

**Determinazione delle sollecitazioni in una piastra circolare rigida.**

K. E. JEGOROV, R. W. SEREBRIANIJ: *Osnovaniya i Fundamenti*, Moskva, 1963.

Gli Autori espongono il metodo di calcolo delle piastre circolari rigide<sup>(1)</sup> (fig. 1) poggianti su uno strato deformabile di spessore finito H, che può essere caratterizzato mediante le due costanti elastiche: modulo di deformazione E<sub>t</sub> e coefficiente di Poisson ν<sub>t</sub>. Tale schematizzazione del problema è, a parere dello scrivente, assai utile non solo quando uno strato compressibile di spessore limitato poggia realmente su una formazione rocciosa od incompressibile, ma anche nel caso di terreni omogenei o stratificati qualora si voglia introdurre nei calcoli il concetto della cosiddetta « zona attiva »<sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Le fondazioni circolari poggianti su semispazio elastico possono considerarsi infinitamente rigide a condizione che vengano soddisfatte le seguenti relazioni:

a) Piastra di spessore costante

$$I_R = 3 \cdot \frac{1 - \nu_p^2}{1 - \nu_t^2} \cdot \frac{E_t}{E_p} \cdot \frac{R^3}{h^3} \leq 0,5$$

b) Piastra di spessore variabile

$$I_{R1} = 3 \cdot \frac{1 - \nu_p^2}{1 - \nu_t^2} \cdot \frac{E_t}{E_p} \cdot \frac{R_o^3}{h_{max}^3} \leq 0,5$$

in più deve essere soddisfatta una delle seguenti condizioni:

- 1) R<sub>1</sub>/R<sub>o</sub> = 0,25; I<sub>R2</sub> (h<sub>min</sub>) ≤ 1,0
- 2) R<sub>1</sub>/R<sub>o</sub> = 0,50; I<sub>R2</sub> (h<sub>min</sub>) ≤ 1,5
- 3) R<sub>1</sub>/R<sub>o</sub> = 0,75; I<sub>R2</sub> (h<sub>min</sub>) ≤ 2,0

essendo:

E<sub>p</sub> = modulo elastico del materiale della piastra

ν<sub>p</sub> = coefficiente di Poisson del materiale della piastra

E<sub>t</sub> = modulo elastico del terreno

ν<sub>t</sub> = coefficiente di Poisson del terreno

I<sub>R</sub> = Indice di rigidità della piastra.

Per il significato degli altri simboli vedi la fig. 1.

Partendo dalla nota equazione differenziale:

$$D \cdot \left( \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = q(r) - p(r) \quad (1)$$

dove

D = rigidezza cilindrica della piastra  

$$= \frac{E_p \cdot h^3}{12(1 - \nu_p^2)}$$

E<sub>p</sub> = modulo d'elasticità del materiale della piastra

ν<sub>p</sub> = coefficiente di Poisson della piastra

p(r) = reazioni del terreno

q(r) = carichi esterni

r = ordinata radiale

e considerando che nel caso della piastra rigida si può non tenere conto dell'influenza delle deformazioni della piastra stessa nella distribuzione delle reazioni del terreno p(r), si ottiene:

$$p(r) = \int_0^\infty P(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha \quad (2)$$

<sup>(2)</sup> In base alle recenti esperienze risulta sempre più chiaro come la resistenza dei terreni alle deformazioni è legata alle caratteristiche della struttura interna del materiale. Tale struttura fa sì che le deformazioni in un terreno soggetto ai carichi esterni iniziano solo dopo che è stato superato un certo valore

del rapporto  $\left( \frac{\Delta \sigma}{p'_{min}} \right)$

In relazione a questo fenomeno si tende di limitare il calcolo dei cedimenti alla profondità

$$\text{dov'è dove } \frac{\Delta \sigma}{p'} = \left( \frac{\Delta \sigma}{p'_{min}} \right)$$

supponendo che al di sotto di tale profondità le deformazioni non avvengano. Lo spessore del terreno che cede viene spesso chiamato la « zona attiva ».

dove

$$P(\alpha) = R \int_0^1 \varphi(\xi) \cos(\alpha R \xi) d\xi \quad (3)$$

La funzione φ(ξ) nel caso di una fondazione rigida può essere approssimata ad un polinomio di quarto grado

$$\varphi(\xi) = \frac{P}{2\pi R A} (1 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4) \quad (4)$$

$$\text{dove: } A = 1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} \quad (4a)$$

essendo:

P = risultante dei carichi gravanti sulla piastra

R = raggio della piastra.

