

Distribuzione delle pressioni alle spalle dei muri a mensola

T. ESPOSITO *

SOMMARIO: Si ricerca la distribuzione delle pressioni lungo il paramento verticale e la suola interrata di muri di sostegno a « cantilever », a partire dalla distribuzione di pressioni alla Rankine lungo il piano di rottura esterno, tenendo conto della deformabilità del prisma di terra compreso fra il predetto piano di rottura ed il muro, nonché dell'attrito fra terra e muro. Alla risoluzione analitica generale del problema segue una tabellazione dei risultati, per alcuni valori dei parametri, ed il confronto con i diagrammi di pressione ottenuti con il procedimento semplificato che si adotta di norma per il calcolo di questi muri.

1. Generalità.

È nota, e generalmente accettata, la procedura che si segue per il calcolo dei muri di sostegno in calcestruzzo armato con suola di base interna al terrapieno (muri così detti a mensola o, con terminologia anglosassone, a « cantilever ») di quei muri cioè che si avvalgono, per la stabilità al ribaltamento ed allo scorrimento, del peso della terra sovrastante alla base di appoggio⁽¹⁾.

Con riferimento alla fig. 1 siano:

- BD la superficie (piana) di un terrapieno costituito da terra dotata di solo attrito;
- OB = H = altezza del muro;
- OA = b = suola interna al terrapieno.

Nell'ipotesi che per effetto della spinta il muro subisca quegli spostamenti per cui si raggiunge l'equilibrio limite inferiore, viene a formarsi una zona triangolare, ABC, in cui il terreno si è plasticizzato ed in cui è possibile determinare lo stato tensionale in ogni punto (zona in stato di RANKINE); le superfici di scorrimento sono piane per cui le linee di rottura sono costituite da una duplice infinità di segmenti formanti con la verticale gli angoli α e β i quali dipendono solo dall'angolo φ e dall'inclinazione i della superficie del terreno.

* Dott. ing. Tommaso Esposito, Assistente Ordinario alla Cattedra di *Costruzioni di Strade, Ferrovie ed Aeroporti* della facoltà di Ingegneria. Università di Napoli.

In questa nota si sono omessi gli sviluppi analitici e numerici riferendo solo sull'impostazione generale del problema e riportando i risultati ottenuti.

La stesura completa è pubblicata sul Quaderno n. 37 della « *Fondazione Politecnica per il Mezzogiorno d'Italia* ».

(1) Nella maggior parte dei casi queste strutture vengono realizzate in calcestruzzo ma è chiaro che in via di principio potrebbero usarsi materiali diversi, per cui appare più opportuno la dizione *muri a mensola*.

Il prisma di terra OAB ruota (o trasla) solidalmente col muro e presenta deformazioni nettamente minori di quelle che si hanno nel prisma ABC (Cfr. [10]); il terreno in esso contenuto può con ottima approssimazione considerarsi in stato elastico⁽²⁾.

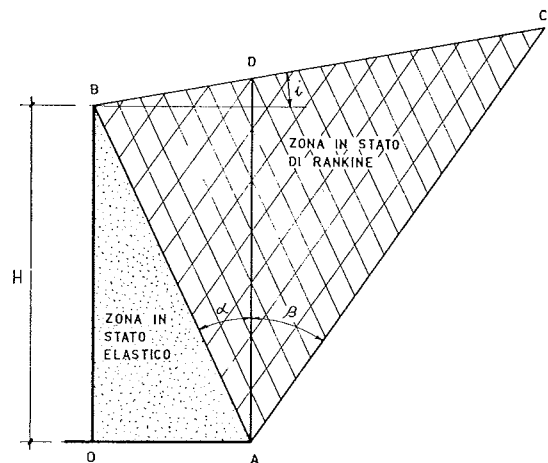


Fig. 1. - Zona di Rankine e zona in stato elastico alle spalle di un muro a mensola.

Accertata comunque la possibilità di avvalersi della teoria di RANKINE si determinano con le note formule le pressioni lungo il diaframma ideale AD e si ammette che esse si trasmettono inalterate attraverso il prisma di terra OADB per cui si procede alle consuete verifiche di stabilità, nonché al cal-

(2) Va rilevato che se, a differenza di quanto indicato nella fig. 1, il piano di rottura esterno non passa per la sommità del muro, ma ne incontra il paramento interno in un punto qualsiasi non si può, a rigore applicare la teoria di Rankine; se invece il muro non viene intersecato in alcun punto è valida la teoria di Rankine.

colo delle armature in base alla seguente distribuzione di pressioni:

- lungo la parete verticale OB : $p_o = \gamma h \lambda_n$ in cui λ_n è il coefficiente di spinta secondo RANKINE;
- lungo la suola OA : $p_v = \gamma h$.

Lo scopo di questo studio è di controllare la validità di un tal modo di procedere, ovvero di determinare, sia pure con le approssimazioni che verranno precisate in seguito, la distribuzione delle pressioni lungo i paramenti OA e OB del muro, quando si tenga conto della deformabilità del prisma di terra OAB , nonché delle azioni esplicate dalle pareti OA e OB .

Va rilevato in primo luogo che non è possibile riferirsi al masso $OADB$ caricato lungo AD poiché in esso la terra si trova in due stati ben distinti - OAB in stato elastico e ABD in stato plastico - come già precisato in precedenza; d'altra parte è agevole determinare lo stato tensionale in ogni punto della linea di rottura AB per cui è noto il carico esterno agente sul contorno AB della zona di terra in stato elastico.

Per la risoluzione del problema propostoci occorre quindi determinare le reazioni che i paramenti OA e OB del muro, riguardati come vincoli, sono capaci di esplicitare.

Si faranno a tal fine le seguenti ipotesi:

1) Sussistono tutte le condizioni necessarie perché si verifichi l'equilibrio limite inferiore secondo RANKINE (cedimento del muro, dimensione trasversale preponderante rispetto alle altre in modo da ridursi ad un problema piano, superficie di rottura esterna che non taglia il paramento del muro).

2) La zona di terra OAB può essere considerata come un solido omogeneo, isotropo ed elastico per il quale sia valida la legge di HOOKE.

3) La lunghezza della suola e l'altezza del muro

sono sempre legate dalla relazione $\frac{OA}{OB} = \text{tg}\alpha$

in modo che il solido da studiare abbia sempre come sezione retta un triangolo rettangolo.

4) Le deformazioni elastiche del muro sono trascurabili rispetto a quelle (sempre elastiche) del terreno per cui i paramenti OA e OB possono considerarsi rigidi nei confronti del terreno.

Alla luce di quanto detto è necessario quindi studiare una lastra triangolare, caricata e vincolata nel modo accennato in precedenza e che verrà comunque meglio specificato in appresso.

2. Studio della lastra triangolare. - Impostazione generale del problema.

Per quanto precedentemente detto ci si trova in presenza di uno stato di deformazione piana, per

ci si riferirà ad una lastra di spessore unitario. Assumendo un sistema di assi cartesiani orientato come in fig. 2, atteso il particolare stato di deformazione che consente di scrivere $\varepsilon_x = \gamma_{yx} = \gamma_{xz} = 0$, le equazioni indefinite di equilibrio risultano

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma \end{cases} \quad (1)$$

in cui σ_x e σ_y sono le tensioni normali agenti, rispettivamente, sulle facce normali all'asse x e all'asse y di un cubetto elementare, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ le tensioni tangenziali agenti sulle predette facce, γ il peso dell'unità di volume del materiale (terra) costituente la lastra. Si noti che nel nostro caso non è lecito trascurare il peso proprio poiché le sollecitazioni da esso indotte sono dello stesso ordine di grandezza di quelle dovute ai carichi esterni.

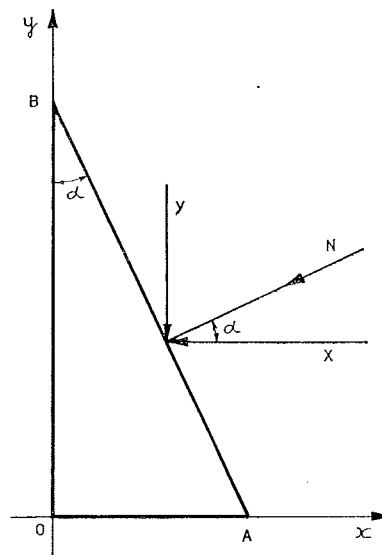


Fig. 2. - Sistema di riferimento cartesiano per lo studio della lastra triangolare.

