

La distribuzione dei carichi fra gli elementi di una palificata *

C. CECCOLI **

SOMMARIO: Viene studiata la ripartizione dei carichi fra gli elementi di una palificata nell'ipotesi che questi subiscano uguale spostamento. Schematizzato il terreno come semispazio elastico, omogeneo ed isotropo, si esamina il comportamento delle palificate nelle due situazioni limiti di funzionamento di pali il cui carico viene trasmesso al terreno solo alla base od uniformemente distribuito lungo la superficie del palo stesso e trasmesso al terreno per aderenza.

Sviluppati alcuni casi numerici per diverse sequenze tipiche di pali, viene posta in evidenza la profonda diversità di comportamento, con le ipotesi fatte, delle palificate a seconda che sia prevalente la portanza per attrito o quella per appoggio alla base.

A conclusione della trattazione con le suddette ipotesi, viene esposto un procedimento iterativo per il calcolo approssimato delle distribuzioni dei carichi, che, in alcuni casi, permette di ottenere rapidamente risultati ottimamente approssimati, rispetto ai valori forniti dal calcolo completo.

Gli esempi numerici mostrano che è generalmente elevato il divario fra i valori dei carichi sui pali interni ed esterni (sopra tutto nel caso in cui sia prevalente il contributo dell'aderenza), e risultano quindi spesso scarsamente attendibili i risultati ottenuti supponendo il terreno perfettamente elastico; di conseguenza si è anche ritenuto opportuno perfezionare il precedente calcolo considerando, seppure con particolari ipotesi approssimative, la possibilità del superamento del carico limite convenzionale elastico del terreno situato nell'intorno dei pali più sollecitati.

1. Premessa.

1.1. La teoria dell'elasticità dei corpi tridimensionali è stata ripetutamente applicata a varie questioni di meccanica del terreno e al calcolo delle fondazioni; in particolare si è dimostrata come uno dei più penetranti mezzi di indagine dei problemi per la cui risoluzione non sono sufficienti solo considerazioni di equilibrio, come di fatto presuppone la teoria classica sulla stabilità delle terre, ma anche condizioni di congruenza.

È naturale quindi che, anche per tale via, sia stato affrontato lo studio, di evidente importanza pratica, delle fondazioni su pali ed approfonditi e numerosi sono i riferimenti nella letteratura tecnica. L'attenzione dei ricercatori si è però per lo più rivolta alle questioni che si riferiscono al calcolo dei pali isolati, potendo in questi casi spesso saggiare con l'esperienza le conclusioni teoriche, mentre più incerti sono i riferimenti ai gruppi di pali di fondazione ⁽¹⁾.

Di questo argomento, un aspetto assai interessante e strettamente legato al progetto delle palifi-

cate è la conoscenza della distribuzione sui pali dei pesi della struttura in elevazione. Per porci in un caso limite, ma che assai frequentemente può realizzarsi nella pratica, pensiamo infinitamente rigida la parte in elevazione. Accade allora che, per carichi sulle fondazioni equilibrati, tutti i pali subiscono gli stessi spostamenti e, naturalmente, saranno quelli di perimetro maggiormente caricati rispetto a quelli interni, il cui spostamento complessivo più risente dell'influenza dei pali circostanti.

Scopo della presente nota è quello di determinare, nella situazione cui si è fatto riferimento, la distribuzione dei carichi e fornire, per quanto possibile, dati di orientamento per la pratica. Lo studio verrà svolto schematizzando il terreno come un semispazio elastico, isotropo ed omogeneo; si terrà poi anche conto, in modo approssimativo, della circostanza che, per i pali più sollecitati posti lungo il perimetro di una palificata, non possa essere superato il loro carico limite convenzionale. Può a questo proposito essere opportuno sottolineare il fatto che nella realtà, sempre molto più complessa e varia di qualsiasi schematizzazione teorica e in particolare di quella formulata, spesso si è ben lontani dal trovare verificate le ipotesi dianzi accennate; per cui i risultati che seguiranno saranno soltanto da intendere come contributi alla conoscenza, sopra tutto qualitativa, di casi limiti di confronto. Sono inoltre già in corso ricerche sperimentali, finanziate dal C.N.R. all'Istituto di *Tecnica delle Costruzioni* dell'Università di Bologna, su due costruzioni fondate su estese palificate allo scopo di determinare nella realtà l'effettiva distribuzione dei carichi e poter istituire utili confronti con il calcolo. Dei risultati

* Lavoro svolto nell'ambito di un programma di ricerche finanziato dal C.N.R.

