

# Contributo allo studio della consolidazione unidimensionale delle argille

C. VIGGIANI \*\*

**SOMMARIO:** L'equazione differenziale della teoria della consolidazione in termini di deformazioni è più generale della tradizionale formulazione di Terzaghi in termini di sovrappressioni neutre: essa infatti, pur mantenendo l'assunzione che il coefficiente di consolidazione  $c_v$  sia costante, consente di adottare relazioni fra tensioni effettive e deformazioni diverse dalla semplice elasticità lineare. Nel presente lavoro, dopo aver brevemente richiamato lo sviluppo di tale equazione, ne vengono fornite le soluzioni per tre differenti condizioni di carico: incremento di carico costante, velocità di deformazione costante e velocità di carico costante. In tutti e tre i casi le tensioni totali vengono considerate costanti lungo lo spessore dello strato in corso di consolidazione, sì che le soluzioni sono applicabili alle prove di laboratorio ovvero a strati di terreno di spessore ridotto, per i quali l'influenza del peso proprio sia trascurabile. Dalle soluzioni in termini di deformazioni si risale poi alle espressioni della sovrappressione neutra assumendo due diverse relazioni fra tensioni effettive e deformazioni, e cioè quella di elasticità lineare e quella logaritmica di Davis e Raymond. Alcune delle soluzioni fornite sono già note e vengono nuovamente ricavate per altra via onde esemplificare l'applicazione del procedimento descritto.

## 1. Premessa

La classica teoria della consolidazione unidimensionale, come è noto, fu sviluppato da TERZAGHI [1923] nelle seguenti ipotesi:

- a) terreno saturo
- b) incompressibilità dell'acqua e delle particelle solide
- c) validità della legge di Darcy
- d) coefficiente di permeabilità  $k =$  costante
- e) relazione fra tensioni effettive e deformazioni indipendente dal tempo
- f) modulo di compressione edometrica  $E =$  cost.

Con queste ipotesi, e nelle condizioni di carico applicato al tempo  $t = 0$  e poi mantenuto costante, l'equazione differenziale che regge il fenomeno della consolidazione si scrive:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

\* Il presente studio rientra in un programma di ricerche che l'Istituto di Tecnica delle Fondazioni e Costruzioni in Terra (Geotecnica) dell'Università di Napoli svolge con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche nell'ambito del Gruppo « Terreni e Strutture » sotto la guida del prof. ing. Arrigo CROCE.

\*\* Prof. ing. Carlo VIGGIANI, libero docente in *Geotecnica*; assistente ordinario alla Cattedra di *Tecnica delle Fondazioni e Costruzioni in Terra* della Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli; incaricato di *Geotecnica* alla Facoltà di Ingegneria, Università di Pavia.

in cui il coefficiente di consolidazione  $c_v = kE/s$ , risulta a sua volta costante. Nella (1) si indica con  $u$  la sovrappressione neutra, con  $z$  l'ascissa nella direzione del fenomeno di consolidazione, con  $s$ , il peso specifico dell'acqua.

La (1) fu estesa alla condizione di carico applicato variabile nel tempo da GIBSON e HENKEL [1954] ottenendo la relazione

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2)$$

in cui con  $\sigma$  si indica la sovrappressione neutra che sarebbe indotta dai carichi esterni in condizioni non drenate ovvero, in altre parole, l'incremento di pressione totale.

La (1) e la (2) costituiscono attualmente la base per la trattazione dei processi di consolidazione unidimensionale; in particolare la (2) è stata estesamente utilizzata per l'interpretazione delle prove di compressione edometrica con incremento graduale del carico, che di recente hanno conosciuto una notevole diffusione [LOWE, JONAS, OBRI-CIAN, 1969; VIGGIANI, 1970; JAMIOLKOWSKI, MARCHETTI, 1971]. Esse tuttavia interpretano i risultati sperimentali in maniera imperfetta, a causa della evidente schematicità di alcune delle ipotesi sopra elencate a paragone dell'effettivo comportamento dei terreni naturali; è quindi in corso da parte di numerosi studiosi un intenso sforzo di ricerca teorica e sperimentale tendente ad una revisione di tali ipotesi ed allo sviluppo di un

modello più aderente alla realtà fisica del fenomeno.

L'argomento presenta un interesse di carattere scientifico generale nel contesto degli studi sul comportamento reologico dei terreni; inoltre esso è immediatamente connesso con problemi di carattere applicativo. E' noto infatti che la previsione del decorso nel tempo dei processi di consolidazione, allo stato attuale delle conoscenze, è affetta da notevoli incertezze.

I modelli sviluppati per un'interpretazione del processo di consolidazione più soddisfacente di quella classica di Terzaghi possono essere riportati a due gruppi:

— modelli in cui si mantiene l'ipotesi di relazione fra tensioni effettive e deformazioni indipendente dal tempo (ip. e), modificando le ipotesi d) ed f) in modo opportuno;

— modelli in cui si abbandona l'ipotesi e), introducendo una dipendenza dal tempo delle relazioni fra tensioni effettive e deformazioni (effetto secondario).

E' evidente che i modelli del secondo gruppo presentano maggiore generalità e quindi, in linea di principio, sono più soddisfacenti; tuttavia essi risultano in genere assai complessi e di non facile uso nelle applicazioni. Si ritiene pertanto non inutile approfondire lo studio di alcuni dei modelli del primo gruppo ed estenderne il campo di applicazione.

## 2. Equazione della consolidazione in termini di deformazioni

Per un'argilla satura che si deforma in direzione z l'equazione della continuità può scriversi:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

in cui  $\varepsilon$  è la deformazione unitaria e  $v$  la velocità di filtrazione, ambedue in direzione z. La legge di Darcy si esprime:

$$v = - \frac{k}{s_0} \frac{\partial u}{\partial z}$$

per cui

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( - \frac{k}{s_0} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3)$$

Se si suppone che la tensione totale  $\sigma$  sia indipendente da z<sup>(1)</sup>, indicando con  $\sigma'$  la tensione

effettiva può scriversi:

$$- \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \sigma'}{\partial z} = \frac{d \sigma'}{d \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k}{s_0} \frac{d \sigma'}{d \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \quad (5)$$

Ponendo:

$$c_v = \frac{k}{s_0} \frac{d \sigma'}{d \varepsilon} \quad (6)$$

e supponendo  $c_v = \text{cost.}$ , la (5) può scriversi:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \quad (7)$$

La (7) è l'equazione differenziale della consolidazione unidimensione in termini di deformazioni e fu ottenuta nel 1965 da JANBU ed indipendentemente da MIKASA. Essa è indubbiamente di maggior generalità dell'equazione (1) in termini di pressione neutra; infatti nessuna limitazione è stata introdotta circa  $k$  e  $d \sigma' / d \varepsilon$  e circa la variabilità dei carichi nel tempo ma si è solo imposto  $c_v = \text{cost.}$  e che la tensione totale non vari con z.

Potrà allora aversi:

$$\frac{d \sigma'}{d \varepsilon} = E(\sigma') \quad (8)$$

ove il legame funzionale  $E(\sigma')$  — o in altri termini la relazione fra tensioni effettive e deformazioni — potrà essere qualsiasi. Per la (6) dovrà però aversi:

$$k = \frac{c_v s_0}{E(\sigma')}$$

La soluzione della (7) nel rispetto delle condizioni ai limiti del problema in istudio fornisce l'incognita funzione  $\varepsilon(z, t)$ ; una volta nota tale

(1) Ciò si verifica nelle prove di consolidazione in laboratorio e per strati di terreni argillosi di modesto spessore. I risultati che si otterranno non sono applicabili invece allo studio della consolidazione di strati di rilevante spessore, nei quali l'influenza del peso proprio non possa essere trascurata; in tal caso la trattazione che segue deve essere opportunamente modificata (JANBU, 1965; DAVIS, 1971; VIGGIANI, 1973).

funzione, assunta una legge del tipo (8) si potrà risalire alle pressioni effettive  $\sigma'(z, t)$  e quindi alle sovrappressioni neutre  $u(z, t)$ .

Scopo del presente lavoro è quello di ricavare tali soluzioni per tre diverse condizioni di carico e per due modelli di terreno; alcune di tali soluzioni sono già note e vengono nuovamente riportate onde esemplificare l'applicazione del procedimento generale innanzi esposto.

