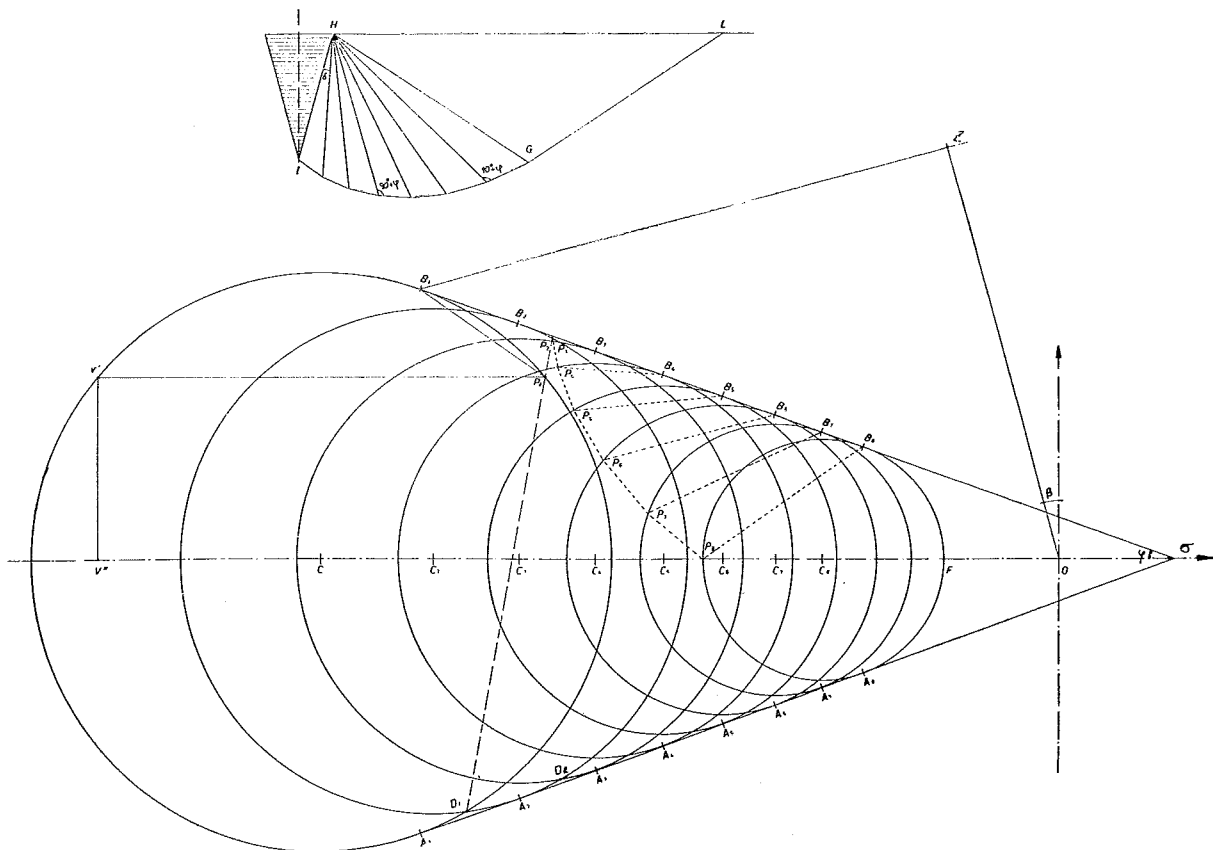


Fig. 4

Caso di superfici di slittamento curve

Ove si voglia affinare il calcolo precedente, è possibile considerare, anziché due soli prismi, un numero discreto di essi, dividendo l'angolo IHL di Fig. 4 con una serie di rette distanziate angolarmente della stessa quantità.

Se la superficie di scorrimento non è un arco di cerchio, il masso di terra che rifluisce non rimarrà identico a se stesso, quindi l'assetto statico di un cubetto lontano dal cono, sarà notevolmente diverso da quello del cubetto aderente ad esso; le direzioni di rottura cambieranno e si dovrà ritenere che per ogni punto interno al masso esista un diverso cerchio di MOHR, certamente tangente alle rette critiche.

Lo stato tensionale dell'intero masso, sarà dunque rappresentato da infiniti cerchi di MOHR, ciascuno molto poco diverso dal precedente, che andranno dal primo cerchio disegnato al cerchio rappresentativo dello stato tensionale di un prisma terminale di terreno HLG il quale viene spostato completamente verso l'esterno, ma rimane identico a se stesso, ossia slitta lungo una superficie piana.