Per la risoluzione del problema occorre, come è noto, associare alle (1) le equazioni derivanti dalle « condizioni al contorno » mediante le quali si tiene conto dei vincoli e dei carichi esterni, nonché l'equazione di stato (legge di HOOKE).

In proposito è da osservare che l'effettiva reazione esplicita dai vincoli è a rigore non determinabile: infatti, è lecito senz'altro affermare (in virtù della

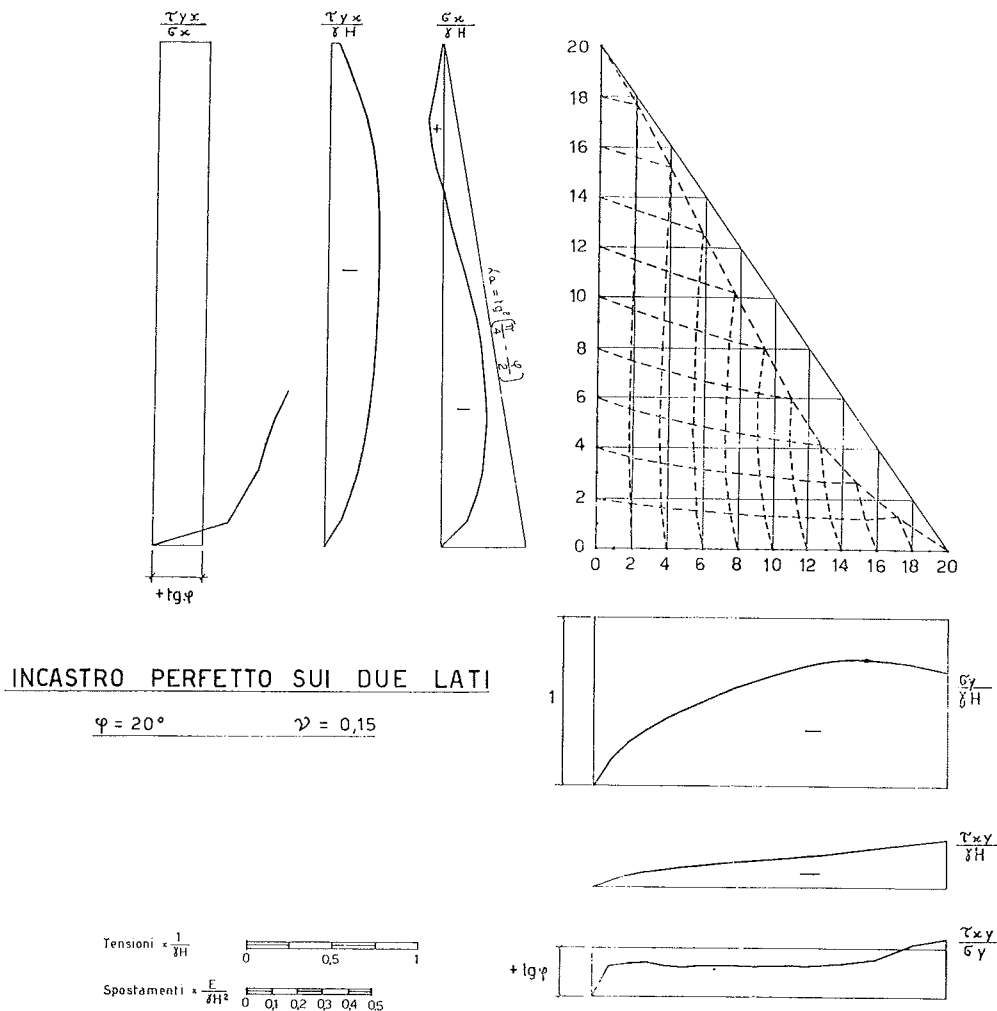


Fig. 3. - Diagrammi degli spostamenti, delle tensioni e dei rapporti τ/σ per incastro perfetto sui due lati; $\varphi = 20^\circ$; $\nu = 0,15$.

ipotesi fatta circa l'entità degli spostamenti elastici del muro) che sono nulli gli spostamenti elastici dei punti del contorno AO-OB nelle direzioni normali al contorno stesso; gli spostamenti lungo i lati OA e OB non si prestano invece ad analoghe considerazioni, dipendendo essi dalla resistenza di attrito fra terra e muro.

Si potrebbe a questo punto pensare di scrivere delle equazioni del tipo $\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \delta$ valide lungo OA e OB con δ angolo di attrito fra terra e muro; è noto però che il valore di δ è una funzione dello spostamento, a parità di ogni altra condizione (densità e umidità delle terra, entità e velocità di applicazione del carico ecc.), non suscettibile in generale di espressione analitica se non attraverso schematizzazioni comportanti notevoli approssimazioni.

Le notevoli complicazioni analitiche derivanti dall'adozione della equazione dianzi citata non verrebbero compensate da risultati decisamente attendibili a causa delle ipotesi che dovrebbero farsi circa la relazione che lega l'angolo δ con gli spo-

stamenti. Appare più opportuno studiare, traendone poi le debite conseguenze, due casi limiti⁽³⁾:

- a) Resistenza di attrito tanto grande da impedire qualsiasi spostamento dei punti della lastra lungo il contorno AO-OB (ipotesi di incastro perfetto).
- b) Resistenza di attrito tanto bassa da potersi ritenere trascurabile e possibilità, quindi, di spostamento dei punti della lastra lungo il contorno AO-OB (ipotesi di vincolo liscio).

Si mostrerà in seguito (Cfr. punto 4), analizzando i risultati ottenuti con le due ipotesi dianzi precisate, che la condizione di vincolo che approssima maggiormente la realtà — e che verrà pertanto assunta come definitiva — risulta intermedia fra le due condizioni limiti.

⁽³⁾ Un tal modo di procedere è comune, in generale a tutti i problemi in cui si ha a che fare con forze di attrito.