** Dott. ing. Claudio CECCOLI, assistente ordinario presso la Cattedra di *Tecnica delle Costruzioni* della Facoltà di Ingegneria di Bologna.

⁽¹⁾ Numerose sono le ricerche sperimentali su modelli di gruppi di pali che trattano anche di questo specifico argomento. Si vedano ad esempio SOWERS et al. [1961] e WHITAKER [1957]. A questo proposito ci sembra significativo sottolineare il fatto che le conclusioni tratte da tali esperienze siano, per certi aspetti, in buon accordo con quelle della presente nota.

di tali esperienze, necessariamente a lunga scadenza, e di altre strettamente connesse con le precedenti verrà data, appena possibile, notizia.

1.2. Il procedimento di calcolo, considerando il terreno perfettamente elastico, trae le premesse dalla nota risoluzione del semispazio elastico caricato, alla profondità h dalla superficie, con una forza concentrata ad essa ortogonale [MINDLIN, 1936] ⁽²⁾. Schematizzato quindi il palo come un solido cilindrico indeformabile è possibile, pensando noto il carico che la punta del palo trasmette, alla profondità h , al terreno, conoscere, per tale azione, qualunque effetto, movimento o tensione, in qualsiasi punto del semispazio; lo stesso può dirsi per carichi distribuiti, con noto andamento, lungo il palo ed in questo caso costituenti le forze di aderenza che si manifestano fra palo e terreno, avendo l'avvertenza di operare le necessarie integrazioni ⁽³⁾.

Per chiarezza verranno esaminate due situazioni e precisamente la prima di pali resistenti solo per punta, la seconda per uno stato limite dipendente dall'attrito. I risultati in seguito riportati, ottenuti appunto considerando queste due situazioni, si riferiscono a numerosi casi ricorrenti nella pratica.

Aggirata quindi con tali ipotesi di carattere limite, la grave difficoltà di determinare, per ogni palo, come si ripartisca il suo carico fra azioni di punta e di superficie, il procedimento di calcolo è ricondotto alla risoluzione di sistemi di equazioni, ciascuna delle quali esprime l'uguaglianza dello spostamento di un palo al valore comune conseguente al carico complessivo. S'intende poi che, quando non esistono particolari simmetrie, il numero delle incognite può risultare assai elevato e laboriosa la scrittura dei coefficienti del sistema; perciò, nel paragrafo 6, verrà brevemente tratteggiato un metodo approssimato di calcolo che permette di evitare, in alcuni casi, la risoluzione di sistemi. Esso consiste essenzialmente in un procedimento per iterazioni

ma, come verrà illustrato, già alle iniziali (e spesso alla prima quando la portanza dei pali è data prevalentemente dalla base), è possibile ottenere soluzioni di solito sufficientemente approssimate per le esigenze tecniche. Scopo della presente nota è però, più che di soffermarsi su un procedimento generale, di indicare per alcuni sistemi tipici di sequenze di pali come si ripartiscono i pesi e di fornire qualche dato orientativo per la pratica.

2.1. Per un carico concentrato P verticale, posto alla profondità c , in un semispazio elastico omogeneo ed isotropo, MINDLIN ha dato le espressioni dei movimenti u , v e w , diretti rispettivamente secondo gli assi x , y , z e delle tensioni in qualsiasi punto (fig. 1).