L'inclinazione di tale ultima superficie di scorrimento sarà certamente non inferiore a $\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ [3]

per cui il punto nel quale la tangente alla curva di slittamento assume tale inclinazione, è confine tra la superficie curva e la superficie piana di slittamento.

Il procedimento è il seguente: disegnato il primo cerchio di MOHR (di centro C_1) come nel caso precedente, e ricavato il polo P_1 , si hanno P_1B_1 e P_1A_1 come direzioni di rottura di un primo cubetto aderente al cono.

Se ora da P_1 si tira la retta P_1D_1 , inclinata di un piccolo angolo δ rispetto alla P_1A_1 e si immagina che tale direzione sia la giacitura di un successivo cubetto, poco lontano dal precedente, ma anch'esso in fase di rottura, si può ritenere che il punto D_1 , oltre che appartenere al cerchio di centro C_1 , appartenga anche ad un successivo cerchio di centro C_2 , anch'esso tangente alle rette critiche. Il polo P_2 viene determinato su quest'ultimo cerchio dal prolungamento della P_1D_1 .

Basterà tirare da P_2 le rette che lo uniscono alle intersezioni A_2 e B_2 del cerchio di centro C_2 con le rette critiche, per ottenere P_2B_2 e P_2A_2 , nuove direzioni di scorrimento del secondo cubetto.

Il procedimento si ripete tirando da P_2 la retta P_2D_2 , inclinata rispetto alla P_2A_2 dello stesso angolo δ . E' possibile così costruire un numero discreto di cerchi di MOHR, che forniscono le direzioni di rottura dei successivi cubetti. Tali direzioni individuano un certo numero di prismi, con un vertice comune nel punto H .

Si osserva che per ogni prisma le due direzioni di rottura sono fra loro egualmente inclinate dell'angolo $90^\circ + \varphi$; infittendo il numero delle suddivisioni si giungerebbe ad una curva in cui il raggio vettore e la tangente sono inclinate tra loro sempre dello stesso angolo, e cioè, una spirale logaritmica, in accordo con l'ipotesi del TERZAGHI.

La costruzione dei successivi cerchi si arresta quando l'ultimo polo trovato (P_8) capita sull'asse delle σ , perché in tal caso l'ultima direzione di scorrimento

P_8B_8 è inclinata di $\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ e delimita l'ultimo pri-

isma di terra. Per la determinazione della scala, basterà stabilire la condizione che sulla faccia orizzontale dell'ultimo prisma, la pressione verticale (rappresentata dal segmento FO) sia pari a γH , ove H è l'altezza di terra sovrastante la faccia orizzontale HL .

La distanza del punto F dall'origine degli assi vale dunque γH ; per il plinto in superficie il punto F coincide con O e la portanza è affidata alla sola coesione, a meno che non si voglia tener conto anche del peso del prisma di terra spostato.

Per il calcolo della portanza si procede come nel caso precedente, tirando dal punto O una retta inclinata dell'angolo β rispetto all'asse delle τ e da B_1 la normale B_1Z ; il segmento OZ fornisce, nella scala stabilita, la ricercata componente verticale.

Si nota che, per essere il segmento OF minore che nel caso di superfici di scorrimento piane, la portanza calcolata con questo secondo metodo è maggiore.

A nostro avviso il coefficiente di sicurezza non va cambiato, in quanto la maggiore portanza deriva da un più approfondito studio della superficie di slittamento.

3 - Calcolo di progetto

La portanza a rottura di un plinto del tipo descritto, è fornito da:

$$P_R = \sigma_i A_i + t_{i,v} \cdot S \quad (1)$$

dove σ_i è la tensione sulla faccia inferiore A_i del plinto (segmento OV'' di fig. 4) e $t_{i,v}$ è la componente verticale della tensione totale sulla superficie laterale S (segmento OZ di fig. 4).

E' sembrato opportuno agli effetti pratici particolareggiare la forma del plinto disponendo le facce laterali con una inclinazione $\beta = 15^\circ$ e tagliando la piramide a base quadrata con un piano a $2/3$ dell'altezza H_1 (Fig. 5).