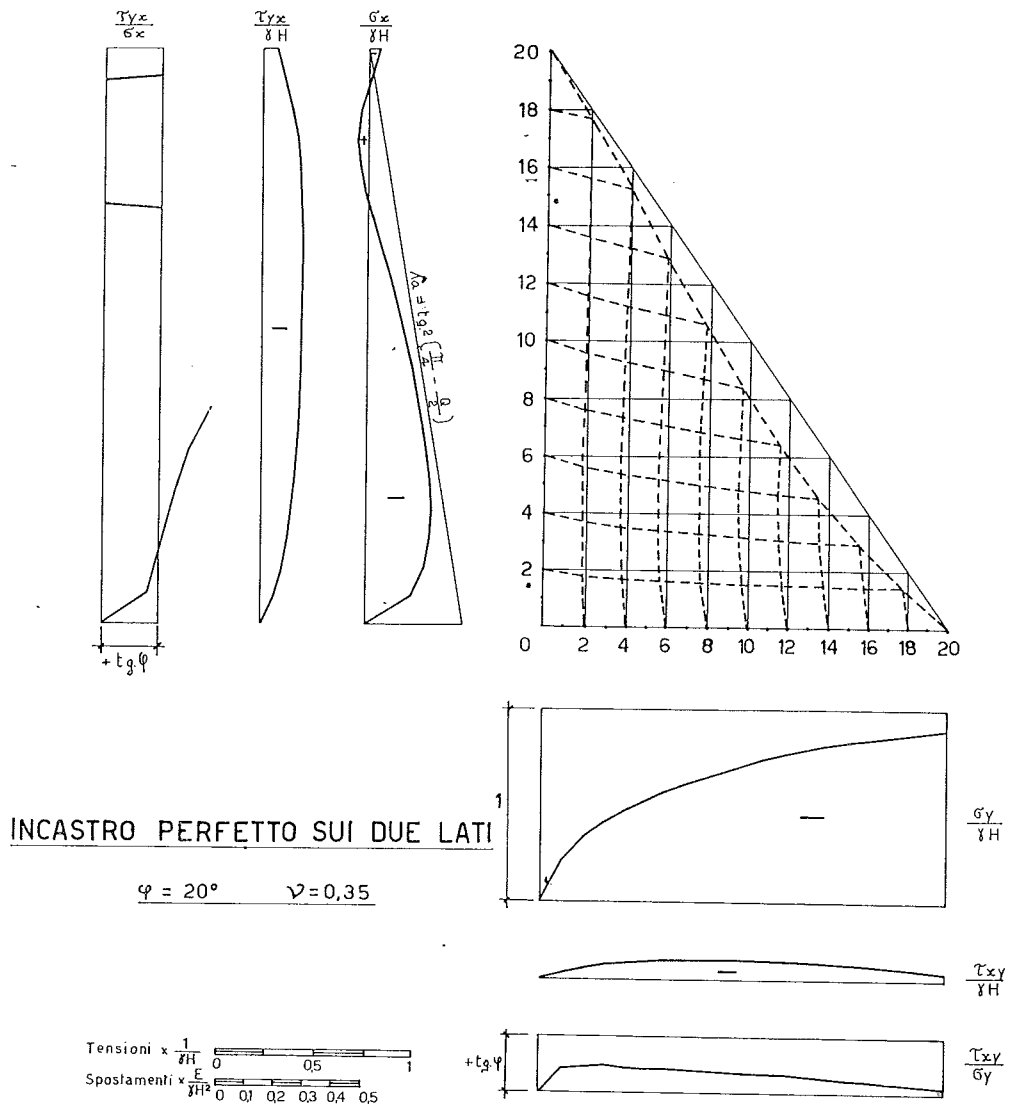


Fig. 4. - Diagrammi degli spostamenti, delle tensioni e dei rapporti τ/σ per incastro perfetto sui due lati; $\varphi = 20^\circ$; $\nu = 0,35$.

In termini analitici dette u e v le componenti dello spostamento, rispettivamente nella direzione degli assi x ed y , le due ipotesi di vincolo si traducono nelle equazioni seguenti:

a) *Incastro perfetto*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Per } y = 0 \text{ (lato OA)} \\ \text{Per } x = 0 \text{ (lato OB)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u = v = 0 \\ u = v = 0 \end{array} \quad (2)$$

b) *Vincolo liscio*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Per } y = 0 \text{ (lato OA)} \\ \text{Per } x = 0 \text{ (lato OB)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} v = 0; \tau_{yx} = 0 \\ u = 0; \tau_{xy} = 0 \end{array} \quad (3)$$

Per quanto riguarda il lato AB su cui agiscono

i carichi esterni possono scriversi, come è noto, le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = X \\ \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha = Y \end{cases} \quad (4)$$

in cui α è l'angolo che la normale N ad AB forma con l'asse x , mentre X ed Y sono le componenti secondo gli assi del generico carico esterno riferito all'unità di superficie. Si osservi che nel nostro caso X ed Y sono quantità essenzialmente negative essendo la normale N orientata in senso contrario agli assi (ossia X ed Y sono forze di compressione).

Tenuto conto che, come accennato, il carico sulla lastra coincide con il diagramma delle pressioni (valutate alla RANKINE) lungo la superficie di rottura esterna, le componenti del carico esterno si

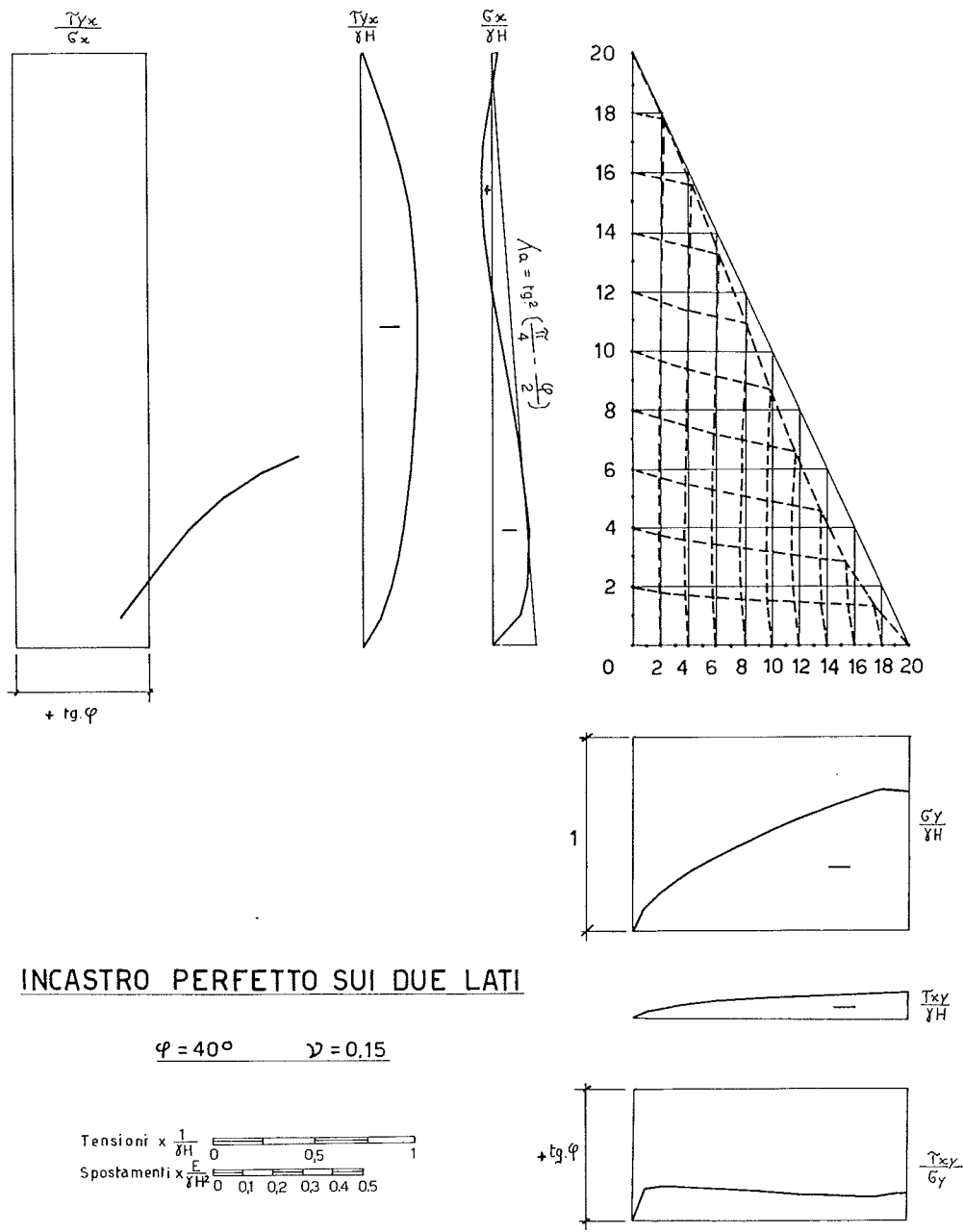


Fig. 5. - Diagrammi degli spostamenti, delle tensioni e dei rapporti τ/σ per incastro perfetto sui due lati; $\varphi = 40^\circ$; $\nu = 0,15$.

deducono, mediante considerazioni geometriche, dal cerchio di Mohr e si scrivono

$$X = -\gamma \cdot x \cdot \vartheta \cdot \cotg \alpha \cdot \cos (\alpha + \varphi) \quad (5)$$

$$Y = -\gamma \cdot x \cdot \vartheta \cdot \cotg \alpha \cdot \sen (\alpha + \varphi) \quad (5')$$

in cui si è posto

$$\vartheta = (1 + \tg \alpha \tg i) \cos i \sqrt{\frac{\cos i - \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \varphi}}{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \varphi}}}$$

con i = angolo di inclinazione della superficie del terreno; α = angolo che la linea di rottura esterna forma con la verticale; φ = angolo di attrito interno del terreno.

Risulta in tal modo definita la scrittura delle condizioni al contorno, epperò, da quanto esposto in precedenza si evince che il problema di cui trattasi non può essere affrontato mediante l'introduzione di una *funzione Φ delle tensioni* (funzione di AIRY); è noto infatti che si può giungere alla soluzione seguendo questa classica via — che per le difficoltà relativamente minori che presenta è la più usata nella soluzione dei problemi bidimensionali dell'equilibrio elastico — integrando l'equazione biarmonica $\Delta^4 \Phi = 0$ ⁽⁴⁾ a patto che siano

⁽⁴⁾ Tale equazione è valida quando le forze di massa sono nulle o si riducono alla forza peso.

note, in ogni punto del contorno, la funzione Φ e la sua derivata normale $\frac{\partial \Phi}{\partial N}$. Nel nostro caso

Φ e $\frac{\partial \Phi}{\partial N}$ sono note solo sul lato AB e non su

OA e OB essendo incognite l'entità e la distribuzione degli sforzi (incognite che costituiscono appunto l'oggetto di questa ricerca).