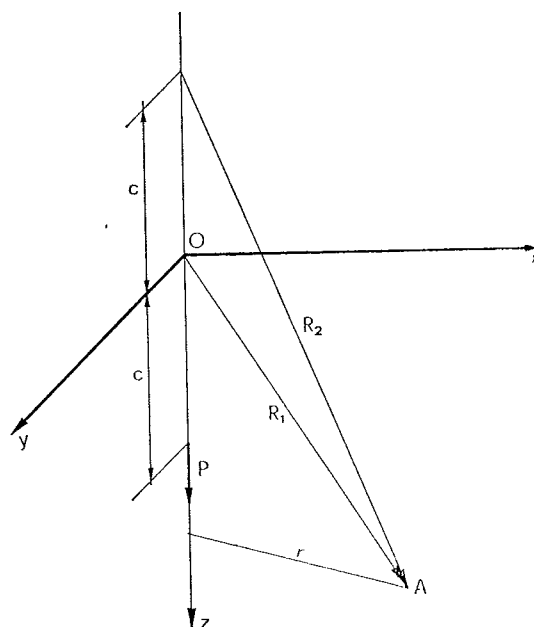


Fig. 1.

Risulta in particolare che lo spostamento w in un punto di coordinate x , y , z vale:

$$w = \frac{P}{16 \pi G (1 - \mu)} \left[\frac{3 - 4 \mu}{R_1} + \frac{8 (1 - \mu)^2 - (3 - 4 \mu)}{R_2} + \frac{(z - c)^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4 \mu) (z + c)^2 - 2 cz}{R_2^3} + \frac{6 cz (z + c)^2}{R_2^5} \right] \quad (1)$$

⁽²⁾ La risoluzione della lastra semi illimitata con una forza applicata all'interno (sistema piano di tensioni) fu ottenuta da MELAN [1932].

⁽³⁾ Le azioni tangenziali possono essere determinate ipotizzando (sembrerebbe con limitata rispondenza alla realtà) che non si manifestino spostamenti relativi fra la superficie del palo ed il velo di terreno con essa a contatto e trattando il problema nell'ambito della teoria dell'elasticità; si veda per esempio SALAS e BELZUNCE [1965].

dove, al solito, μ è il coefficiente di Poisson; $G = E/2 (1 + \mu)$; R_1 ed R_2 valgono:

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z - c)^2}, \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (z + c)^2}.$$

2.2. Ciò premesso, consideriamo un palo di altezza h , con sezione di raggio R , infisso nel suolo di caratteristiche elastiche note E e μ e, come accennato nel paragrafo precedente, pensiamo dapprima nullo il carico trasmesso per aderenza al terreno.

In tale situazione lo spostamento alla distanza r

dalla forza applicata ed alla profondità $z = c = h$ si ottiene direttamente dalla (1) ponendo in essa $R_1 = r$ ed $R_2 = \sqrt{r^2 + 4h^2}$; indicando poi con ρ il rapporto r/h e raccogliendo il fattore $(3 - 4\mu)$ risulta in particolare:

$$w = \frac{P(3 - 4\mu)}{16\pi G(1 - \mu)h} \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{8(1 - \mu)^2}{3 - 4\mu} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{4 + \rho^2}} + \frac{4}{\sqrt{4 + \rho^2}} + \frac{2}{3 - 4\mu} \frac{1}{\sqrt{4 + \rho^2}^3} + \frac{4}{3 - 4\mu} \frac{1}{\sqrt{4 + \rho^2}^5} \right\} \quad (2)$$

Nella figura 2 è riportata in diagramma la funzione entro parentesi graffa calcolata per $\mu = 0,35$; a meno quindi del fattore fuori della parentesi

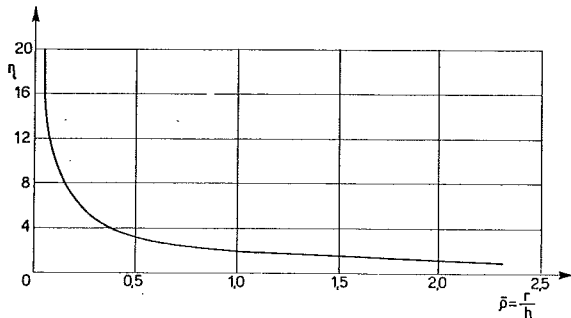


Fig. 2.

graffa, essa rappresenta la linea di influenza degli spostamenti alla profondità h dovuti ad un carico concentrato alla medesima profondità; come si può facilmente rilevare ciascun addendo varia poco al variare di μ (4) e di conseguenza la (2) permette di ottenere, pur avendo calcolato i termini entro la parentesi graffa, con $\mu = 0,35$, in modo sufficientemente approssimato il valore degli spostamenti per qualsiasi valore di μ .