Le quantità geometriche risultano così funzioni della sola altezza H_1 :

$$A = 2 H_1 \tan 15^\circ = 0,536 H_1 \quad (2)$$

$$B = \frac{2}{3} H_1 \tan 15^\circ = 0,179 H_1 \quad (3)$$

$$S = 4 \cdot \frac{(A+B)}{2} \cdot \frac{2}{3} H_1 \cdot \frac{1}{\cos 15^\circ} = 0,987 H_1^2 \quad (4)$$

$$V = 0,0921 H_1^3 \quad (5)$$

Con tali valori la portanza diventa:

$$P_R = H_1^2 [0,0319 \sigma_i + 0,987 t_{i,v}] \quad (6)$$

I valori di σ_i e $t_{l,v}$ sono stati ricavati per angoli compresi tra 20° e 35° e riportati nel diagramma di Fig. 6.

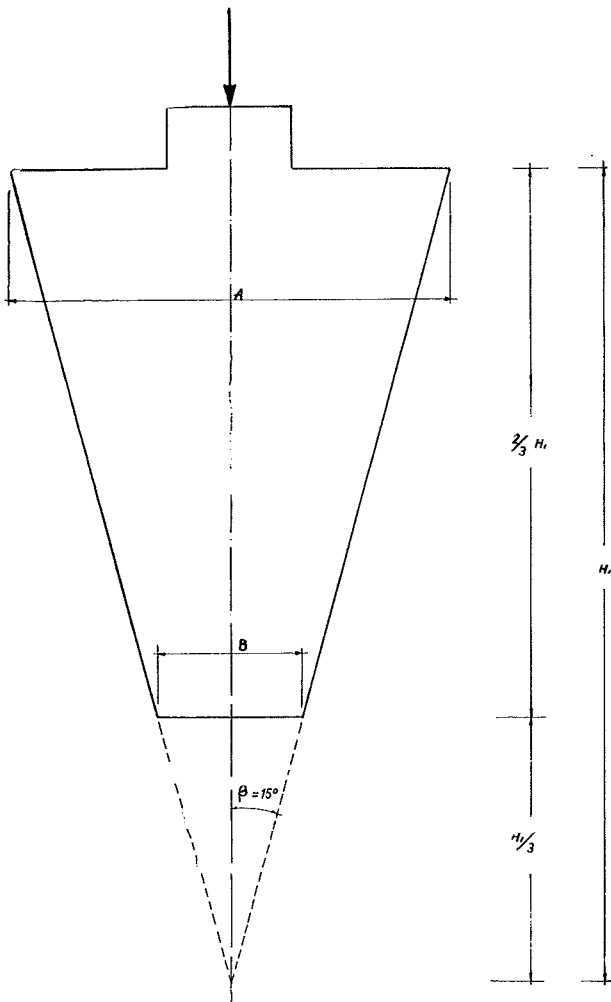


Fig. 5

Poiché è per $\gamma H/c = \text{cost}$:

$$\sigma_i = \sigma_i' \cdot c \tag{7}$$

$$t_{l,v} = t_{l,v}' \cdot c \tag{8}$$

si ottiene:

$$P_R = [0,0319 \sigma_i' + 0,987 t_{l,v}'] H_1^2 \cdot c = K H_1^2 \cdot c \tag{9}$$

I valori di K sono stati rappresentati nel diagramma di Fig. 7 in funzione delle variabili φ e $\gamma H/c$.

Nel caso particolare di $c = 0$, la formula precedente cade in difetto, dovendosi sostituire ad essa l'altra:

$$P_R = K_0 H_1^2 \gamma H \tag{10}$$

Tale formula deriva dallo stesso diagramma di Fig. 4, in cui si è però supposto l'origine degli assi coincidente con il punto d'incontro delle rette critiche, ed imponendo $OF = \gamma H$.

4 - Esempi

Si riportano di seguito un esempio di calcolo di progetto e uno di calcolo di verifica.

I risultati vengono poi confrontati con quelli ricavati mediante l'applicazione delle formule del carico limite del TERZAGHI nelle due ipotesi di rottura locale e rottura generale, relative ad un plinto cilindrico di eguale volume e diametro pari al lato A della base maggiore della piramide.