Poiché le condizioni al contorno si possono invece esprimere tutte in termini di componenti dello spostamento, e delle loro derivate prime, risulta necessario scrivere le (1), (3) e (4) in funzione appunto degli spostamenti.

Nell'ipotesi di validità della legge di Hooke e

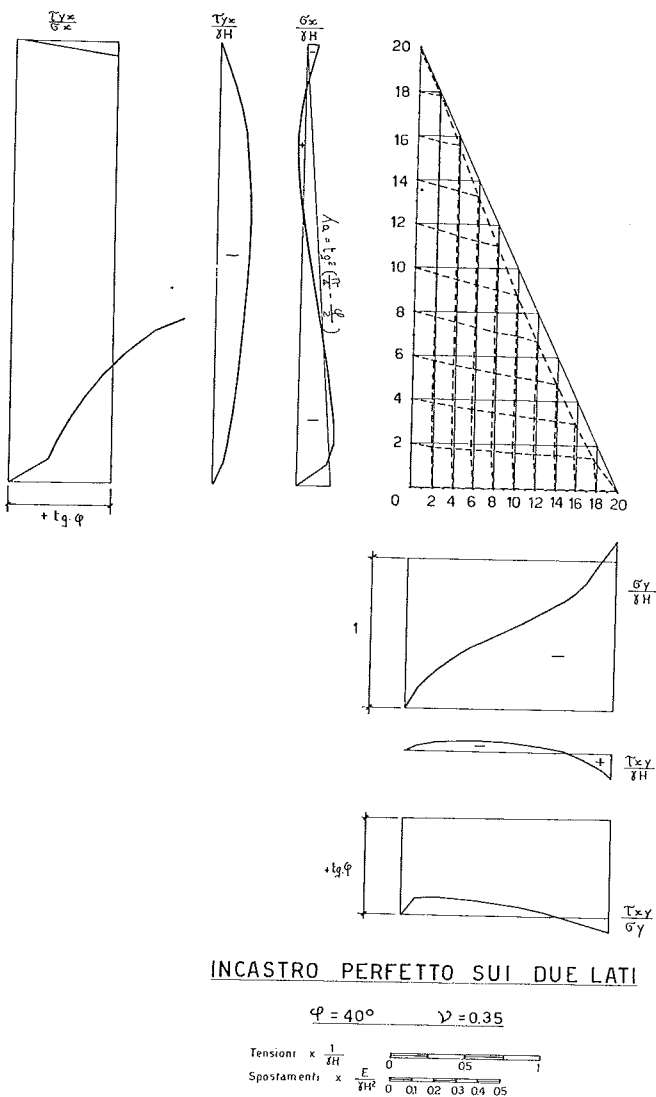
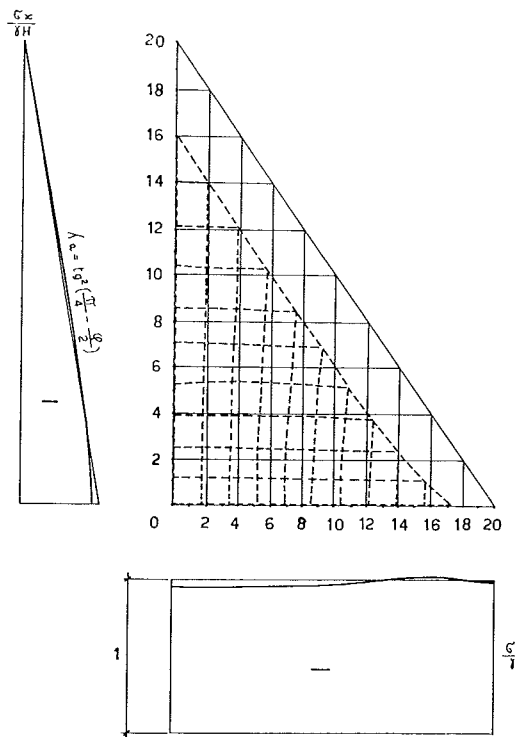


Fig. 6. - Diagrammi degli spostamenti, delle tensioni e dei rapporti τ/σ per incastro perfetto sui due lati; $\varphi = 40^\circ$; $\nu = 0,35$.



VINCOLO LISCIO SUI DUE LATI

$\varphi = 20^\circ$ $\nu = 0,15$
 Tensioni $\times \frac{1}{4H}$ 0 0,5 1
 Spostamenti $\times \frac{E}{4H^2}$ 0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5

Fig. 7. - Diagrammi degli spostamenti e delle tensioni per vincolo liscio sui due lati; $\varphi = 20^\circ$; $\nu = 0,15$.

ricordando che ci si trova in presenza di uno stato di deformazione piana, mediante le note relazioni che legano le componenti di tensione alle componenti dello spostamento, le equazioni indefinite di equilibrio (1) si scrivono

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \frac{2(1+\nu)}{E} \gamma$$

in cui u e v sono le componenti dello spostamento secondo gli assi x e y ; E è il modulo elastico normale e ν il modulo di contrazione trasversale o coefficiente di Poisson.

Procedendo in modo analogo si ottengono le equazioni al contorno in termini di spostamenti.

Lungo il lato AB

Le equazioni (4), tenuto conto anche delle (5) e (5'), diventano

$$\left[\frac{2}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right] \cos \alpha + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sin \alpha \right] = - \frac{2(1+\nu)}{E} \gamma \cdot \vartheta \cdot x \cdot \cotg \alpha \cdot \cos(\alpha + \varphi) \quad (7)$$

$$\left[\frac{2}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \sin \alpha + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \cos \alpha \right] = - \frac{2(1+\nu)}{E} \gamma \cdot \vartheta \cdot x \cdot \cotg \alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi)$$

Lungo i lati OA e OB

a) *Ipotesi di incastro perfetto*

Valgono le (2), ossia

$$\begin{aligned} \text{per } y = 0 & & u = v = 0 \\ \text{per } x = 0 & & u = v = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

b) *Ipotesi di vincolo liscio*

Le relazioni (3) divengono

$$\begin{aligned} \text{per } y = 0; & & v = 0; & & \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \text{per } x = 0; & & u = 0; & & \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

L'integrazione del sistema di equazioni differenziali costituito dalle (6), (7) e (2) oppure (8) fornisce u e v che consentono di giungere infine alle cercate componenti delle tensioni.

3. Risoluzione dei sistemi di equazione. Scelta dei parametri.

L'integrazione diretta dei due sistemi di equazioni differenziali ricavati al precedente punto 2 appare quanto mai ardua e difficile per cui si è pensato di ricorrere a procedimenti numerici. Ci si è avvalso in particolare del *metodo delle differenze finite* il quale, data la particolare forme delle incognite funzioni u e v ben si presta alla risoluzione approssimata del problema.

Si omette, in questa sede, la descrizione del procedimento seguito per scrivere i sistemi di equazioni differenziali in termini di differenze finite con le particolarità derivanti dalla forma triangolare del contorno e gli artifici usati per superare le predette singolarità. Si sono ottenuti alla fine due sistemi di equazioni lineari con 462 incognite ciascuno (ed altrettante equazioni). Dato l'elevato numero di equazioni si è dovuto rinunciare alla risoluzione diretta dei sistemi e ricorrere ad un

procedimento di successive approssimazioni (metodo di iterazione). Tutti i calcoli numerici sono stati eseguiti con l'ausilio del calcolatore installato presso il Centro di Calcolo Elettronico del Politecnico di Napoli (Control Data G 20) (5).