La funzione entro parentesi graffa presente una singolarità per $\rho = 0$; essa infatti dà spostamenti infiniti proprio in corrispondenza del punto di applicazione della forza stessa. Per rimuovere tale singolarità matematica, comune del resto a tutti i problemi di elasticità tridimensionale quando si abbiano forze concentrate, pensiamo il carico P uniformemente distribuito su di un'area circolare di raggio R ; lo spostamento in corrispondenza del centro vale allora, per risultati già noti, posto $\alpha = h/R$ (5):

$$w = \frac{P}{8G(1 - \mu)h} \cdot \left[3 - 4\mu + \alpha \left(1 - \frac{2\alpha}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}} \right) \cdot \left(\frac{10 - 24\mu + 16\mu^2}{2\alpha} \cdot \sqrt{1 + 4\alpha^2} + 6 - 8\mu + \frac{2\alpha}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}} + \frac{4\alpha^2}{1 + 4\alpha^2} \right) \right] \quad (3)$$

(4) Nella (2) i termini che numericamente hanno molta influenza sono i primi tre. I coefficienti che li moltiplicano o non dipendono da μ o, se dipendono, variano molto poco

La (3) permette di calcolare gli spostamenti in corrispondenza dei carichi applicati mentre la (2) a distanza r dal carico, e tali valori sono ottimamente approssimati, pur considerando il carico concentrato anziché ripartito, se la distanza r confrontata con R è sufficientemente grande (in pratica quando $r/R > 2$).

2.3. Pensiamo ora ad un carico distribuito uniformemente lungo l'asse del palo e di intensità q . Per avere lo spostamento verticale di un punto A alla

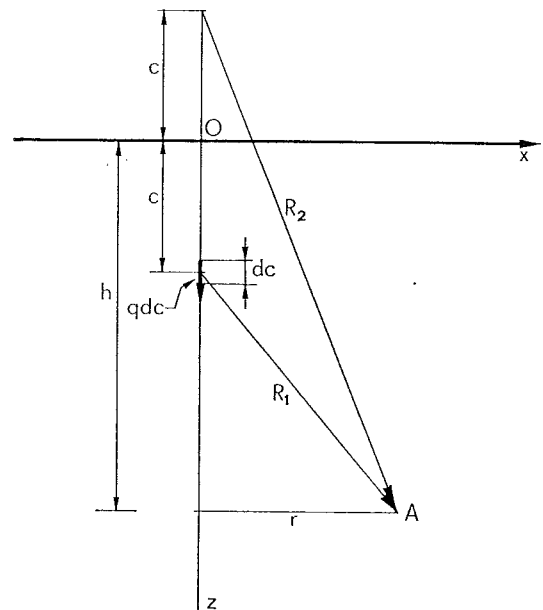


Fig. 3.

profondità h e distante r dall'asse z (fig. 3) è necessario integrare l'espressione (1) rispetto a c , fra i limiti 0 ed h , considerando le forze $dP = qdc$ distribuite lungo l'asse del palo stesso.

al variare di questo.

(5) Si veda, per esempio, il noto trattato di CAQUOT e KERISEL [1966].

Svolte le laboriose integrazioni ed al solito posto $\rho = r/h$ risulta:

$$w = \frac{P(3-4\mu)}{16\pi G(1-\mu)h} \cdot \left\{ \arg \sinh \frac{1}{\rho} \cdot \left[1 - \frac{8(1-\mu)^2+1}{3-4\mu} \right] + \arg \sinh \frac{2}{\rho} \cdot \frac{8(1-\mu)^2}{3-4\mu} + \right. \\ \left. - \frac{8(1-\mu)}{3-4\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2+4}} + \frac{4(1-\mu)}{3-4\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}} - \frac{1}{3-4\mu} \cdot \frac{1}{\rho^2 \sqrt{\rho^2+4}} + \frac{16}{3-4\mu} \cdot \frac{1}{\rho^2 \sqrt{\rho^2+4}^3} \right\} \quad (4)$$