Calcolo di progetto

Le caratteristiche meccaniche del terreno sono le seguenti:

$$\gamma = 1200 \text{ kg/m}^3; \quad \varphi = 30^\circ; \quad c = 0,2 \text{ kg/cm}^2$$

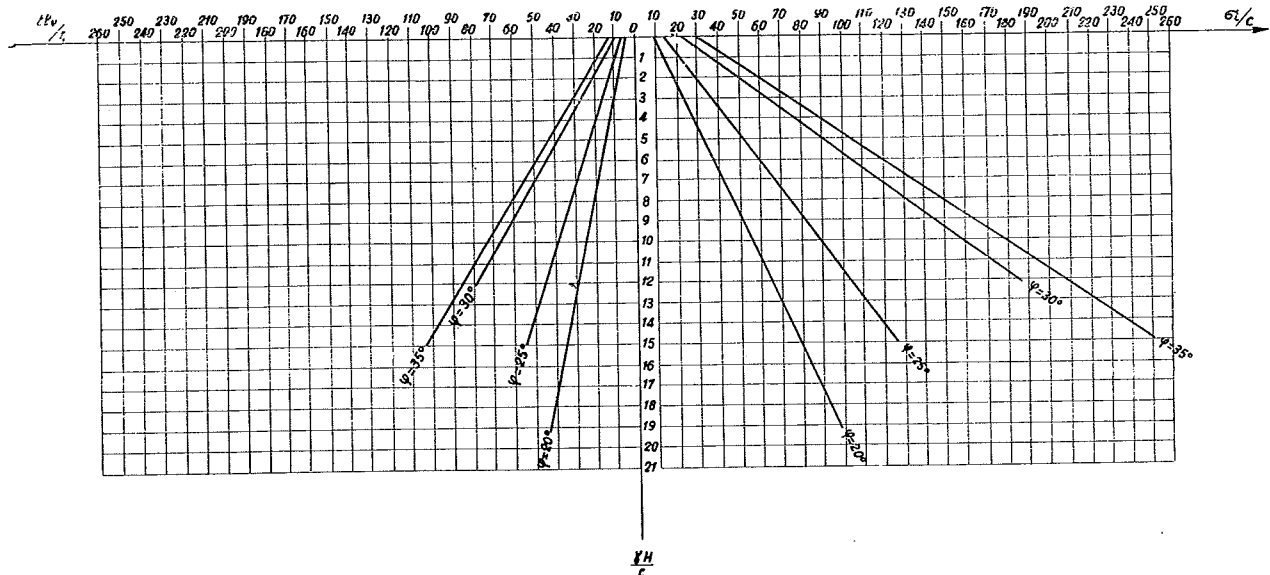


Fig. 6

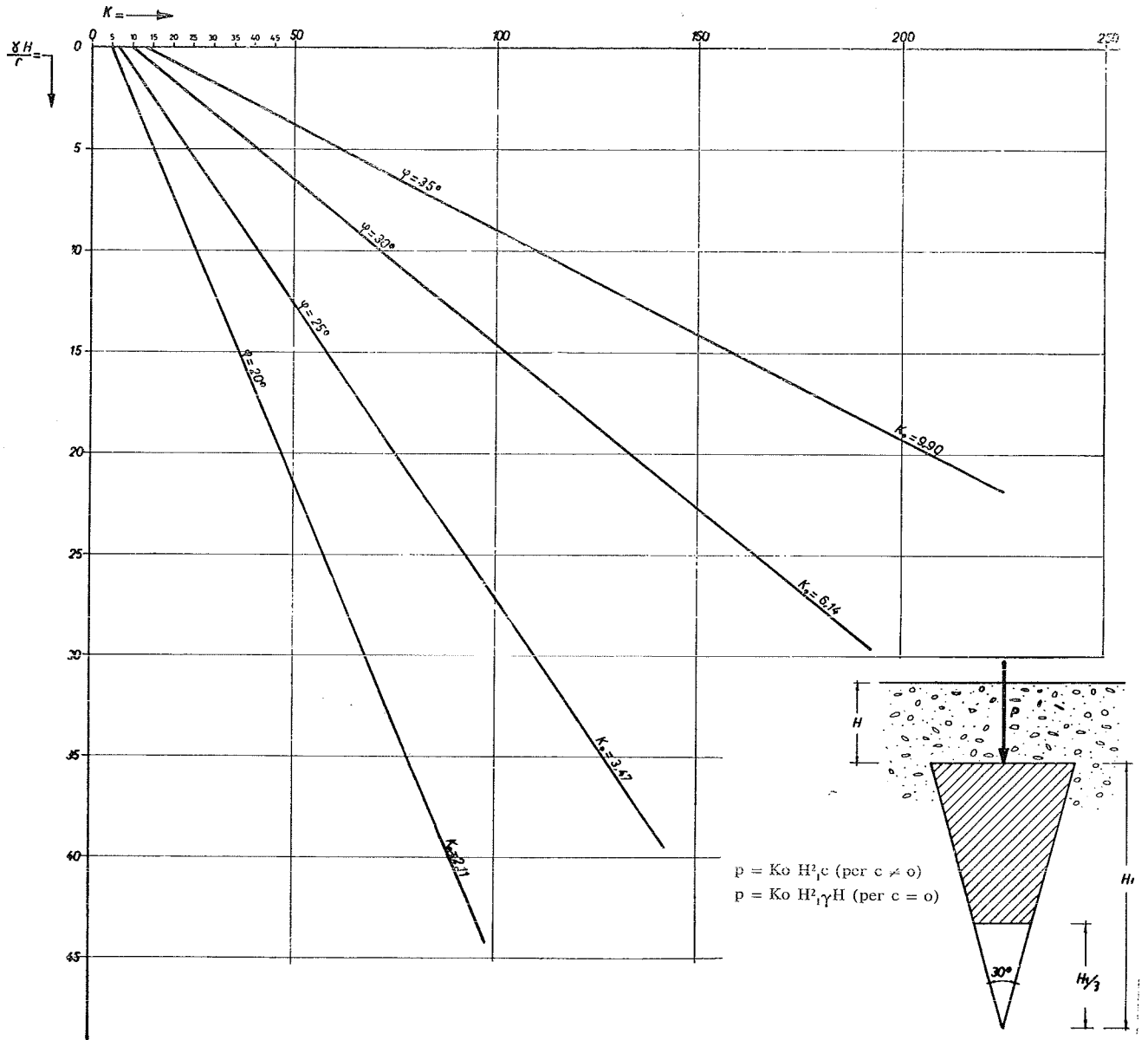


Fig. 7

Poiché l'estradosso del plinto è in superficie, sarà $H = 0$.

Dal diagramma di fig. 7 risulta, per $\frac{\gamma H}{c} = 0$ e

$\varphi = 30^\circ, K = 10$.

Il progetto si esegue assegnando un coefficiente di sicurezza 2.

Si ha quindi

$$2P = 10 \cdot 0,2 \cdot H_1^2$$

Da cui

$$H_1 = \sqrt{P}$$

Ad esempio per $P = 100 \text{ t}$ si ha:

$$H_1 = 3,16 \text{ m}$$

e con le formule (2) e (3) si ottengono le dimensioni del plinto:

$$A = 1,70 \text{ m} \quad B = 0,57 \text{ m}$$

Altezza = 2,10 m.

I valori delle tensioni a rottura inferiore e laterale sono ricavabili dalla Tabella di Fig. 6.