### 3. Problemi esaminati

Si farà in ogni caso riferimento ad uno strato di terreno di spessore  $h$ , drenato sulla superficie superiore ( $z = 0$ ) ed a contatto con un mezzo imperrabile sulla superficie inferiore ( $z = h$ ). Ad esso viene applicato, a partire dall'origine dei tempi, un carico  $\sigma(t)$  con diversi andamenti, e cioè:

— carico applicato istantaneamente e quindi mantenuto costante;

— carico linearmente crescente nel tempo (CRL: *constant rate of loading*)

— carico crescente nel tempo con legge tale da realizzare una velocità di deformazione costante (CRS: *constant rate of strain*).

Per ciascuna di queste condizioni di carico verranno prese in esame due diverse relazioni fra tensioni effettive e deformazioni  $\sigma, \epsilon$ , in altre parole, due modelli di terreno.

Il primo di essi — che chiameremo di « mezzo lineare » — è quello che è alla base della classica teoria di Terzaghi. Per esso la (8) si particolarizza in:

$$\frac{d\sigma'}{d\epsilon} = E = \text{cost.}$$

e quindi:

$$\sigma' = E\epsilon; \quad k = \text{cost.}$$

Il secondo modello — che chiameremo di « mezzo non lineare », è basato sulla curva vergine delle prove di compressione edometrica e fu proposto per la prima volta in connessione con la teoria della consolidazione da DAVIS e RAYMOND [1965].

Come è noto, per un'argilla normalmente consolidata, in condizioni edometriche sussiste la seguente relazione fra indice dei pori  $e$  e pressione effettiva  $\sigma'$ :

$$e = e_0 - C_\epsilon \lg \frac{\sigma'}{\sigma'_0}$$

in cui  $C_\epsilon$  è il noto indice di compressibilità.

Supponendo che il termine  $(1 + e)$  possa ritenersi costante al variare di  $\sigma'$  (ipotesi di piccolezza degli spostamenti), tale relazione può scriversi:

$$\epsilon = C_\epsilon \lg \frac{\sigma'}{\sigma'_0} \quad (9)$$

in cui:

$$C_\epsilon = \frac{C_\epsilon}{1 + e} = \text{cost.}$$

Si ha allora:

$$\frac{d\sigma'}{d\epsilon} = E(\sigma') = \frac{\sigma' \ln 10}{C_\epsilon} = \text{cost.} \cdot \sigma' \quad (10)$$

$$k = \frac{c_v C_\epsilon s_0}{\sigma' \ln 10} = \frac{\text{cost.}}{\sigma'}$$

Il modello di « mezzo non lineare » innanzi descritto è stato adottato anche da JANBU [1963, 1967] il quale suggerisce di porre:

$$E = m \sigma_a \left( \frac{\sigma'}{\sigma_a} \right)^{1-a}$$

in cui  $\sigma_a$  è una tensione di riferimento ed  $m, a$ , sono costanti adimensionali caratteristiche del materiale in esame. Per le argille normalmente consolidate l'esperienza mostra che può porsi  $a = 0$  e quindi  $E = m \sigma'$ ; ponendo:

$$m = \frac{\ln 10}{C_\epsilon}$$

si ottiene concidenza con il modello di Davis e Raymond.

### 4. Incremento di carico discontinuo

Come si è detto, ci si riferisce ad uno strato drenato sulla sola base superiore e sottoposto ad un incremento di carico  $\sigma$  applicato al tempo  $t = 0$  e mantenuto costante.

Adottando le consuete variabile adimensionali:

$$Z = z/h; \quad T = \frac{c_v t}{h^2}$$

le condizioni ai limiti della (7) per il caso in esame si esprimono:

$$\begin{aligned}
& T = 0; \quad 0 < Z \leq 1; \quad \varepsilon = 0 \\
& 0 \leq T \leq \infty; \quad Z = 0; \quad \varepsilon = \varepsilon_t \\
& 0 \leq T \leq \infty; \quad Z = 1; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} = 0
\end{aligned} \quad (11)$$

in cui  $\varepsilon_t = \sigma/\varepsilon$  rappresenta il valore finale della deformazioni unitaria.

La soluzione della (7) con le condizioni ai limiti (11) si scrive:

$$\varepsilon = \varepsilon_t [1 - \varphi(Z, T)] \quad (12)$$

ove la funzione  $\varphi(Z, T)$  ha la seguente espressione:

$$\varphi(Z, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{M} \operatorname{sen}(M Z) \exp \{-M^2 T\} \quad (13)$$

$$\text{con } M = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

La (12) può essere utilizzata per esplicitare la espressione della sovrappressione neutra una volta assegnata la legge tensioni effettive-deformazioni.

Per il *mezzo lineare* si ha:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t' - \sigma_o'}{E} = \frac{\sigma}{E}$$

avendo indicato con  $\sigma_o'$  e  $\sigma_t'$  i valori iniziale e finale delle tensioni effettive.

Il valore finale di  $\varepsilon$  non dipende dai valori di  $\sigma_t'$ ,  $\sigma_o'$  ma solo dalla loro differenza  $\sigma$ . La sovrappressione neutra vale:

$$u = \sigma_t' - \sigma' = E(\varepsilon_t - \varepsilon) = E \varepsilon_t \varphi(Z, T) = \sigma \cdot \varphi(Z, T)$$

che è la nota espressione di Terzaghi.

Per il *mezzo non lineare* si ha:

$$\varepsilon = C_\varepsilon \lg \frac{\sigma'}{\sigma_o'}; \quad \varepsilon_t = C_\varepsilon \lg \frac{\sigma_t'}{\sigma_o'} = C_\varepsilon \lg \left( 1 + \frac{\sigma_o'}{\sigma} \right)$$

In questo caso quindi, come era da attendersi,  $\varepsilon_t$  dipende dai valori delle tensioni effettive iniziale e finale oltre che dalla loro differenza.

La (12) può dunque scriversi:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= C_\varepsilon \lg \frac{\sigma'}{\sigma_o'} = \varepsilon_t [1 - \varphi(Z, T)] = \\
&= C_\varepsilon \lg \frac{\sigma_t'}{\sigma_o'} [1 - \varphi(Z, T)]
\end{aligned}$$

da cui:

$$\lg \frac{\sigma'}{\sigma_o'} = \lg \frac{\sigma_t'}{\sigma_o'} [1 - \varphi(Z, T)]$$

e quindi:

$$\frac{\sigma'}{\sigma_o'} = \left( \frac{\sigma_t'}{\sigma_o'} \right)^{[1 - \varphi(Z, T)]}$$

Si ha allora:

$$\frac{u}{\sigma_o'} = \frac{\sigma_t' - \sigma'}{\sigma_o'} = \frac{\sigma_t'}{\sigma_o'} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_o'}{\sigma_t'} \right)^{\varphi(Z, T)} \right]$$

da cui infine:

$$u = \sigma_t' \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_o'}{\sigma_t'} \right)^{\varphi(Z, T)} \right] \quad (14)$$

espressione coincidente con quella fornita, per lo stesso problema, da DAVIS e RAYMOND [1965]. A differenza di quanto avveniva per il mezzo lineare, in questo caso la sovrappressione neutra è funzione, oltre che della differenza fra  $\sigma_t'$  e  $\sigma_o'$ , anche del loro rapporto.

Per quanto riguarda il grado di consolidazione, è da osservare che esso viene definito talvolta in termini di deformazioni:

$$U = \frac{w(t)}{w(\infty)} = \frac{\int_0^h \varepsilon dz}{h \varepsilon_t}$$

in cui si è indicato con  $w$  il cedimento dello strato; e talvolta in termini di sovrappressioni neutre:

$$U = \frac{\sigma h - \int_0^h u dz}{\sigma h}$$

Come si può facilmente verificare, per il mezzo lineare le due definizioni coincidono e si può quindi parlare senz'altro di grado di consolidazione. Ciò però non si verifica nel caso generale di relazione non lineare, fra tensioni e deformazioni, e quindi anche per il modello di Davis e Raymond; occorre quindi precisare a quale delle due definizioni si fa ricorso.

Nella presente nota si adatterà l'espressione del grado di consolidazione in termini di deformazioni.

Dalla (15) e dalla (12) si ricava:

$$U = \int_0^1 [1 - \varphi(Z, T)] dZ = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left\{ - (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} T \right\} \quad (15)$$

espressione valida per ambedue i modelli di terreno presi in esame.