Anche in questo caso gli spostamenti divergono quando $\rho = r/h = 0$. Per rimuovere tale singolarità si può considerare il carico, anzichè concentrato lungo l'asse del palo, distribuito uniformemente su tutta la superficie del palo stesso; ipotesi questa giudicata da alcuni Autori più attendibile di quella lineare di VIERENDEEL-DÖRR per pali lunghi e soggetti, in terreno privo di strati rigidi, a spostamenti sensibili⁽⁶⁾. Detta τ la tensione tangenziale e considerata alla profondità c la forza infinitesima (fig. 4)

$$dP = 2\pi R \cdot dc$$

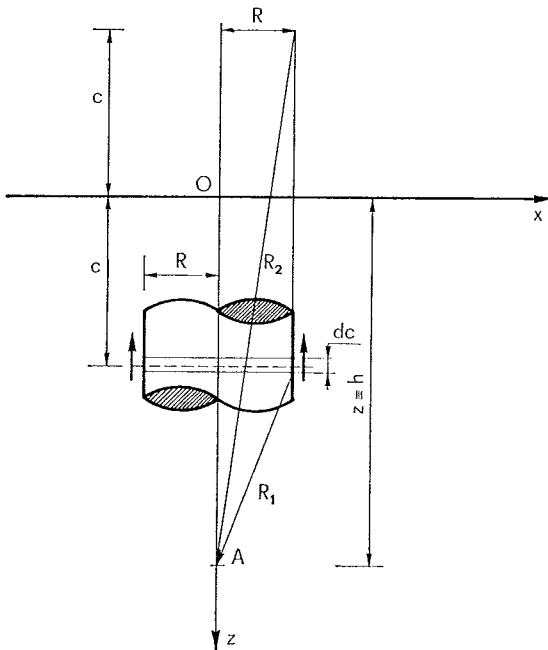


Fig. 4.

per avere lo spostamento del centro del palo alla profondità h occorre integrare rispetto a c la (1) fra i limiti 0 ed h ponendo in essa $r = R$ e quindi $R_1 = \sqrt{R^2 + (h-c)^2}$ ed $R_2 = \sqrt{R^2 + (h+c)^2}$; svolte le integrazioni e posto $\alpha = h/R$ risulta⁽⁷⁾:

$$w = \frac{P(3-4\mu)}{16\pi G(1-\mu)h} \cdot \left\{ \arg \sinh \frac{1}{\rho} \left[1 - \frac{8(1-\mu)^2+1}{3-4\mu} \right] + \arg \sinh \frac{2}{\rho} \cdot \frac{8(1-\mu)^2}{3-4\mu} - \frac{8(1-\mu)}{3-4\mu} \cdot \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{\rho^2+4}} + \frac{4(1-\mu)}{3-4\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}} - \frac{1}{3-4\mu} \cdot \frac{1}{\rho^2 \sqrt{\rho^2+4}} + \frac{16}{3-4\mu} \cdot \frac{1}{\rho^2 \sqrt{\rho^2+4}^3} \right\} \quad (5)$$

⁽⁶⁾ Considerando uniforme la distribuzione delle tensioni tangenziali non è, in generale rispettata la congruenza fra palo e terreno; in altri termini fra la superficie del palo e quella del terreno possono avvenire scorrimenti.

⁽⁷⁾ Si veda anche in proposito GEDDES [1966].

Nella figura 5 è riportata in diagramma la funzione entro parentesi graffa calcolata al solito per $\mu = 0,35$

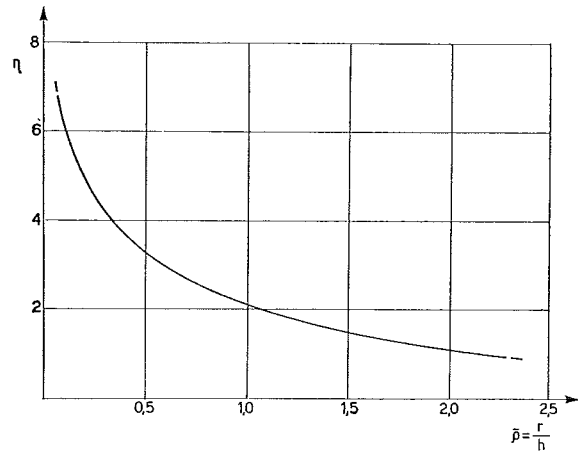


Fig. 5.