Si ritiene opportuno invece illustrare il criterio

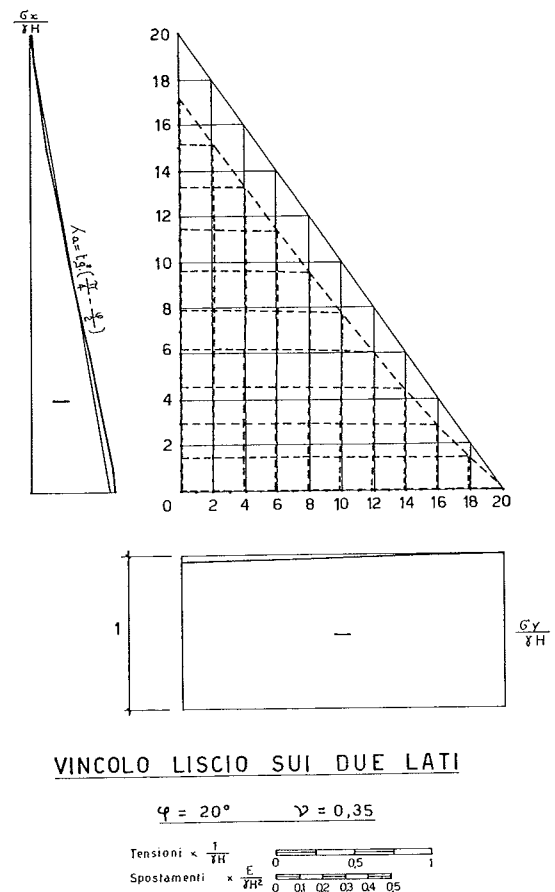
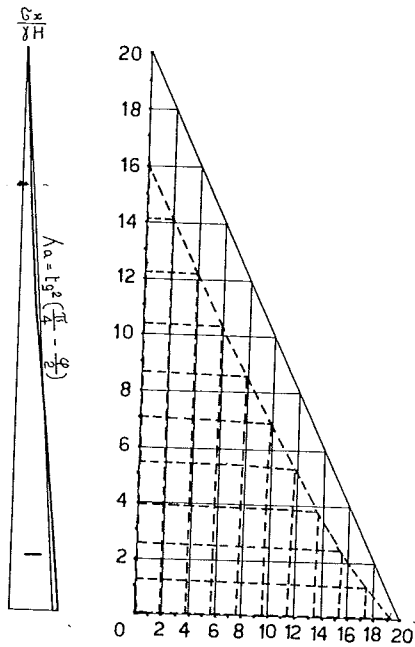


Fig. 8. - Diagrammi degli spostamenti e delle tensioni per vincolo liscio sui due lati; $\varphi = 20^\circ$; $\nu = 0,35$.

seguito nella scelta dei parametri che compaiono nei sistemi di equazioni. Si è visto che, per la impossibilità di definire le effettive condizioni di vin-

(5) Si ringrazia il prof. Giorgio SAVASTANO, direttore del Centro di Calcolo e l'ing. Aldo ESPOSITO che si è occupato della stesura dei programmi.



VINCOLO LISCIO SUI DUE LATI

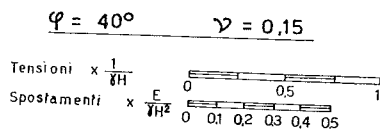
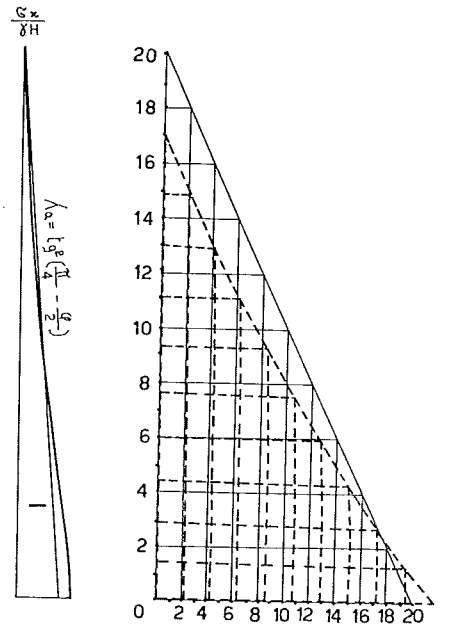


Fig. 9. - Diagrammi degli spostamenti e delle tensioni per vincolo liscio sui due lati; $\varphi = 40^\circ$; $\nu = 0,15$.

colo della lastra, si sono ipotizzate due condizioni limiti; può dirsi che, dopo l'impostazione generale del problema, lo scopo principale di questo studio sia quello di individuare la condizione di vincolo che approssima maggiormente la realtà. Si ritiene cioè opportuno, prima di passare ad una tabellazione sistematica, risolvere in modo univoco, sia pure approssimato, il problema. A tal fine risulta necessario vedere come influiscono sui risultati numerici nei due casi limiti specificati, i valori dei parametri; esamineremo quindi brevemente quali sono e qual'è il campo di variazione dei predetti parametri.

Si osservi in proposito che tutti i termini noti diversi da zero delle equazioni risolventi contengono il fattore $\gamma \frac{H^2}{E}$; le soluzioni del sistema sono quindi tutte a meno del predetto fattore per



VINCOLO LISCIO SUI DUE LATI

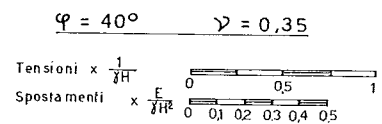


Fig. 10. - Diagrammi degli spostamenti e delle tensioni per vincolo liscio sui due lati; $\varphi = 40^\circ$; $\nu = 0,15$.

cui non è necessario prefissare γ , H ed E . La superficie del terreno viene assunta orizzontale ossia $i = 0$ (6).

L'angolo di attrito, avendo ipotizzato un masso granulare dotato di attrito e privo di coesione, può ritenersi, nella generalità dei casi, compreso fra i 20° ed i 40° .

Del coefficiente di Poisson sono note, purtroppo, le difficoltà di misura e la esiguità di dati sperimentali; il TERZAGHI [1943] ritiene che sia $\nu \approx 0,2$ per pressioni alquanto al disotto del carico di rottura e $\nu \approx 0,5$ (od anche maggiore) per pressioni prossime ai carichi di rottura.

(6) Ciò non è una limitazione per quanto si dirà in seguito perché l'angolo i influenza i risultati da un punto di vista quantitativo, ma non qualitativo.

E. DWAYNE NIELSON [1967] consiglia di assumere $\nu = 0,25$.

Il BARKAN [1962] dopo una accurata serie di esperienze ha ottenuto per sabbie $\nu = 0,30 \div 0,35$, mentre TYSTOVICH [1937] raccomanda di assumere $\nu = 0,15 \div 0,25$ per sabbie, $\nu = 0,30 \div 0,35$ per miscele di sabbia e limo e $\nu = 0,35 \div 0,40$ per le argille.

Sulla scorta dei valori precedentemente riportati si ritiene di poter affermare che nel nostro caso il coefficiente di Poisson risulta compreso fra 0,15 e 0,35.

Per quanto detto in precedenza sono stati risolti i casi ottenuti combinando per ciascuna delle due ipotesi di vincolo, i valori limiti di φ (20° e 40°) e di ν (0,15 e 0,35).

4. Discussione dei risultati numerici. Scelta della condizione di vincolo definitivo.

Una volta ottenute, per ciascun caso considerato, le componenti u e v dello spostamento, si risale agevolmente alle componenti di tensione. Queste sono state calcolate, in particolare, lungo i bordi della lastra ed i valori numerici sono riportati nelle Tabelle I e II a meno del fattore γH ; sono riportate anche le quantità E_u ed E_v che rappresentano gli errori percentuali che si hanno negli equilibri alla traslazione orizzontale e verticale; si noti come, ad onta delle approssimazioni fatte, gli scarti sono contenuti entro limiti senz'altro accettabili.

Nelle figg. da 3 a 10 sono indicati, per ciascun caso esaminato, la deformata della lastra, i diagrammi delle tensioni lungo i bordi (confrontati con i diagrammi del metodo usuale di calcolo) ed i rapporti τ/σ . Dall'esame dei risultati tabellati o, con maggiore evidenza, dalle figg. 3 10, si può dedurre che:

a) *L'ipotesi di incastro perfetto su ambedue i lati*, per qualsiasi valore di φ e di ν , conduce a risultati inaccettabili: infatti sia in alcune zone della lastra che lungo OB si hanno sforzi di trazione incompatibili con il materiale (terra) costituente la lastra stessa; inoltre, lungo la maggior parte del paramento verticale risulta largamente vinta la resistenza di attrito ($\tau/\sigma \gg \text{tg } \varphi$) per cui si verificano in realtà degli spostamenti lungo OB, il che è in contrasto con le ipotesi di partenza. Va rilevato, per contro, che lungo OA, oltre ad aversi sempre sforzi di compressione, risulta sempre $\tau/\sigma < \text{tg } \varphi$.

b) *L'ipotesi di vincoli lisci* conduce a risultati che sono, specialmente per bassi valori dell'angolo di attrito, molto vicini ai diagrammi di pressione usuali (triangolare su OB e rettangolare su OA). D'altra parte questa ipotesi è, evidentemente, priva di significato pratico perché, non essendo nullo in realtà l'attrito fra terra e calcestruzzo, non si può ammettere che i punti lungo i bordi possono liberamente spostarsi; anzi, in virtù dei valori che assume il rapporto τ/σ lungo OA, nel caso di incastro perfetto, si può affermare che anche per piccoli angoli di attrito terra-muro gli spostamenti orizzontali lungo OA risultano impediti.