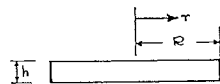
I valori dei coefficienti a<sub>2</sub> e a<sub>4</sub> sono riportati nella Tabella I. I valori a<sub>0i</sub> si riferiscono al caso di assenza dell'attrito al contatto tra lo strato « deformabile » e quello « indeformabile », viceversa i valori contrassegnati con l'indice a<sub>1i</sub> sono stati calcolati supponendo la perfetta aderenza tra i due strati

La soluzione generale dell'equazione differenziale (1) è somma dei seguenti due termini:

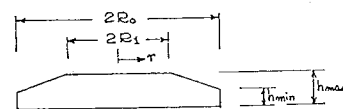
$$W(r) = W_0(r) + W_1(r) \quad (5)$$

dove:

$$W_0(r) = C_0 + C_1 \ln r + C_2 r^2 + C_3 r^2 \ln r \quad (6)$$



PIASTRA DI SPESSORE COSTANTE



PIASTRA A SPESSORE VARIABILE

Fig. 1

TABELLA I

$m=H/R$	$a_{0,2}$	$a_{1,2}$	$a_{0,1}$	$a_{1,1}$
0,25	-0,459	-0,481	-0,105	-0,117
0,5	-0,457	-0,497	-0,059	0,046
1	-0,228	-0,282	0,041	0,05
1,5	-0,103	-0,146	0,014	0,022
2	-0,05	-0,075	0	0,009
3	-0,014	-0,025	0	0,001
5	-0,003	-0,006	0	0
7	-0,001	-0,002	0	0
10	0	-0,001	0	0
$\infty$	0	0	0	0

$$W_1(r) = \frac{1}{D} \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) - P(\alpha)}{\alpha^3} \cdot [J_0(\alpha r) - 1] d\alpha \quad (7)$$

essendo:  $Q(\alpha) = \int_0^{\infty} q(r) J_0(\alpha r) r dr$

Volendo soddisfare la condizione al contorno  $M_r(r=R) = 0$  le costanti della (6) assumono i seguenti valori:

$C_0 = C_1 = C_3 = 0$ , e

$$C_2 = \frac{1}{2D(1+\gamma)} \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) - P(\alpha)}{\alpha} \cdot \left[ J_0(\alpha R) - (1-\nu) \cdot \frac{J_1(\alpha R)}{\alpha R} \right] d\alpha \quad (8)$$

Introducendo la (8) nella (6) e poi insieme con la (7) nella (5) si ottiene la seguente espressione per la determinazione delle inflessioni della piastra:

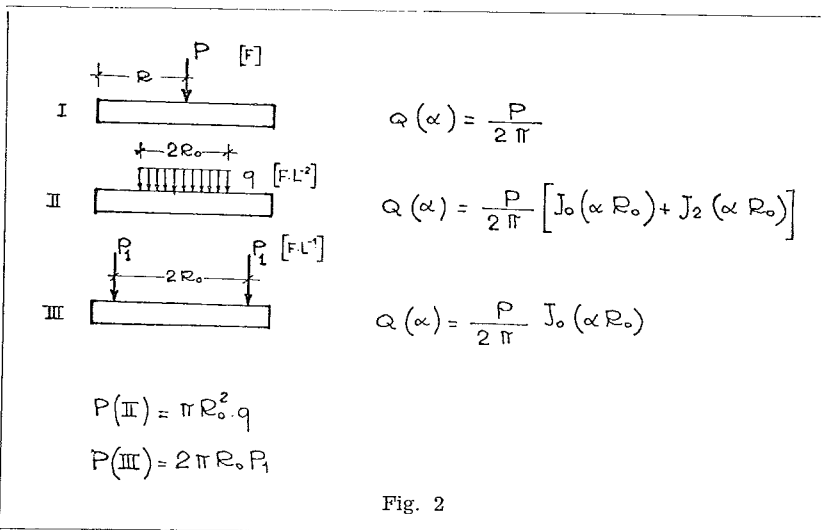
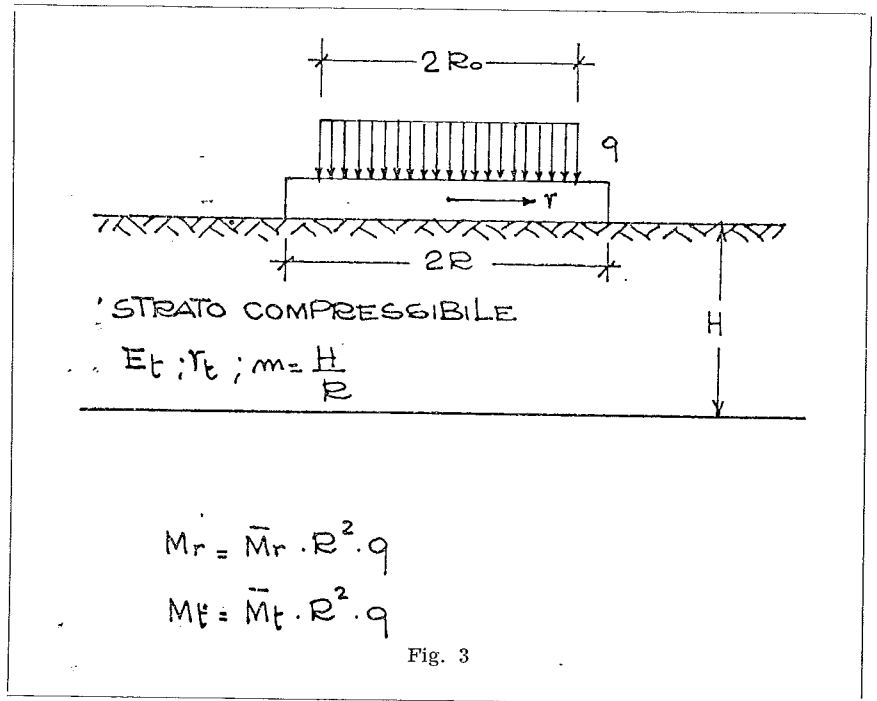