3. Le premesse svolte nel paragrafo precedente permettono di arrivare speditamente alla conclusione. Si consideri infatti una distribuzione generica di pali come in figura 6 e siano d_x e d_y le distanze, misurate rispettivamente secondo le direzioni x ed y di due pali i e j . Risulta allora che lo spostamento del palo i è somma dello spostamento che il palo ha per effetto del carico X_i ed esso applicato e del contributo allo spostamento dei carichi X_j applicati agli altri pali j . Se si indica con η_{ii} lo spostamento in i per un carico applicato in i e con η_{ij} lo spostamento in i per un carico applicato in j , ed inoltre con η lo spostamento impresso, uguale, come si è detto per tutti i pali, deve risultare:

$$X_i \eta_{ii} + \sum_j X_j \eta_{ij} = \eta \quad (6)$$

con j che varia da 1 ad n escluso i , ed essendo n il numero complessivo dei pali. Di equazioni del tipo (6) se ne possono scrivere tante quanti sono i pali, per cui si giunge ad un sistema di equazioni

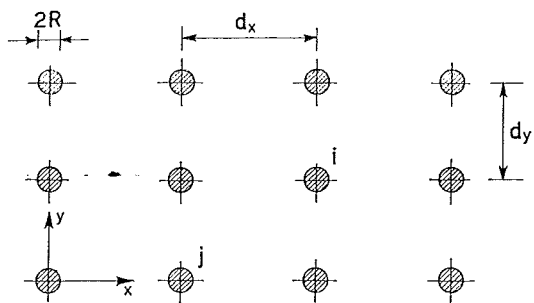


Fig. 6.

nelle incognite X_i che determina le incognite stesse. I coefficienti η_{ii} ed η_{ij} si possono calcolare direttamente dalla (2) e (3) rispettivamente, se si considera solo il carico applicato alla base o dalle (4) e (5) se si considera solo il carico distribuito lungo il palo; la determinazione dei coefficienti η_{ij} è poi immediata avendo a disposizione, nei due casi esaminati, le linee di influenza. S'intende che tale modo di procedere è del tutto generale e quindi può essere applicato per qualsiasi distribuzione di pali ed anche quando i pali hanno diametro differente ma la stessa lunghezza: in quest'ultimo caso, nella scrittura dei coefficienti del sistema, cambiano solo i coefficienti η_{ii} che direttamente dipendono dal rapporto $\alpha = h/R$.

4. I rapporti dei carichi sui pali esterni ed interni, per alcuni significativi tipi di palificate.

4.1. In funzione dei parametri caratteristici di un gruppo di pali, e precisamente del rapporto ρ fra la distanza dei pali ed il raggio della loro sezione e del rapporto α fra la lunghezza del palo ed il raggio, viene esaminato il comportamento di alcuni gruppi di pali che frequentemente possono incontrarsi nella pratica, nell'ipotesi che i pali abbiano tutti la stessa lunghezza e lo stesso diametro.

Si considerino dapprima i gruppi da 2, 3 e 4 pali; evidentemente se la risultante del carico verticale complessivo ad essi applicato passa per il baricentro delle aree delle sezioni dei pali, questi sono ugualmente caricati. Lo spostamento del palo appartenente al gruppo è maggiore dello spostamento che avrebbe se, pensato isolato, fosse ugualmente caricato. Sostanzialmente diverso risulta però il comportamento se il carico è applicato alla base o se al contrario è distribuito lungo l'asse.