Nel nostro caso sarà:

$$\sigma_i = 21,94 \cdot 0,2 = 4,388 \text{ kg/cm}^2$$

$$t_{i,v} = 9,49 \cdot 0,2 = 1,898 \text{ kg/cm}^2.$$

Qualora si volesse conoscere, la sollecitazione sul terreno per un plinto convenzionale che abbia un'area di base pari a quella della faccia superiore del plinto

a cuneo ($A \cdot A$) e caricato dallo stesso carico $2P = 200$ t, si avrebbe:

$$\sigma_f = \frac{200.000}{170 \cdot 170} = 6,95 \text{ kg/cm}^2.$$

Sostituiamo ora al plinto descritto un plinto cilindrico di eguale volume $V = 2,90 \text{ m}^3$; si ha:

$$h = \frac{V}{\Omega} = 1,28 \text{ m.}$$

Rottura locale ($\varphi = 30^\circ$; $C_1 = 8,3$; $C_2 = 16$; $C_3 = 2,9$)

$$q_L = 8,3 \cdot 1,2 \cdot 1,28 + 16 \cdot 2 + 2,9 \cdot 1,2 \cdot 0,85 = 47,70 \text{ t/m}^2$$

$$P_L = 47,70 \cdot 2,27 = 108 \text{ t.}$$

Rottura generale: ($\varphi = 30^\circ$; $C_1 = 21$; $C_2 = 45$; $C_3 = 11,5$)