In fig. 1 sono riportati i valori delle sovrappressioni neutre e del grado di consolidazione per lo schema di carico ad incremento discontinuo e per i due modelli di terreno considerati.

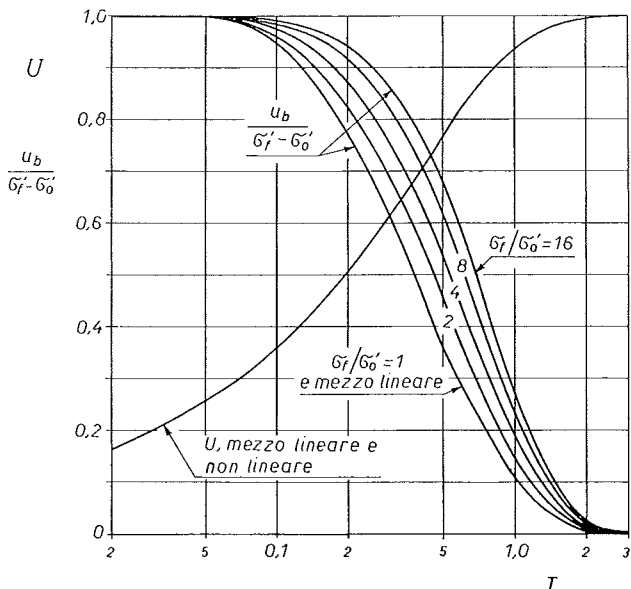


Fig. 1. - Incremento di carico costante, mezzo lineare e non lineare. Pressione neutra alla base  $u_b$  e grado di consolidazione  $U$ .

### 5. Velocità di deformazione costante

Nella prova CRS il campione viene deformato a velocità costante, misurando il carico applicato e la pressione neutra alla base. Per trattare tale schema risulta conveniente esprimere la (7) in termini di spostamento  $w$ , essendo:

$$\varepsilon(Z, T) = \frac{\partial w(Z, T)}{\partial Z}$$

Ponendo  $W = w/h$  la (7) assume la forma:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial Z^3} = \frac{\partial^2 W}{\partial Z \partial T} \quad (16)$$

da risolvere con le condizioni ai limiti:

$$\left. \begin{aligned} W = r t = \frac{r h^2 T}{c_v} & \text{ per } Z = 0 \\ W = 0 & \text{ » } Z = 1 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = 0 & \text{ » } Z = 1 \end{aligned} \right\} 0 \leq T < \infty \quad (17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad \text{» } 0 \leq Z \leq 1; T = 0$$

L'equazione (16) con le condizioni ai limiti (17) è stata risolta da WISSA *et al.* [1971] che se ne servono per elaborare un metodo di interpretazione dei risultati sperimentali.

Tale soluzione, ottenuta con la tecnica dell'integrale per sovrapposizione, viene qui di seguito esplicitata.

La soluzione dell'eq. (16), ricondotta in termini di  $\varepsilon$ , si scrive:

$$\varepsilon = \frac{r h^2}{c_v} [T + f(Z) - g(Z, T)] \quad (18)$$

in cui:

$$f(Z) = \frac{1}{6} (2 - 6Z + 3Z^2)$$

$$g(Z, T) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \pi Z}{n^2} \exp \{-n^2 \pi^2 T\}$$

La  $\varepsilon$  risulta quindi costituita da un valore medio  $\frac{r h^2 T}{c_v}$  che cresce linearmente nel tempo, a cui si aggiungono un termine stazionario  $\frac{r h^2}{c_v} \cdot f(Z)$  ed un termine transitorio  $-\frac{r h^2}{c_v} \cdot g(Z, T)$ . Come mostra la fig. 2 il

termine transitorio risulta praticamente nullo per  $T \geq 0,35$ ; al di là di tale valore, quindi, la  $\varepsilon$  è in ogni punto funzione lineare di  $T$ .

Passando ora a calcolare le pressioni neutre, per il *mezzo lineare* si ha:

$$\sigma' - \sigma'_0 = E \varepsilon$$

avendo indicato con  $\sigma'$  la pressione effettiva in

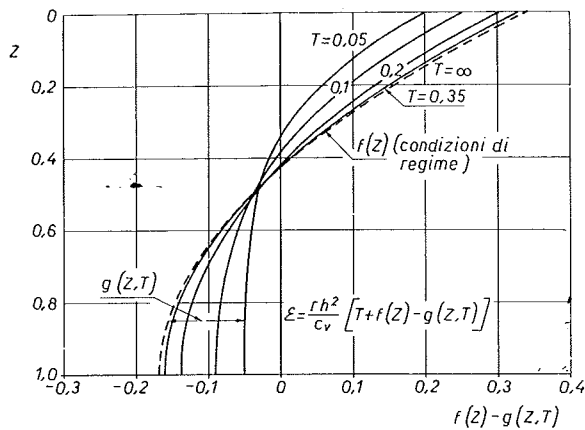


Fig. 2. - Velocità di deformazione costante, mezzo lineare e non lineare. Distribuzione delle  $\varepsilon$  lungo lo spessore dello strato.

un punto ed in un istante generico, con  $\varepsilon$  la corrispondente deformazione e con  $\sigma'_0$  il valore della pressione effettiva di consolidazione, costante con  $Z$ , a partire dalla quale si è iniziata la prova. Se  $\sigma$  è l'incremento di pressione che è necessario applicare al campione per mantenere una velocità di deformazione costante, si ha:

$$u = \sigma + \sigma'_0 - \sigma' = E(\varepsilon_s - \varepsilon) \quad (19)$$

avendo indicato con  $\varepsilon_s$  il valore di  $\varepsilon$  alla superficie superiore del campione ( $Z = 0$ ) ove, essendo  $u = 0$ , l'incremento di pressione effettiva è pari a  $\sigma$ . La (18) e la (19) forniscono, con facili passaggi:

$$u(Z, T) = \frac{E r h^2}{c_v} \left[ Z - \frac{1}{2} Z^2 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \cos n \pi Z) \exp \{-n^2 \pi^2 T\} \right] \quad (20)$$

La (20) coincide con l'espressione ricavata per altra via da VIGGIANI [1970].

I risultati ottenuti sono rappresentati sinteticamente in fig. 3. Per  $T \geq 0,35$  il carico necessario per deformare il provino a velocità costante cresce linearmente con il tempo, mentre la pressione neutra assume in ogni punto un valore stazionario  $u^*$ . In questa fase alla base del provino si ha un valore  $u_{b,*}$  della sovrappressione neutra:

$$u_{b,*} = \frac{E r h^2}{2 c_v} \quad (20')$$

La pressione neutra in ogni istante non dipende dal valore di  $\sigma'_0$ .

Per il mezzo non lineare si ha:

$$\varepsilon = C_\varepsilon \lg \frac{\sigma'}{\sigma'_0}$$

da cui:

$$\sigma' = \sigma'_0 \exp \left\{ \frac{\varepsilon \ln 10}{C_\varepsilon} \right\}$$

Ricordando la (18), si ha allora:

$$\sigma' = \sigma'_0 \exp \left\{ \frac{r h^2 \ln 10}{c_v C_\varepsilon} [T + f(Z) - g(Z, T)] \right\}$$

Ponendo:

$$\alpha = \frac{r h^2}{c_v C_\varepsilon} \ln 10$$

l'espressione della pressione effettiva diventa:

$$\sigma' = \sigma'_0 \exp \{ \alpha T + \alpha f(Z) - \alpha g(Z, T) \}$$

L'incremento di carico  $\sigma$  necessario a mantenere una velocità di deformazione costante si esprime:

$$\sigma = \sigma'_0 [\exp \{ \alpha T + \alpha f(0) - \alpha g(0, T) \} - 1] \quad (21)$$

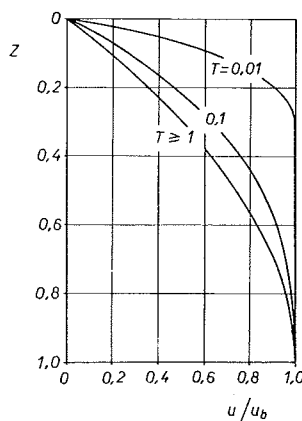
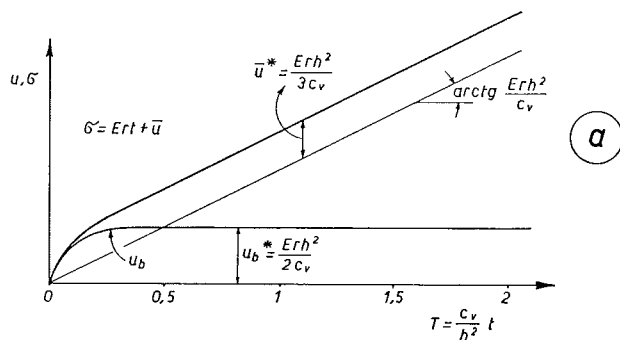


Fig. 3. - Velocità di deformazione costante, mezzo lineare. a) Incremento di carico  $\sigma$  e sovrappressione neutra alla base  $u_b$ ; b) isocrone del processo di consolidazione.