Siano dati, ad esempio, 2 pali per i quali sia $\rho = d/R = 6$ ed $\alpha = h/R = 80$. Lo spostamento del palo isolato per un carico unitario applicato, se il carico stesso è interamente trasmesso alla base, si

deduce dalla (3) e vale, a calcoli fatti ($\mu = 0,35$):

$$w = 2,042 \cdot \frac{P (3 - 4\mu)}{16 \pi G (1 - \mu) h},$$

mentre, se pensato appartenente al gruppo risulta:

$$w = 2,211 \frac{P (3 - 4\mu)}{16 \pi G (1 - \mu) h},$$

cioè circa 1,1 volte maggiore di quello del palo isolato.

Lo stesso palo, con un carico unitario uniformemente distribuito lungo il suo asse, subisce uno spostamento che, se è isolato, vale:

$$w = 0,1212 \frac{P (3 - 4\mu)}{16 \pi G (1 - \mu) h},$$

mentre se appartiene al gruppo:

$$w = 0,2140 \frac{P (3 - 4\mu)}{16 \pi G (1 - \mu) h},$$

ed è 1,75 volte maggiore del precedente.

A parità di carico, nell'ambito della schematizzazione teorica formulata, un palo che si appoggia solo alla base ha spostamenti molto più grandi di un palo che porta i carichi solo per attrito, ma meno fa risentire la propria influenza sui pali circostanti. Dunque, nell'ambito delle schematizzazioni fatte, la portanza dei pali avviene principalmente per attrito.

Nella tabella sono riportati, per $\rho = 6$ e 10 (ciò che corrisponde a pensare i pali distanziati di 3 o

TABELLA I - Valori del rapporto fra spostamento del palo isolato e del palo appartenente al gruppo.

Carichi applicati alla base							
		n=2		n=3		n=4	
a	ρ	6	10	6	10	6	10
		80	0,908	0,940	0,841	0,895	0,797
100		0,910	0,941	0,846	0,896	0,802	0,865
120		0,915	0,942	0,848	0,898	0,805	0,866

Carichi uniformemente distribuiti lungo l'asse							
		n=2		n=3		n=4	
a	ρ	6	10	6	10	6	10
		80	0,566	0,615	0,395	0,450	0,193
100		0,600	0,609	0,424	0,455	0,352	0,380
120		0,615	0,610	0,408	0,440	0,338	0,365

5 diametri rispettivamente), e per $\alpha = 80, 100$ e 120 , i valori dei rapporti fra lo spostamento del palo isolato rispetto a quello del palo appartenente al gruppo, per gruppi di 2, 3, 4 pali. Dai risultati emerge un fatto abbastanza interessante e cioè che per pali che trasmettono al terreno il carico solo alla base, l'influenza mutua dipende, anche se in misura molto modesta, dal loro distanziamento, mentre se il carico è distribuito lungo il palo, per i correnti distanziamenti, il rapporto degli spostamenti resta praticamente costante; ossia, come sembra logico, lo smorzamento degli spostamenti dovuti (ad una certa profondità h) ad un carico P è mag-

giore se P è concentrato alla quota h anzi che ripartito lungo una linea verticale. In entrambi i casi poi, fissato il numero dei pali ed il valore di ρ , non ha praticamente influenza il valore di α ; e con ciò si confermerebbe l'orientamento pratico usuale di fissare il distanziamento dei pali indipendentemente dalla loro lunghezza.

4.2. I risultati precedenti possono rendere più chiare le considerazioni che seguono.

Sia data una schiera di pali sufficientemente estesa: in tale situazione i pali centrali poco risentono dell'influenza dei pali di bordo e massima risulta

Schiera di 19 pali; $g = \frac{d}{R} = 6$; $\alpha = \frac{h}{R}$; $\mu = 0,35$
 carichi applicati alla base