La usuale procedura di calcolo corrisponde quindi all'ipotesi, fisicamente inaccettabile, di attrito terra-muro nullo.

c) Il coefficiente di Poisson ha una influenza notevole sulle deformazioni e, quindi, sui diagrammi di pressione.

In virtù delle considerazioni esposte appare lecito affermare che l'ipotesi di vincolo che approssima maggiormente la realtà è quella corrispondente ad uno spostamento orizzontale nullo dei punti lungo il lato OA (incastro perfetto) e ad una resistenza di attrito completamente mobilitata lungo il lato OB; quest'ultima ipotesi non è in contrasto con quanto detto al precedente punto 2 poiché dall'esame dei due casi limiti studiati si può dedurre che lungo la parete verticale la resistenza di attrito viene vinta e si verificano gli spostamenti necessari per ottenere il valore « finale » dell'angolo δ di attrito fra terra e muro; si avrà quindi lungo OB: $\tau_{xy} = \sigma_x \text{tg } \delta$.

In questa ipotesi, che verrà assunta come *condizione di vincolo definitiva*, le equazioni al contorno, in termini di spostamenti, si scrivono:

$$\begin{aligned} \text{— lato OA (y = 0)} \\ u = v = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{— lato OB (x = 0)} \\ \left\{ \begin{array}{l} u = 0; \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right] \text{tg } \delta \end{array} \right. \quad (9') \end{aligned}$$

Con procedimento identico a quello cui si è accennato al punto 3 si sono ottenuti, per gli stessi valori di φ e ν e per $\delta = 3/4 \varphi$, le componenti dello spostamento e le componenti di tensione lungo i bordi; queste ultime sono riportate nella Tab. III.

TABELLA I - Prima Ipotesi: Incastro perfetto (tensioni a meno di γH)

Punti	$\varphi = 20^\circ$						$\varphi = 40^\circ$						
	$\nu = 0,15$			$\nu = 0,35$			$\nu = 0,15$			$\nu = 0,35$			
	Lato O-A ($s=0$)		Lato O-B ($r=0$)	Lato O-A ($s=0$)		Lato O-B ($r=0$)	Lato O-A ($s=0$)		Lato O-B ($r=0$)	Lato O-A ($s=0$)		Lato O-B ($r=0$)	
	σ_y	τ_{yx}	σ_x	τ_{xy}	σ_y	τ_{xy}	σ_y	τ_{xy}	σ_x	τ_{xy}	σ_y	τ_{xy}	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	-0,157	-0,043	-0,146	-0,093	-0,224	-0,074	-0,106	-0,137	-0,083	-0,142	-0,070		
2	-0,260	-0,071	-0,207	-0,150	-0,344	-0,113	-0,183	-0,178	-0,139	-0,230	-0,103		
3	-0,338	-0,091	-0,239	-0,191	-0,425	-0,138	-0,245	-0,190	-0,174	-0,295	-0,126		
4	-0,402	-0,106	-0,255	-0,221	-0,486	-0,157	-0,293	-0,188	-0,201	-0,346	-0,145		
5	-0,457	-0,119	-0,260	-0,245	-0,537	-0,171	-0,341	-0,176	-0,223	-0,389	-0,163		
6	-0,505	-0,130	-0,257	-0,265	-0,581	-0,181	-0,382	-0,157	-0,242	-0,428	-0,178		
7	-0,549	-0,141	-0,245	-0,278	-0,620	-0,189	-0,420	-0,134	-0,256	-0,464	-0,191		
8	-0,590	-0,149	-0,226	-0,288	-0,657	-0,197	-0,458	-0,107	-0,267	-0,498	-0,201		
9	-0,628	-0,157	-0,200	-0,296	-0,691	-0,202	-0,490	-0,077	-0,274	-0,529	-0,210		
10	-0,662	-0,165	-0,167	-0,301	-0,723	-0,206	-0,526	-0,046	-0,279	-0,563	-0,217		
11	-0,693	-0,174	-0,129	-0,302	-0,754	-0,209	-0,558	-0,015	-0,279	-0,596	-0,222		
12	-0,720	-0,182	-0,086	-0,301	-0,782	-0,211	-0,590	+0,011	-0,275	-0,630	-0,224		
13	-0,741	-0,192	-0,041	-0,299	-0,808	-0,212	-0,622	+0,032	-0,266	-0,665	-0,222		
14	-0,755	-0,203	+0,004	-0,292	-0,829	-0,211	-0,651	+0,049	-0,253	-0,705	-0,217		
15	-0,760	-0,216	+0,046	-0,281	-0,847	-0,209	-0,680	+0,060	-0,231	-0,749	-0,206		
16	-0,749	-0,233	+0,079	-0,262	-0,859	-0,202	-0,705	+0,062	-0,202	-0,802	-0,186		
17	-0,746	-0,246	+0,094	-0,233	-0,868	-0,189	-0,727	+0,055	-0,165	-0,871	-0,159		
18	-0,729	-0,256	+0,064	-0,188	-0,879	-0,163	-0,736	+0,026	-0,115	-0,983	-0,121		
19	-0,699	-0,271	+0,041	-0,119	-0,899	-0,119	-0,730	+0,003	-0,054	-1,079	-0,063		
20	-0,682	-0,277	+0,016	-0,049	-0,920	-0,074	-0,722	-0,020	+0,007	-1,173	-0,005		
	$E_0 = -7,0 \%$		$E_v = -7,6 \%$		$E_0 = -8,2 \%$		$E_0 = -6,1 \%$		$E_v = -8,0 \%$		$E_0 = -7,4 \%$		$E_v = -6,4 \%$

TABELLA II - Seconda Ipotesi: Vincolo liscio sui due lati (*tensione a meno di γH*)

Punti	$\varphi = 20^\circ$				$\varphi = 40^\circ$			
	$\nu = 0,15$		$\nu = 0,35$		$\nu = 0,15$		$\nu = 0,35$	
	Lato O-A ($s = 0$)	Lato O-B ($r = 0$)	Lato O-A ($s = 0$)	Lato O-B ($r = 0$)	Lato O-A ($s = 0$)	Lato O-B ($r = 0$)	Lato O-A ($s = 0$)	Lato O-B ($r = 0$)
	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x
0	-0,947	-0,455	-0,954	-0,545	-0,897	-0,247	-0,915	-0,315
1	-0,947	-0,450	-0,954	-0,531	-0,898	-0,243	-0,915	-0,303
2	-0,948	-0,439	-0,955	-0,502	-0,899	-0,231	-0,915	-0,274
3	-0,950	-0,425	-0,955	-0,471	-0,901	-0,218	-0,916	-0,246
4	-0,952	-0,408	-0,956	-0,442	-0,903	-0,203	-0,916	-0,219
5	-0,956	-0,391	-0,958	-0,410	-0,905	-0,188	-0,917	-0,193
6	-0,960	-0,370	-0,960	-0,379	-0,909	-0,171	-0,918	-0,168
7	-0,965	-0,348	-0,962	-0,347	-0,913	-0,154	-0,919	-0,147
8	-0,970	-0,324	-0,965	-0,315	-0,917	-0,137	-0,920	-0,125
9	-0,976	-0,298	-0,968	-0,282	-0,922	-0,121	-0,921	-0,106
10	-0,983	-0,271	-0,971	-0,253	-0,927	-0,106	-0,923	-0,094
11	-0,990	-0,243	-0,975	-0,222	-0,933	-0,093	-0,925	-0,079
12	-1,000	-0,215	-0,979	-0,193	-0,940	-0,080	-0,927	-0,065
13	-1,004	-0,185	-0,983	-0,165	-0,947	-0,069	-0,930	-0,054
14	-1,010	-0,157	-0,987	-0,138	-0,955	-0,058	-0,934	-0,043
15	-1,016	-0,130	-0,991	-0,113	-0,963	-0,048	-0,938	-0,034
16	-1,020	-0,103	-0,995	-0,089	-0,972	-0,038	-0,943	-0,024
17	-1,022	-0,077	-0,998	-0,064	-0,980	-0,028	-0,950	-0,015
18	-1,019	-0,052	-1,001	-0,040	-0,988	-0,018	-0,957	-0,010
19	-1,008	-0,029	-0,999	-0,026	-0,994	-0,010	-0,975	-0,012
20	-0,997	-0,007	-0,997	-0,012	-0,999	-0,002	-0,993	-0,014
	$E_o = + 4,1\%$	$E_v = - 2,5\%$	$E_o = + 5,5\%$	$E_v = - 3,5\%$	$E_o = + 8,1\%$	$E_v = - 5,5\%$	$E_o = + 9,2\%$	$E_v = - 6,0\%$

Nella fig. 11 sono riportate le deformate della lastra, i diagrammi di sollecitazione lungo i bordi ed i rapporti τ/σ lungo OA.