La pressione neutra vale:

$$u = \sigma'_0 + \sigma - \sigma' = \sigma'_0 [\exp \{ \alpha T + \alpha f(0) - \alpha g(0, T) \} - \exp \{ \alpha T + \alpha f(Z) - \alpha g(Z, T) \}] \quad (22)$$

Come era da attendersi, ed a differenza di quanto accade per il mezzo lineare, i vari parametri caratteristici del fenomeno risultano dipendenti non solo dalla velocità di deformazione tramite il fattore  $\alpha$  ma anche dal valore iniziale della pressione effettiva  $\sigma'_0$ .

In fig. 4 sono riportati i valori dell'incremento di tensione  $\sigma$  necessario a mantenere una velocità di deformazione costante e della pressione neutra alla base  $u_b$ . Per motivi di rappresentazione grafica, essi sono rapportati al valore  $\sigma_{T=1}$  che  $\sigma$  assume per  $T = 1$ .

$$\sigma_{T=1} = \sigma'_0 \left[ \exp \left\{ \frac{4}{3} \alpha \right\} - 1 \right]$$

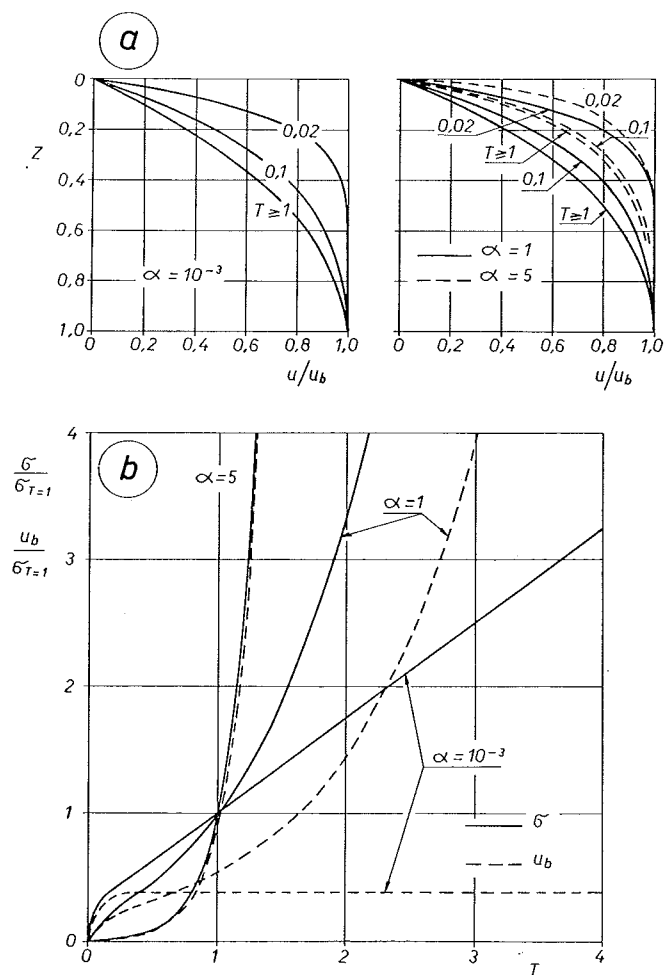


Fig. 4. - Velocità di deformazione costante, mezzo non lineare. a) Isocrone del processo di consolidazione; b) incremento di carico  $\sigma$  e sovrappressione neutra alla base  $u_b$ .

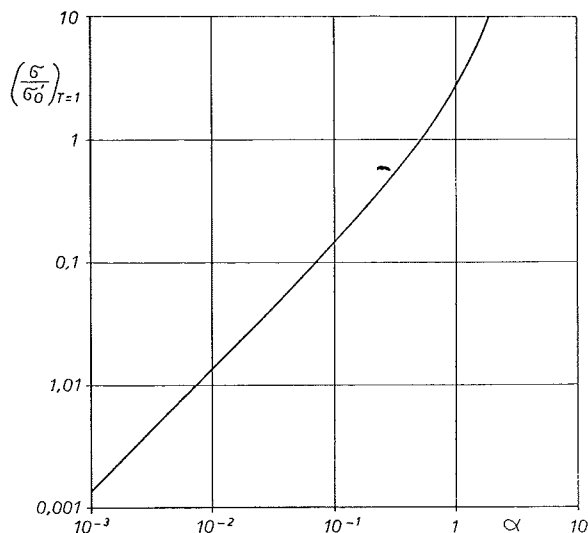


Fig. 5. - Velocità di deformazione costante, mezzo non lineare. Incremento di carico  $\sigma$  al tempo  $T = 1$  in funzione del parametro  $\alpha$ . Con  $\sigma'_0$  si indica la pressione effettiva di consolidazione iniziale.

relazione diagrammata in fig. 5.

Come appare dalla fig. 4 per valori di  $\alpha \leq 10^{-1}$  e nel campo di valori di  $T$  considerati il comportamento del mezzo non lineare è estremamente simile a quello del mezzo lineare. Onde spiegare tale circostanza dobbiamo osservare che, per valori di  $\alpha$  ridotti, in un certo intervallo di  $T$  (ad esempio quello considerato in fig. 4) l'incremento della tensione normale sul provino è anch'esso ridotto. Ad esempio la fig. 5 mostra che, per  $\alpha \leq 10^{-1}$ , nell'intervallo di  $T$  da 0 ad 1 si ha un incremento di  $\sigma$  pari a circa il 10% di  $\sigma'_0$ ; in tali condizioni il comportamento del mezzo alla Davis e Raymond non si discosta sensibilmente da quello del mezzo lineare.

Più rappresentativo dell'intero processo per i diversi valori di  $\alpha$  può essere ritenuto il diagramma di fig. 6 nel quale la scala dei tempi è stata sostituita con la scala  $\alpha T$  in modo da coprire un intervallo di tempo proporzionalmente maggiore per le curve relative ai valori più bassi di  $\alpha$ . Si noti che in fig. 6 sia gli incrementi di carico  $\sigma$  che le pressioni neutre alla base  $u_b$  sono rapportati al valore di  $\sigma'_0$  e sono quindi fra loro direttamente paragonabili.

La fig. 6 mostra che, per valori elevati di  $\alpha$ , il carico cresce rapidamente con legge marcatamente non lineare e lo stesso avviene per la pressione neutra; al contrario per i valori ridotti di  $\alpha$  il carico cresce più lentamente e con legge non troppo dissimile dalla lineare, mentre la sovrappressione neutra assume valori molto ridotti.

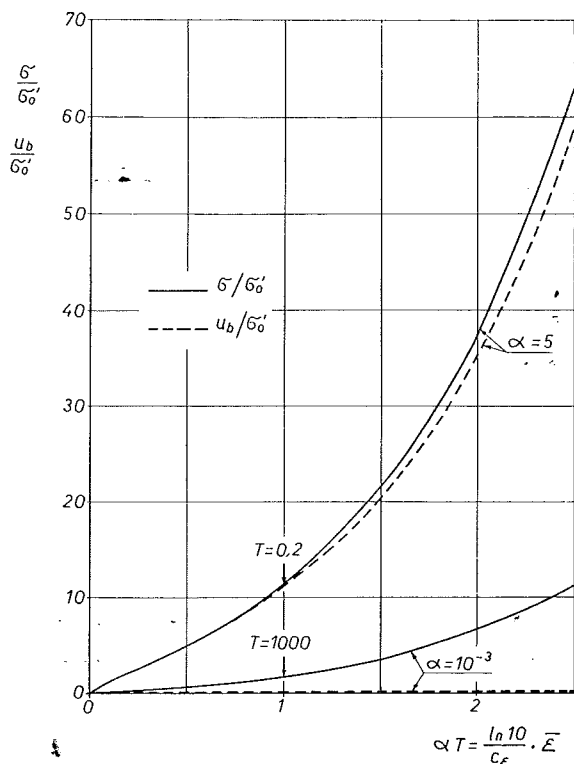


Fig. 6. - Velocità di deformazione costante, mezzo non lineare. Incremento di carico  $\sigma$  e sovrappressione neutra alla base  $u_b$  in funzione del prodotto  $\alpha T$ .