$$q_L = 21 \cdot 1,2 \cdot 1,28 + 45 \cdot 2 + 11,5 \cdot 1,2 \cdot 0,85 = 134,00 \text{ t/m}^2$$

$$P_L = 134 \cdot 2,27 = 304 \text{ t.}$$

Calcolo di verifica

Sia da verificare un plinto delle dimensioni:

$$A = 2,40 \quad \text{altezza } 2,98 \text{ m}$$

$$B = 0,80 \quad H_1 = 4,47 \text{ m}$$

$$\text{Carico } P = 100 \text{ t.}$$

Le caratteristiche del terreno siano:

$$\gamma = 1400 \text{ kg/m}^3; C = 0,1 \text{ kg/cm}^2; H = 2,00 \text{ m}; \varphi = 25^\circ$$

Dal diagramma di Fig. 7, si ottiene per $\gamma H/c = 2,8$

$$K = 11.$$

LE CALCUL A LA RUPTURE DES SEMELLES AVEC LA FORME DE COIN.

Sommaire - Dans cette note on détermine la valeur de rupture du charge agissant sur un type de semelle, en guise de pyramide avec la pointe tournée en bas.

Le calcul est conduit à travers l'application systématique des cercles de MOHR et il aboutit à la détermination non seulement des contraintes de rupture dans le terrain à l'entour de la semelle, mais aussi de la forme des surfaces de glissement.

En outre on donne des graphiques et des formulaires pour le calcul rapide d'une semelle de ce type, avec les caractéristiques géométriques les plus employées dans la pratique technique.

La portanza di rottura sarà:

$$P_R = 11 \cdot 0,1 \cdot 4,47^2 = 220 \text{ t}$$

Risulta quindi un coefficiente di sicurezza pari a 2,2. Le tensioni effettive sul terreno si ricavano dal diagramma di Fig. 6, dividendo i valori ivi trovati per il coefficiente di sicurezza 2,2.

Il plinto di eguale volume $V = 8,22 \text{ m}^3$ ha un'altezza:

$$h = \frac{V}{\Omega} = 1,82 \text{ m.}$$

Rottura locale: ($\varphi = 25^\circ$; $C_1 = 5,4$; $C_2 = 12,5$; $C_3 = 1,7$)

$$q_L = 5,4 \cdot 1,4 \cdot 1,28 + 12,5 \cdot 1,00 + 1,7 \cdot 1,4 \cdot 1,2 = 25,03 \text{ t/m}^2$$

$$P_L = 25,03 \cdot 4,52 = 113 \text{ t.}$$

Rottura generale ($\varphi = 25^\circ$; $C_1 = 12$; $C_2 = 30$; $C_3 = 5,7$)

$$q_L = 12 \cdot 1,4 \cdot 1,28 + 30 \cdot 1,00 + 5,7 \cdot 1,4 \cdot 1,2 = 61,08 \text{ t/m}^2$$

$$P_L = 61,08 \cdot 4,52 = 276 \text{ t.}$$

Dai risultati su riportati, emerge l'attendibilità delle formule proposte poiché, anche tenendo conto della differenza di forma tra i due tipi di plinto confrontati, i valori ottenuti sono compresi tra i limiti estremi forniti dalle formule del TERZAGHI. Poiché concettualmente si può ritenere che il tipo di rottura studiato nella teoria proposta sia analogo a quello della rottura locale del TERZAGHI, appare evidente il vantaggio del tipo a cuneo: infatti la maggiore portanza viene giustificata proprio dalla particolare forma piramidale del plinto.

Bibliografia

- [1] C. LAUCHER: «Semelles de fondation d'un type nouveau» - Béton armé, ottobre 1957.
- [2] C. CESTELLI GUIDI: «Meccanica del terreno, fondazioni, opere in terra» - Ed. Hoepli, 1957.
- [3] TERZAGHI: «Theoretical soil mechanics» - J. Wiley and Son, 1943.

LIMIT DESIGN OF WEDGE-SHAPED FOOTINGS.

Summary - In this article is designed the amount of a force loading a kind of footing, which brings the soil to slide.

The footing is wedge-shaped and has the tip turned down-ward.

The design is performed through the methodical application of the MOHR's circles and leads to the determination of both the limit-stresses in the soil and the shape of the sliding surface.

There are also given tables and formulas for a quick design of a footing of this kind, owing the most employed geometric characteristics in the practice.