Si osserva che al crescere del coefficiente di Poisson aumentano le tensioni normali nella parte inferiore della parete verticale e verso l'esterno della suola; in particolare; per $\varphi = 40^\circ$, si hanno in alcuni punti del lato OB pressioni alquanto maggiori di quelle ottenute con il procedimento usuale.

I valori assunti dai rapporti τ/σ confermano la validità dell'ipotesi fatta di spostamento nullo dei punti lungo il lato OA.

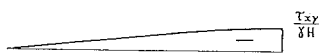
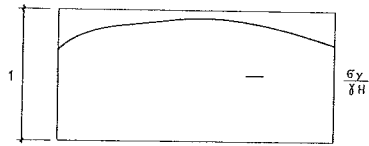
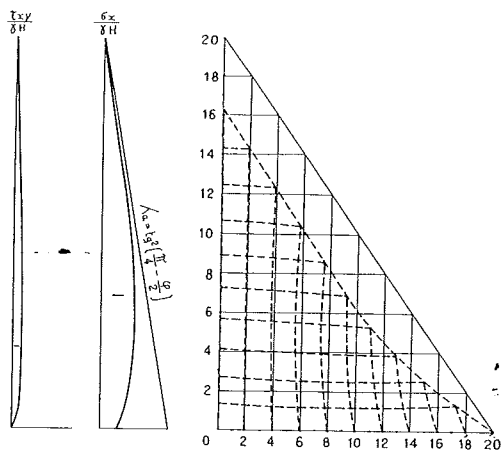
5. Conclusioni.

Si è detto in principio che lo scopo di questo studio era di controllare la validità del procedimento usuale di calcolo dei « muri a mensola »;

da tutto quanto esposto in precedenza si vede che non è possibile dare, allo stato attuale, una risposta completa ed esauriente al quesito postoci. Si è visto infatti che le distribuzioni degli sforzi lungo i bordi sono influenzate dai parametri φ e ν in modo più o meno rilevante a seconda dei valori numerici che essi assumono; per poter trarre delle conclusioni di carattere generale sulla dipendenza delle distribuzioni delle tensioni dai predetti parametri, è necessario risolvere altri casi numerici per valori intermedi di φ e ν .

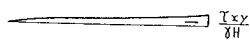
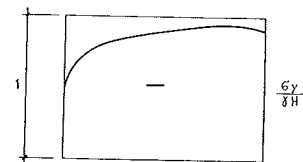
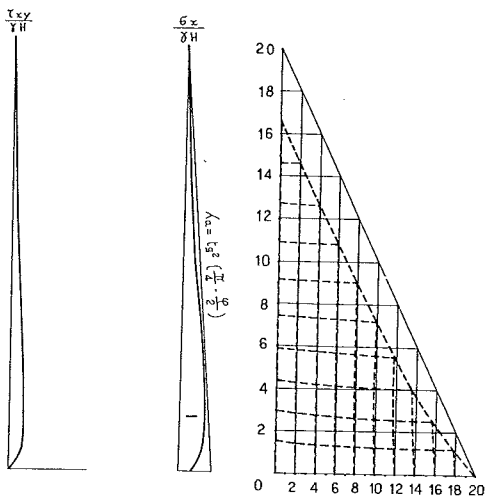
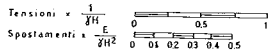
In ogni caso col presente studio, oltre ad avere impostato il problema da un punto di vista generale, si sono ottenuti risultati i quali consentono di affermare che:

a) È possibile trattare il problema col metodo delle differenze finite, nonostante le particolari ipotesi ed approssimazioni fatte per adattarlo al caso



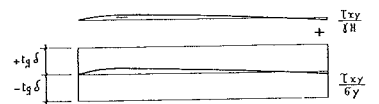
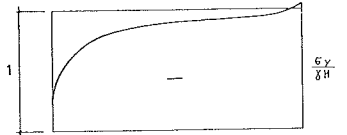
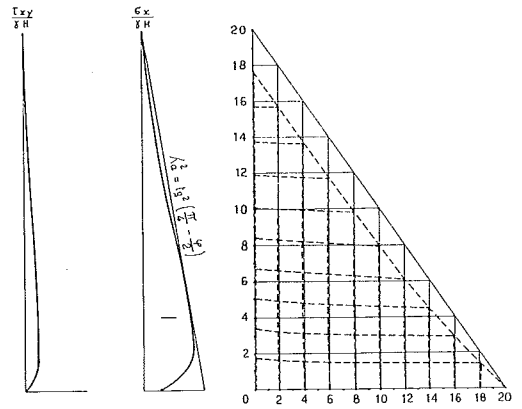
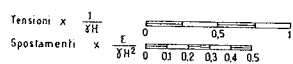
CONDIZIONI DI VINCOLO DEFINITIVA

$\varphi = 20^\circ \quad \delta = 15^\circ \quad \nu = 0,15$



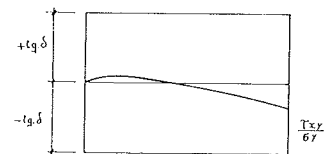
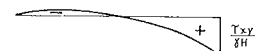
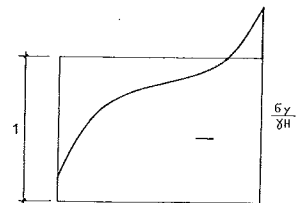
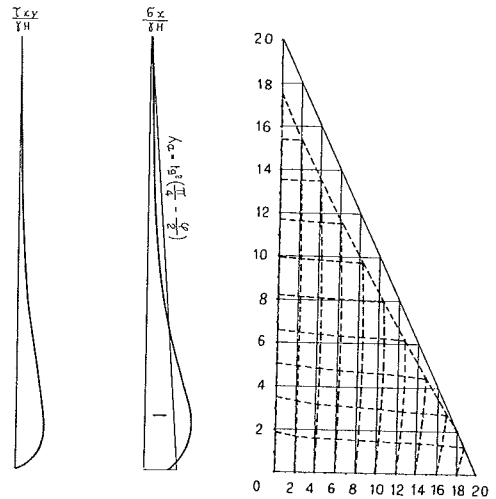
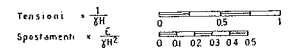
CONDIZIONE DI VINCOLO DEFINITIVA

$\varphi = 40^\circ \quad \delta = 30^\circ \quad \nu = 0,15$



CONDIZIONE DI VINCOLO DEFINITIVA

$\varphi = 20^\circ \quad \delta = 15^\circ \quad \nu = 0,35$



CONDIZIONE DI VINCOLO DEFINITIVA

$\varphi = 40^\circ \quad \delta = 30^\circ \quad \nu = 0,35$

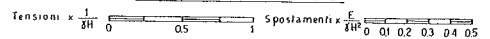


Fig. 11. - Diagrammi delle tensioni, degli spostamenti e dei rapporti τ/σ per la condizione di vincolo definitiva.