Si noti che il prodotto  $\alpha T$  è direttamente proporzionale, con coefficiente  $\frac{\ln 10}{C_\epsilon}$ , al valore medio della deformazione del provino  $\epsilon$ .

Le curve di fig. 6 possono quindi essere considerate alla stregua di relazione fra  $\sigma$  ed  $\epsilon$ . Per valori ridotti di  $\alpha$  essendo la sovrappressione neutra quasi nulla, la prova risulta praticamente drenata e ad un determinato valore di  $\sigma$  corrisponde un valore di  $\epsilon$  molto prossimo a quello fornito dalla (9); al contrario per valori elevati di  $\alpha$  la pressione effettiva media è molto minore di  $\sigma$  e quindi i valori di  $\epsilon$  risultano, a parità di  $\sigma$ , molto minori.

In fig. 7 la sovrappressione neutra alla base  $u_b$  è posta in relazione con il carico applicato  $\sigma$ . Al crescere di  $T$  il rapporto  $u_b/\sigma$  tende ad un valore costante, che decresce con  $\alpha$  tendendo a 0 per  $\alpha \cong 10^{-3}$ . Si noti che la curva relativa al mezzo lineare è praticamente coincidente con quella per mezzo non lineare ed  $\alpha \leq 10^{-3}$ .

In presenza di carichi variabili nel tempo VIGIANI [1967] definisce il grado di consolidazione in termini di deformazioni come rapporto fra il cedimento al generico tempo  $t$  ed il cedimento che si sarebbe verificato allo stesso tempo in assenza

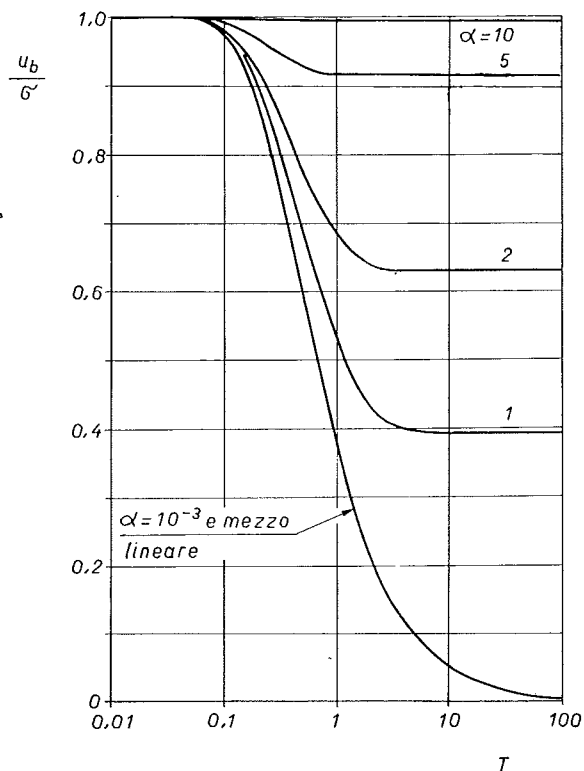


Fig. 7. - Velocità di deformazione costante, mezzo non lineare. Rapporto fra la sovrappressione neutra alla base  $u_b$  e l'incremento di carico applicato  $\sigma$ .

di sovrappressioni neutre, e cioè:

$$U = \frac{w(t)}{\sigma(t) \cdot h} = \frac{1}{E(\sigma')} \frac{\int_0^h \epsilon dz}{\epsilon_s}$$

Anche in questo caso quindi l'espressione del grado di consolidazione è comune ai due modelli considerati. Per la (18) risulta:

$$U = \frac{\int_0^1 \epsilon dZ}{\epsilon_s} = \frac{T}{T + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 T}} \quad (23)$$

La (23) che, come si vede, è indipendente da  $\alpha$ , è posta in diagramma in fig. 8.

## 6. Velocità di carico costante

Nella prova CRL al campione viene applicata un incremento di pressione  $\sigma$  crescente nel tempo con la legge:



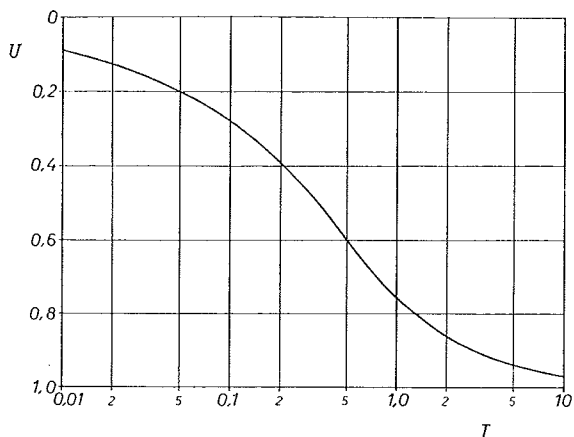


Fig. 8. - Velocità di deformazione costante, mezzo lineare e non lineare. Grado di consolidazione U.

$$\sigma = b t = \frac{b h^2}{c_v} T \quad (24)$$

L'equazione (7) deve essere risolta con le seguenti condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} T = 0; & \quad 0 \leq Z \leq 1; & \quad \varepsilon = 0 \\ 0 \leq T \leq \infty; & \quad Z = 0; & \quad \varepsilon = \varepsilon_s(T) \\ 0 \leq T \leq \infty; & \quad Z = 1; & \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

La relazione  $\varepsilon = \varepsilon_s(T)$  che appare nella seconda delle (25) dipende dal modello di terreno adottato.

Per il *mezzo lineare* si ha, dalla (24):

$$\varepsilon_s(T) = \frac{\sigma}{E} = \frac{b h^2}{E c_v} \cdot T \quad (26)$$

mentre per il *mezzo non lineare*:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(T) &= \frac{C_\varepsilon}{\ln 10} \ln \left( \frac{\sigma'_0 + \sigma}{\sigma'_0} \right) = \\ &= \frac{c_\varepsilon}{\ln 10} \ln (1 + \chi T) \end{aligned} \quad (27)$$

avendo posto  $\chi = \frac{b h^2}{c_v \sigma'_0}$ ,

Esaminando dapprima il *mezzo lineare*, l'equazione (7) con le condizioni ai limiti (25) e (26) ammette la seguente soluzione:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{b h^2}{E c_v} \left[ T - Z + \frac{Z^2}{2} + \right. \\ &+ \left. 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } MZ}{M^3} \exp \{-M^2 T\} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

La (28) può scriversi:

$$\varepsilon = \frac{b h^2}{E c_v} [T + f'(Z) + g'(Z, T)]$$

con

$$f'(Z) = -Z + \frac{Z^2}{2}$$

$$g'(Z, T) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } MZ}{M^3} \exp \{-M^2 T\}$$

La  $\varepsilon$  risulta somma di un termine linearmente crescente  $\frac{b h^2}{E c_v} T$  cui si aggiungono un termine stazionario ed un termine transitorio.

Come risulta dalla fig. 9, il termine transitorio  $\frac{b h^2}{E c_v} \cdot g'(Z, T)$  può essere trascurato per  $T \geq 1$ ; al di là di tale valore, pertanto, la  $\varepsilon$  cresce linearmente con il tempo con un gradiente:

$$\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_{T \geq 1} = \frac{b h^2}{E c_v}$$

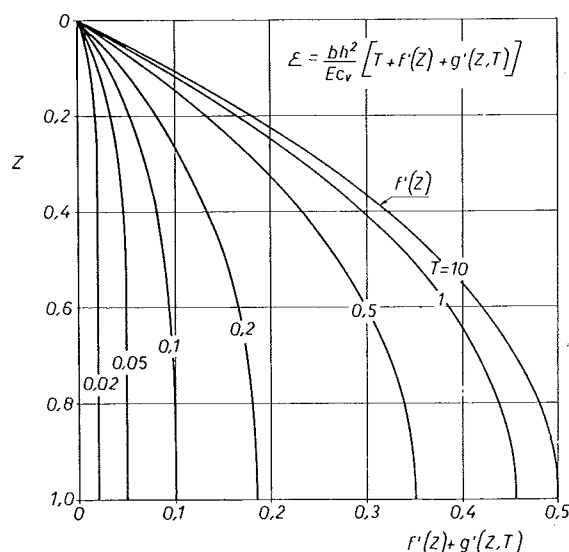


Fig. 9. - Velocità di carico costante, mezzo lineare. Distribuzione delle  $\varepsilon$  lungo lo spessore dello strato.