Fig. 2



$$W(r) = \frac{1}{D} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) - P(\alpha)}{\alpha^3} [J_0(\alpha r) - 1] d\alpha + \frac{r^2}{2(1+\gamma)} \cdot \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) - P(\alpha)}{\alpha} \left[ J_0(\alpha R) - (1-\nu) \cdot \frac{J_1(\alpha R)}{\alpha R} \right] d\alpha \right\} \quad (9)$$

Derivando la (9) rispetto alla variabile « r » si possono ottenere le sollecitazioni in una fondazione circolare rigida poggiante su uno strato elastico di spessore finito.

Per esempio le equazioni per la determinazione dei momenti radiali e tangenziali diventano:

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) - P(\alpha)}{\alpha} \left\{ (1+\nu) [J_0(\alpha r) - J_0(\alpha R)] - (1-\nu) [J_2(\alpha r) - J_2(\alpha R)] \right\} d\alpha \quad (10)$$

$$M_t = -D \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) - P(\alpha)}{\alpha} \left\{ (1+\nu) [J_0(\alpha r) - J_0(\alpha R)] + (1-\nu) [J_2(\alpha r) + J_2(\alpha R)] \right\} d\alpha \quad (11)$$

Nel caso della fondazione rigida, e supponendo un carico qualsiasi ma simmetrico rispetto al baricentro della piastra, la distribuzione delle reazioni del terreno è indipendente dalla distribuzione dei carichi stessi. Pertanto nella (10) e nella (11) la funzione  $P(\alpha)$  può