TABELLA III - Condizione di vincolo definitiva (tensioni a meno di γH)

Punti	$\varphi = 20^\circ; \delta = 15^\circ$						$\varphi = 40^\circ; \delta = 30^\circ$						
	$v = 0,15$			$v = 0,35$			$v = 0,15$			$v = 0,35$			
	Lato O-A ($s=0$)		Lato O-B ($r=0$)	Lato O-A ($s=0$)		Lato O-B ($r=0$)	Lato O-A ($s=0$)		Lato O-B ($r=0$)	Lato O-A ($s=0$)		Lato O-B ($r=0$)	
	σ_y	τ_{yx}	σ_x	τ_{xy}	σ_x	τ_{yx}	σ_y	τ_{xy}	σ_x	τ_{yx}	σ_y	τ_{xy}	
0	-0,691	0,000	-0,122	-0,000	-0,145	0,000	-0,503	0,000	-0,085	-0,162	0,000	-0,172	0,000
1	-0,775	-0,018	-0,183	-0,049	-0,356	-0,095	-0,669	-0,093	-0,162	-0,304	-0,022	-0,273	-0,158
2	-0,818	-0,030	-0,212	-0,056	-0,417	-0,112	-0,732	-0,098	-0,171	-0,470	-0,029	-0,325	-0,186
3	-0,845	-0,040	-0,226	-0,060	-0,413	-0,111	-0,773	-0,097	-0,168	-0,571	-0,031	-0,302	-0,175
4	-0,864	-0,049	-0,237	-0,063	-0,395	-0,106	-0,803	-0,093	-0,160	-0,684	-0,029	-0,282	-0,152
5	-0,879	-0,057	-0,244	-0,065	-0,373	-0,100	-0,825	-0,087	-0,150	-0,680	-0,024	-0,224	-0,128
6	-0,891	-0,065	-0,246	-0,066	-0,347	-0,093	-0,843	-0,079	-0,137	-0,715	-0,018	-0,184	-0,106
7	-0,901	-0,073	-0,244	-0,065	-0,316	-0,085	-0,858	-0,071	-0,123	-0,742	-0,011	-0,146	-0,086
8	-0,909	-0,082	-0,237	-0,063	-0,288	-0,077	-0,871	-0,063	-0,108	-0,765	-0,002	-0,115	-0,067
9	-0,915	-0,090	-0,226	-0,060	-0,256	-0,069	-0,883	-0,054	-0,093	-0,785	+0,007	-0,090	-0,053
10	-0,919	-0,099	-0,211	-0,056	-0,221	-0,060	-0,894	-0,046	-0,079	-0,804	+0,016	-0,070	-0,042
11	-0,921	-0,108	-0,193	-0,051	-0,193	-0,052	-0,904	-0,039	-0,067	-0,822	+0,023	-0,057	-0,034
12	-0,920	-0,119	-0,171	-0,045	-0,162	-0,043	-0,913	-0,033	-0,056	-0,841	+0,040	-0,046	-0,027
13	-0,914	-0,131	-0,148	-0,039	-0,133	-0,036	-0,921	-0,028	-0,048	-0,863	+0,053	-0,040	-0,023
14	-0,904	-0,145	-0,123	-0,032	-0,108	-0,029	-0,927	-0,024	-0,041	-0,888	+0,072	-0,036	-0,021
15	-0,886	-0,152	-0,099	-0,025	-0,086	-0,023	-0,932	-0,020	-0,034	-0,919	+0,091	-0,031	-0,018
16	-0,862	-0,163	-0,078	-0,019	-0,067	-0,018	-0,935	-0,016	-0,023	-0,959	+0,114	-0,025	-0,015
17	-0,840	-0,168	-0,058	-0,013	-0,051	-0,014	-0,934	-0,013	-0,022	-1,018	+0,144	-0,019	-0,011
18	-0,784	-0,171	-0,039	-0,009	-0,034	-0,009	-0,923	-0,009	-0,015	-1,117	+0,184	-0,013	-0,007
19	-0,753	-0,172	-0,024	-0,006	-0,025	-0,007	-0,908	-0,006	-0,010	-1,230	+0,220	-0,012	-0,006
20	-0,722	-0,173	-0,009	-0,003	-0,016	-0,005	-0,888	-0,003	-0,005	-1,343	+0,255	-0,011	-0,005
	$E_0 = -4,8\%$	$E_0 = -5,2\%$	$E_0 = -4,3\%$	$E_0 = -5,9\%$	$E_0 = -5,2\%$	$E_0 = -2,3\%$	$E_0 = -4,0\%$	$E_0 = -5,6\%$	$E_0 = -5,8\%$				

specifico; dalle tabelle riportate si rileva infatti che gli scarti percentuali ottenuti negli squilibri alla traslazione sono contenuti sempre entro limiti decisamente accettabili.

b) È possibile (e ci sembra questo il risultato più significativo) definire una condizione di vincolo che interpreta con un notevole grado di approssimazione il reale andamento del fenomeno fisico (ovvero l'effettivo comportamento della struttura).

Si è ritenuto comunque opportuno proseguire lo studio per cui è in preparazione una seconda nota nella quale ci si propone:

1) di calcolare le tensioni lungo i bordi per diversi valori dei parametri φ e ν anche nel caso di superficie del terreno inclinata ($i \neq 0$);

2) di determinare, nell'intento di fornire eventualmente dei risultati utili alla pratica di calcolo, i momenti flettenti alla base della parete verticale, dovuti al diagramma di tensioni triangolare ed al diagramma di tensioni ottenute col metodo proposto (7).

(7) I momenti nella suola interrata, come è noto sono di entità molto minore e non hanno un particolare interesse pratico dal punto di vista economico.

SUMMARY

Pressure distribution on the back of a cantilever retaining wall.

This paper deals with pressure distribution on the back of a cantilever retaining wall, both on vertical stem and footing, beginning from a Rankine distribution of pressure along the outer plane of rupture, taking into account the deformation of the soil between the rupture plane and the wall, together with the friction between wall and soil.

For the proposed solution of the problem four assumptions are made:

- 1) The wall is able to move or rotate in order to generate a Rankine state in the soil;
- 2) The soil prism OAB (fig. 1) is an isotropic, homogeneous linearly elastic body;
- 3) Elastic deformations of the wall are so negligible compared to those (elastic) of the soil, that the borders OA and OB may be considered rigid bodies compared to the soil;

BIBLIOGRAFIA

- ADRIANI L., MACERI F. (1964) - *In tema di lastre piane*. Stab. Tipog. Genovese, Napoli.
- BELLUZZI O. (1961) - *Scienza delle Costruzioni*, Vol. 3. Zanichelli, Bologna.
- FRANCIOSI V. (1965) - *Scienza delle Costruzioni*, Vol. 1. Li- guori, Napoli.
- HUNTINGTON W. C. (1957) - *Earth pressures and retaining walls*. Wiley & Sons, New York.
- KORN G., KORN T. (1961) - *Mathematical Handbook for Scientist and Engineers*. Mc Graw-Hill, New York.
- KRYNINE D. P. (1947) - *Soil Mechanics*. Mc Graw-Hill, New York.
- NIELSON F. D. (1967) - *Modulus of soil reaction as determined from triaxial shear test*. H. R. B. Record, 185, Washington.
- SOUTHWELL R. V. (1940) - *Relaxation methods in engineering science*. University Press, Oxford.
- SOUTHWELL R. V. (1946) - *Relaxation methods in theoretical physics*. University Press, Oxford.
- TERZAGHI K. (1943) - *Theoretical Soil Mechanics*. Wiley & Sons, New York.
- TIMOSHENKO S., GOODIER J. N. (1951) - *Theory of elasticity*. Mc Graw-Hill, New York.
- TSCHEBOTARIOFF G. P. (1951) - *Soil Mechanics, Foundations and Earth Structures*. Mc. Graw-Hill, New York.

4) The relationship $\frac{OA}{OB} = \text{tg } \alpha$ (fig. 1) is always valid.

Because of the assumptions made the distribution of the pressures is coincident with the reactions of the « bonds » OA and OB on the triangular plate OAB, loaded along AB.

The triangular plate, in elastic state, has been investigated by the finite differences method using an electronic computer.

Along the planes OA and OB the ends have been supposed either fixed or free; numerical results, for same values of φ (angle of friction of soil) and ν (POISSON ratio) are given in tables I e II and as diagrams in figs. 3 ÷ 6 and 7 ÷ 10.

According to the results we conclude that the best boundary conditions are obtained with a fixed end along OA and the friction earth-wall fully mobilized along OB (i. e. $\tau = \sigma \text{tg } \delta$). The study of the plate in this hypothesis (with the same values of the parameters φ and ν) gave the results written in table III and as diagrams in figs. 11 ÷ 14. It is to remark the substantial influence of the Poisson ratio.