Passando ad analizzare le sovrappressioni neutre, dalla relazione:

$$\varepsilon = \frac{\sigma - u}{E}$$

valida per il mezzo lineare, si ottiene, ricordando la (26):

$$u = \sigma - E\varepsilon = \frac{b h^2}{c_v} \cdot T - E\varepsilon$$

e quindi, per la (28):

$$u = \frac{b h^2}{2 c_v} \left[ 2 Z - Z^2 + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } MZ}{M^3} \exp \{-M^2 T\} \right] \quad (29)$$

espressione coincidente con quella già ottenuta per altra via da VIGGIANI [1967].

I risultati ottenuti sono illustrati sinteticamente nella fig. 10. Per  $T \geq 1$  la pressione neutra assume in ogni punto un valore stazionario; in particolare alla base del provino ( $Z = 1$ ) si ha:

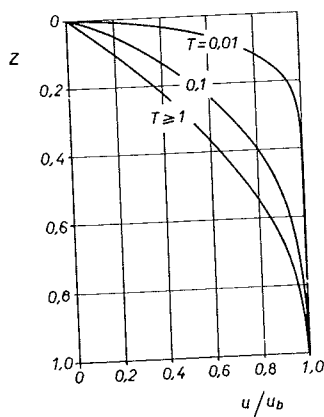
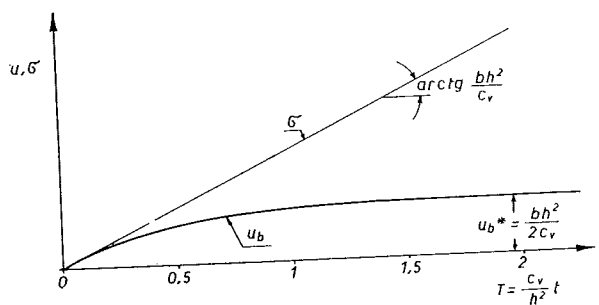


Fig. 10. - Velocità di carico costante, mezzo lineare. a) Incremento di carico  $\sigma$  e sovrappressione neutra alla base  $u_b$ ; b) Isocrone del processo di consolidazione.

$$u_b^* = \frac{b h^2}{2 c_v} \quad (30)$$

Tenendo presente che, una volta raggiunte le condizioni stazionarie, la velocità di deformazione media  $r = b/E$ , la (29) coincide con l'analogha espressione (20') relativa alla prova CRS. In altre parole, le due prove coincidono una volta superata la fase transitoria iniziale.

Le sovrappressioni neutre risultano indipendenti da  $\sigma_0'$  e direttamente proporzionali alla velocità di carico  $b$ .

Per il mezzo non lineare la soluzione della (7) con le condizioni ai limiti (25) e (27) può essere ottenuta solo attraverso un laborioso sviluppo in serie; dal punto di vista della calcolazione è risultato più conveniente una soluzione per via numerica.

Tale soluzione è stata ottenuta con tre diversi procedimenti, ottenendo risultati praticamente coincidenti a conferma della convergenza delle soluzioni.

Mentre si rimanda all'Appendice per una sintetica esposizione dei calcoli eseguiti, qui di seguito si espongono e si commentano i risultati ottenuti.

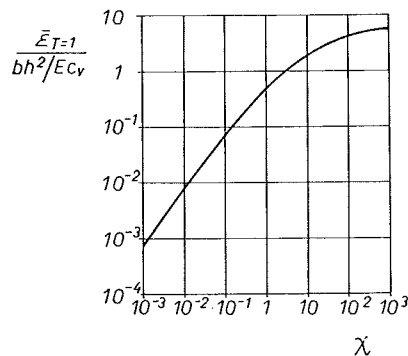
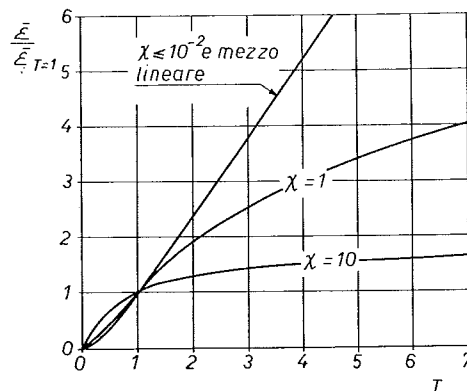


Fig. 11. - Velocità di carico costante, mezzo non lineare. a) valor medio delle  $\varepsilon$  per vari valori di  $\chi$ . b) valore di  $\varepsilon$  per  $T = 1$  in funzione di  $\chi$ .

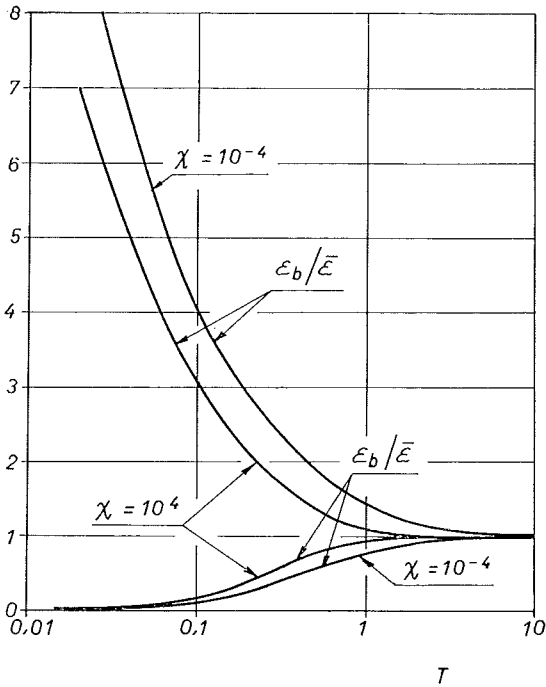


Fig. 12. - Velocità di carico costante, mezzo non lineare. Paragone fra le deformazioni alle estremità del provino ( $\epsilon_b, Z = 1; \epsilon_s, Z = 0$ ) e la deformazione media  $\epsilon$ .

Il valore medio  $\epsilon$  della deformazione unitaria cresce nel tempo con la legge riportata in fig. 11 per i diversi valori di  $\chi$ ; nella figura, per ragioni grafiche,  $\epsilon$  è rapportato al valore  $\epsilon_{T=1}$ . Risulta evidente che per valori di  $\chi \leq 10^{-2}$  il comportamento è molto prossimo a quello di mezzo lineare almeno

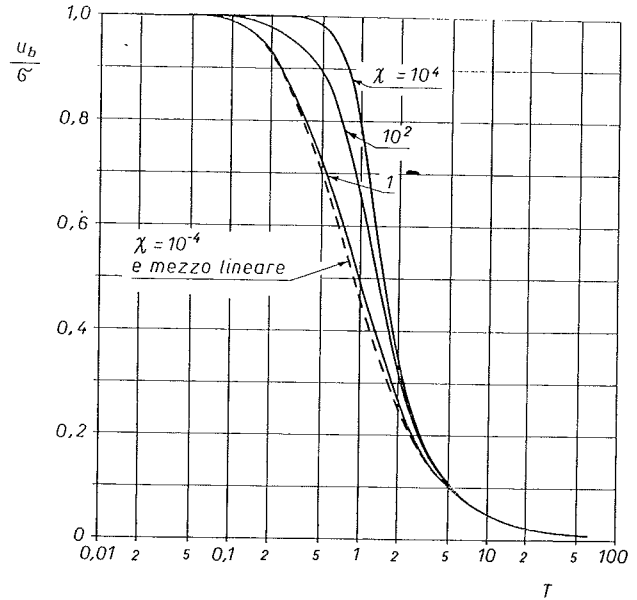


Fig. 14. - Velocità di carico costante, mezzo non lineare. Rapporto fra la sovrappressione neutra alla base  $u_b$  e l'incremento di carico  $\sigma$ .

nell'intervallo di  $T$  considerato. Ciò può essere spiegato se si nota che l'incremento di pressione applicato ad un generico tempo  $T$  vale  $\chi T \sigma_0'$ , e quindi per i valori di  $\chi$  ridotti l'incremento di pressioni è percentualmente molto ridotto; il mezzo alla Davis e Raymond ha allora comportamento molto prossimo a quello del mezzo lineare.