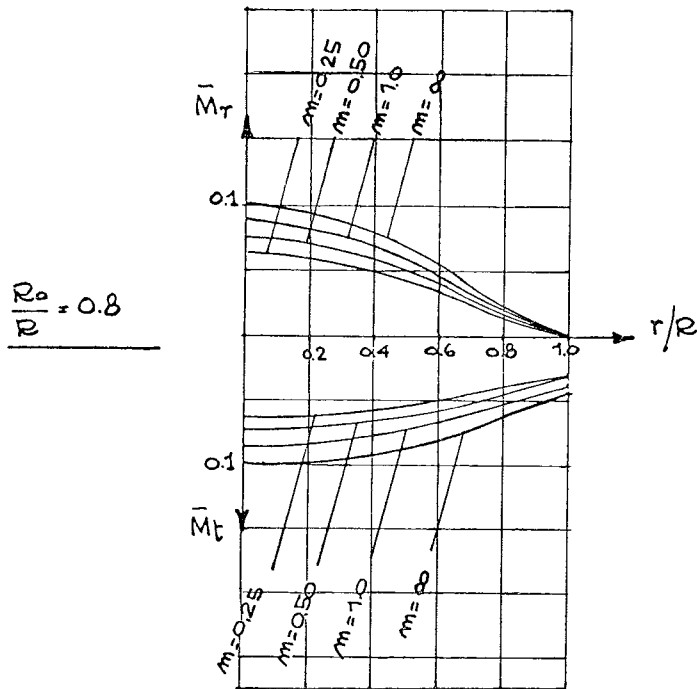


Fig. 4

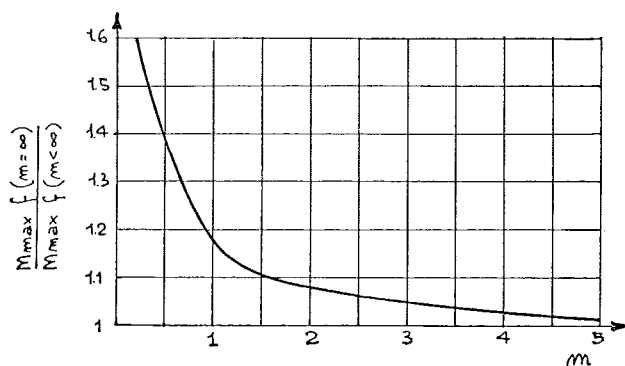


Fig. 5

essere ricavata dalla seguente formula [vedi le (3), (4) e (5)]:

$$P(\alpha) = \frac{P}{2\pi A} \int_0^1 (1 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4) \cdot \cos(R \xi \alpha) d\xi \quad (3a)$$

La funzione  $Q(\alpha)$  che dipende invece dalla distribuzione dei carichi esterni simmetrici può essere determinata, per i casi che ricorrono più frequentemente nella pratica progettuale, dalle formule riportate nella fig. 2.

Introducendo nelle formule (10) e (11) le espressioni delle funzioni  $P(\alpha)$  e  $Q(\alpha)$  e svolgendo le opportune integrazioni si possono calcolare i momenti flettente radiali e tangenziali generati

dai carichi esterni nella piastra circolare rigida.

Allo scopo di confronto lo scrivente riporta nelle figg. 3 e 4 l'andamento dei momenti flettenti in funzione del rapporto  $m$  tra lo spessore  $H$  dello strato deformabile ed il raggio  $R$  della fondazione, calcolati per il caso della fondazione di una torre di raffinazione.

Da questi calcoli risulta l'andamento dei rapporti

$$\frac{M_{r \max}(H/R = \infty)}{M_{r \max}} = f\left(\frac{H}{R}\right)$$

$$\frac{M_{t \max}(H/R = \infty)}{M_{t \max}} = f\left(\frac{H}{R}\right)$$

riportati nella fig. 5.

Da questo confronto e da altri calcoli i cui risultati non vengono qui riportati

si deduce che solo quando  $\frac{H}{R} < 2$  è opportuno ricorrere alla teoria dello strato deformabile. In tutti gli altri casi, quando  $\frac{H}{R} \geq 2$ , il calcolo può essere eseguito adottando il modello di semispazio elastico isotropo indefinito. Si ottengono infatti, così operando, valori dei momenti flettenti al massimo superiori dell'8% rispetto a quelli ottenibili dalla teoria dello strato deformabile.

(Michele Jamiolkowski)

### Problemi di progetto e costruzione delle gallerie.

AUTORI VARI: *Tunnels and Tunnelling*, vol. 2, n. 3, Maggio-Giugno 1970.

È puntualmente apparso il n. 3 - 1970 di « *Tunnels and Tunnelling* », pregevole rivista inglese specificamente indirizzata ai problemi delle gallerie. (Editor: David Light, 8 Buckingham Street, London WC 2 6 DA, England).

L'elevato interesse del periodico è dovuto soprattutto all'ampiezza delle informazioni ed alla varietà degli argomenti, che peraltro non esorbitano dallo specifico settore dei lavori in sotterraneo.

Vengono segnalate ed illustrate le più significative realizzazioni in campo mondiale, con articoli tanto sui problemi esecutivi, quanto su problemi di pianificazione generale e di progetto.

Frequenti anche le trattazioni teoriche di statica dei terreni e sulla stabilità dei rivestimenti; particolare risalto viene dato, anche attraverso la sobria e selezionata pubblicità, ai sistemi e macchinari più moderni per l'esecuzione meccanizzata delle gallerie.

I fascicoli, mediante di 50/60 pagine, contengono articoli originali e le rubriche: notizie in breve, lettere all'editore, rassegna dei prodotti, indice degli inserzionisti.

Nel numero che si recensisce sono inclusi gli articoli di cui qui di seguito si dà il titolo ed un ristretto sommario.

#### Osservazioni sul tracciato previsto per la strada M 40

È destinata a collegare Londra con Oxford, attraverso zone di grandi bellezze naturali.

Per il tratto di Beacon Hill si confronta la soluzione all'aperto con quella in galleria.