I valori di  $\epsilon_{T=1}$ , in funzione di  $\chi$  sono riportati nella stessa fig. 11.

Allo scopo di dare un'idea della distribuzione delle  $\epsilon$  lungo lo spessore dello strato, in fig. 12 sono riportati in funzione di  $Z$  i valori della  $\epsilon$  alla superficie superiore ( $\epsilon_s$ ) ed inferiore ( $\epsilon_b$ ) del campione, rapportati al valore medio  $\bar{\epsilon}$ . Come si vede lo stato di deformazione del campione, marcatamente variabile all'inizio del fenomeno, diventa praticamente uniforme per  $T \geq 1$ .

Passando alla sovrappressione neutra, in fig. 13 sono rappresentati gli incrementi  $u_b$  della pressione neutra alla base del provino ( $Z = 1$ ) per vari valori di  $\chi$ . Per rendere il diagramma adimensionale, essi sono stati divisi per il valore assunto dall'incremento di carico  $\sigma$  per  $T = 1$ .

La figura mostra che la sovrappressione neutra alla base tende ad un valore costante, indipendente da  $\chi$ , che vale:

$$u_b^* = \frac{b h^2}{2 c_v}$$

ed è quindi coincidente con quello (eq. 30) già trovato per il mezzo lineare. Il decorso nel tempo è però diverso a seconda dei valori di  $\chi$ ; per

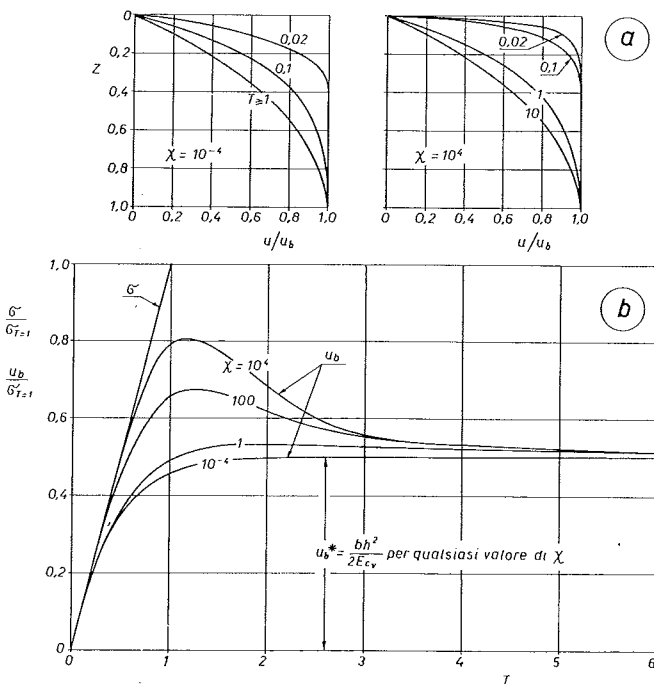


Fig. 13. - Velocità di carico costante, mezzo non lineare. a) Isocrone del processo di consolidazione; b) sovrappressione neutra alla base  $u_b$ .

$\chi \leq 1$  si ha un andamento sempre crescente mentre per  $\chi > 1$  si ha dapprima una crescita fino ad un valore massimo, superiore a quello di regime, e quindi una diminuzione. Il diagramma relativo al mezzo lineare è praticamente coincidente con quelli relativi ai più bassi valori di  $\chi$ .

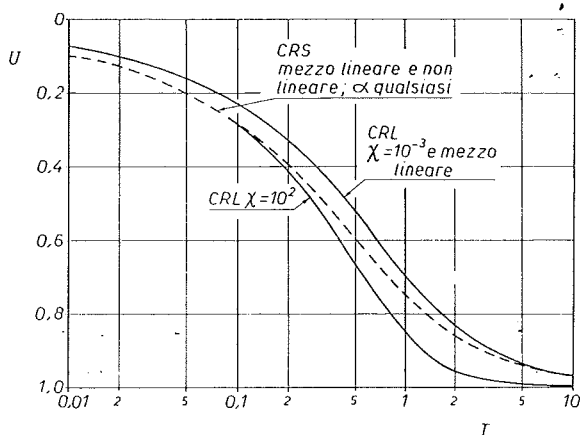


Fig. 15. - Velocità di carico costante, mezzo lineare e non lineare, grado di consolidazione. Per confronto è riportata in figura anche la curva relativa al caso di velocità di deformazione costante (v. fig. 8).

Nella stessa fig. 13 sono riportate, per vari valori di  $\chi$ , le isocrone del processo di consolidazione.

In fig. 14 è riportato, in funzione di  $\chi$ , il rapporto fra la sovrappressione neutra alla base e l'incremento di carico applicato. A differenza di quanto si verificava per il CRS (fig. 7), al crescere di T il rapporto  $u_b/\sigma$  tende a zero per qualsiasi valore di  $\chi$ .

Il grado di consolidazione è riportato in diagramma in fig. 15. A differenza di quanto si verificava per i casi trattati in precedenza il grado di consolidazione assume valori diversi per i due modelli e, per il mezzo non lineare, per i diversi valori di  $\chi$ . Ciò dipende dal fatto che la condizione di carico, riportata in termini di  $\varepsilon$ , dà luogo a diverse condizioni ai limiti (funzione  $\varepsilon_s(T)$ ).

Nella fig. 15, a titolo di confronto, è riportata a tratti la curva del grado di consolidazione relativa al caso CRS; essa è intermedia fra quelle del CRL con valori elevati e ridotti di  $\chi$ .

Si nota infine che, al solito, il grado di consolidazione relativo al mezzo lineare è praticamente coincidente con quello del mezzo non lineare per i valori più ridotti di  $\chi$ .

## APPENDICE

### Soluzione dello schema CRL, mezzo non lineare.

Per ottenere una distribuzione spaziale e temporale delle  $\varepsilon$  che soddisfi alla (7) ed alle (25), (27) è necessario che alla superficie superiore del provino si abbia una  $\varepsilon = \varepsilon_s(T)$  data dalla (27) (fig. A1).

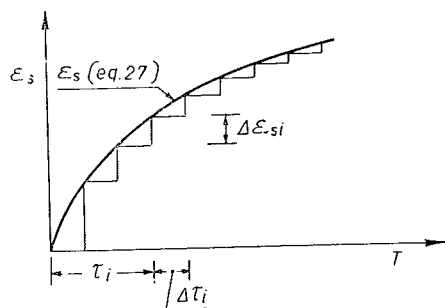


Fig. A. 1

Ciò può essere ottenuto sostituendo alla curva continua  $\varepsilon_s(T)$  una distribuzione discontinua quale quella di fig. A.1. Si potrà allora scrivere:

$$\varepsilon(Z, T) = \sum_{i=1}^n \Delta \varepsilon_i(Z, T) \quad (A. 1)$$

avendo posto (eq. 11):

$$\Delta \varepsilon_i(Z, T) = \Delta \varepsilon_{s_i} [1 - \varphi(Z, T - \tau_i)] \quad (A. 2)$$

Ciascuna delle (A. 2) soddisfa la (7) e la (25) e quindi la A. 1 rappresenta la soluzione cercata se i  $\Delta \varepsilon_{s_i}$  vengono scelti come in fig. A. 1.

Il primo procedimento numerico adottato per la ricerca dei valori di  $\varepsilon(Z, T)$  è consistito per l'appunto nel calcolare la sommatoria di eq. (A. 1) tenendo conto della (A. 2).

Il calcolo è stato effettuato per valori di T compresi fra 0.01 e 50, assumendo  $\Delta \tau_i$  pari a 0.005 e  $\chi$  pari a  $10^{-4}$ ,  $10^{-2}$ , 1,  $10^2$  e  $10^4$ .

La (A. 1), scritta in termini infinitesimi, assume la forma [HILDEBRAND, 1962]

$$\varepsilon(Z, T) = \int_0^T \frac{d\varepsilon_s}{d\tau} [1 - \varphi(Z, T - \tau)] d\tau \quad (A. 3)$$

da cui:

$$\varepsilon(Z, T) = \varepsilon_s(T) - \int_0^T \frac{d\varepsilon_s}{d\tau} \varphi(Z, T - \tau) d\tau \quad (A. 4)$$

tenendo conto della (11) e della (27) si ottiene allora:

$$\varepsilon(Z, T) = \frac{C_\varepsilon}{\ln 10} \ln(1 + \chi T) - \frac{\chi C_\varepsilon}{\ln 10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{M} \operatorname{sen} MZ \exp\{-M^2 T\} \int_0^T \frac{\exp\{M^2 \tau\}}{1 + \chi \tau} d\tau \quad (\text{A.5})$$

L'integrale che compare a secondo membro della (A.5) può essere risolto con uno sviluppo in serie, ottenendo [GRADSHTEIN, RYZHIK, 1965]:

$$\int_0^T \frac{e^{M^2 \tau}}{1 + \chi \tau} d\tau = \frac{e^{-\frac{M^2}{\chi}}}{\chi} \left\{ \ln(1 + \chi T) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M^2/\chi)^n}{n \cdot n!} [-1 + (1 + \chi T)^n] \right\} \quad (\text{A.6})$$

Dal punto di vista della calcolo numerica è risultato più conveniente effettuare direttamente l'integrazione per quadratura con la formula di Simpson. Ciò è stato fatto per valori di T compresi fra 0,01 e 50, suddividendo l'intervallo 0 - T in 1000 parti e per gli stessi valori di  $\chi$  prima considerati.

Infine la (7) con le condizioni ai limiti (24) e (26) è stata risolta alle differenze finite, ricorrendo ad un adattamento del metodo di SCHMIDT [1960]; si veda in proposito anche VIGGIANI [1965].

Alcuni dei risultati ottenuti con le tre soluzioni sono posti a confronto nella Tabella che segue.

TABELLA AI  
Paragone fra le diverse soluzioni numeriche

T	Z	$\varepsilon/C_\varepsilon$		
		eq. A.1	eq. A.5	Metodo di Schmidt
0,1	0,2	$0,4545 \times 10^{-1}$	$0,4457 \times 10^{-1}$	$0,4454 \times 10^{-1}$
	0,4	$0,1968 \times 10^{-2}$	$0,1840 \times 10^{-1}$	$0,1838 \times 10^{-1}$
	0,6	$0,8217 \times 10^{-2}$	$0,6653 \times 10^{-2}$	$0,6647 \times 10^{-2}$
	0,8	$0,3901 \times 10^{-2}$	$0,2188 \times 10^{-2}$	$0,2189 \times 10^{-2}$
	1,0	$0,2857 \times 10^{-2}$	$0,1099 \times 10^{-2}$	$0,1102 \times 10^{-2}$
0,5	0,2	0,3037	0,3034	0,3034
	0,4	0,2269	0,2266	0,2265
	0,6	0,1737	0,1733	0,1733
	0,8	0,1425	0,1420	0,1420
	1,0	0,1322	0,1317	0,1317
1,0	0,2	0,5941	0,5939	0,5938
	0,4	0,5159	0,5157	0,5156
	0,6	0,4596	0,4593	0,4593
	0,8	0,4255	0,4253	0,4253
	1,0	0,4142	0,4140	0,4140

## BIBLIOGRAFIA

- DAVIS E. H. (1971) - *Non-linear consolidation and the effect of layer depth*. Proc. 1st Australia-New Zealand Conf. on Geomechanics, Melbourne, vol. 1, pp. 105-111.
- DAVIS E. H., RAYMOND G. P. (1965) - *A non-linear theory of consolidation*. Géotechnique, vol. 15, pp. 161-173.
- GIBSON R. E., HENKEL D. J. (1954) - *Influence of duration of tests at constant rate of strain on measured « drained » strength*. Géotechnique, vol. 4, n. 1.
- GRADSHTEYN I. S., RYZHIK I. M. (1965) - *Tables of integrals, series and products*. Academic Press, New York.
- HILDEBRAND F. B. (1962) - *Advanced calculus for applications*. Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- JAMIOLKOWSKI M., MARCHETTI S. (1971) - *Alcuni risultati sperimentali ottenuti mediante un apparecchio di consolidazione edometrica a gradiente controllato*. Rivista Italiana di Geotecnica, vol. 5, n. 4.
- JANBU N. (1963) - *Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial test*. Proc. Europ. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Wiesbaden, vol. 1, pp.
- JANBU N. (1965) - *Consolidation of clay layers based on non-linear stress-strain*. Proc. 6th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Montreal, vol. 2, pp. 83-87.
- JANBU N. (1967) - *Settlement calculations based on the tangent modulus concept*. Three lectures presented at the Moscow State University.
- LOWE J., JONAS E., OBRICIAN V. (1969) - *Controlled gradient consolidation test*. Journal Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE, vol. 95, SM1.
- MIKASA M. (1965) - *The consolidation of soft clay*. Civil Engineering in Japan, Japan Soc. of Civil Eng., pp. 21-26.
- SCHMIDT E. (1965) - *Technische Thermodynamik*. Berlin.
- TERZAGHI K. (1923) - *Die Berechnung der Durchlässigkeit-ziffer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungerscheinungen*. Ak. Wiss. Wien, Math. Nat. Klasse, part II, vol. 32, n. 3/4.
- VIGGIANI C. (1965) - *Interazione fra terreno e strumento nella misura delle pressioni neutre*. Geotecnica, n. 2.
- VIGGIANI C. (1967) - *Su alcuni problemi di teoria della consolidazione*. Fondaz. Polit. per il Mezzogiorno d'Italia, quad. n. 29.
- VIGGIANI C. (1970) - *Consolidazione delle argille sotto l'azione di carichi gradualmente crescenti*. CNR, Gruppo di Ricerca Terreni e Strutture, vol. 2, pp. 17-24.
- VIGGIANI C. (1973) - *Non-linear one-dimensional consolidation of thick clay layers*. Paper submitted to the Specialty Session n. 2, 8th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Moscow.
- WISSA A. E., CHRISTIAN J. T., DAVIS E. H., HEIBERG S. (1971) - *Consolidation at constant rate of strain*. Journal Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE, vol. 97, SM10, pp. 1393-1414.

## S U M M A R Y

### A contribution to the study of one-dimensional consolidation

The differential equation of one-dimensional consolidation in terms of strain (eq. 7) is more general than Terzaghi's equation in terms of excess pore pressure (eq. 1) since the latter requires the constancy of both permeability coefficient  $k$  and oedometric modulus  $E = 1/m_v$  while the former requires only the consolidation coefficient  $c_v$  to be constant, thus allowing different effective stress-strain relationships to be taken into account.

In the present paper solutions of eq. 7 are presented for the following loading conditions: incremental loading, constant rate of strain and constant rate of loading. Starting from the expressions of strain, excess pore pressures are calculated: (i) for a linear medium ( $E = \text{const.}$ ) and (ii) for a non linear medium ( $E = \text{const. } \sigma'$ ); the former being the well known TERZAGHI's model, the latter the DAVIS and RAYMOND (1965) one.

For incremental loading (par. 4) the solution in terms of strain is given by eq. 12, from which the Terzaghi

solution (eq. 13, fig. 1) is obtained for the linear model and the Davis and Raymond solution (eq. 14, fig. 1) for the non-linear one. The degree of consolidation in terms of deformation is the same for the two models (eq. 15, fig. 1).

For constant rate of strain the solution in terms of strain (eq. 18, fig. 2) had been obtained by WISSA et al. (1972). Solving for pore pressure, eq. 20 (fig. 3) is obtained for the linear model while for the non linear one eq. 22 (fig. 4 to 7) applies. The degree of consolidation in terms of deformations is the same for the two models (eq. 23, fig. 8).

For constant rate of loading eq. 7 has different boundary conditions for the two models (eq. 26, resp. 27). For the linear model eq. 28 and 29 (fig. 9 and 10) are found. For the non linear model a numerical solution (Appendix A) has been found more convenient than solution by series expansion (eq. A. 6); it leads to the results reported in fig. 11 to 14.

The degree of consolidation (fig. 15) is different for the two models.