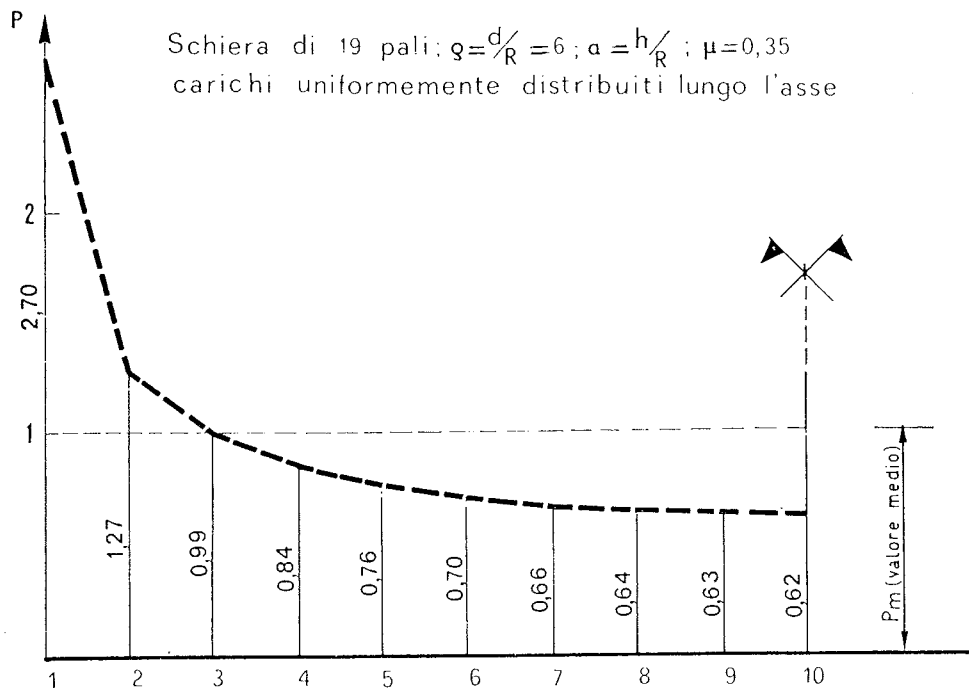
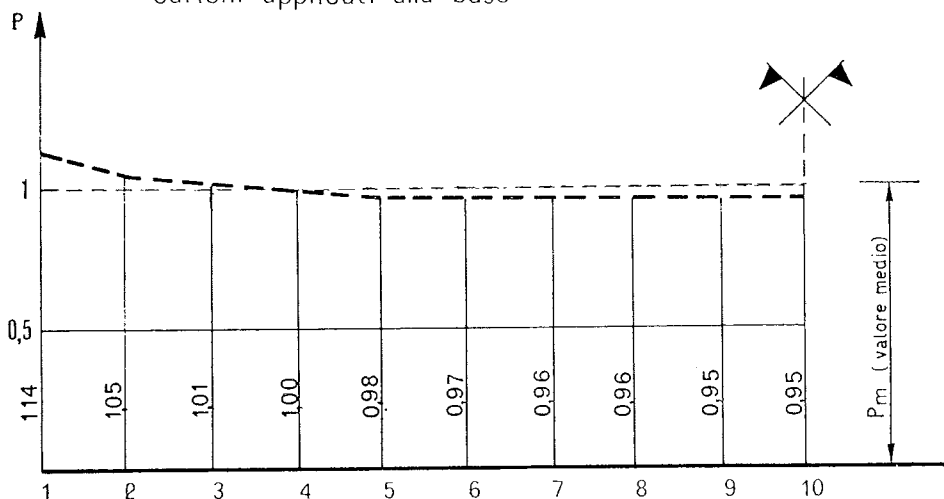


Fig. 7. - Diagrammi delle distribuzioni dei carichi.

allora la differenza fra il carico applicato al primo palo e quello applicato al palo centrale. Nella figura 7 sono riportati in diagramma, per una schiera di 19 pali avente come caratteristiche $\rho = 6$ ed $\alpha = 100$, per le due diverse situazioni di carico, i valori degli scostamenti dei carichi dal carico medio; risulta ad esempio che nella prima situazione il palo di bordo ha un carico 1,15 volte maggiore del valore medio, mentre nella seconda la differenza è molto più sensibile poiché risulta 2,7 volte maggiore.

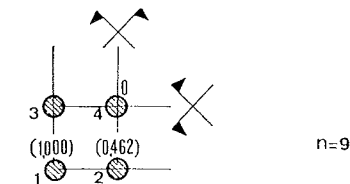
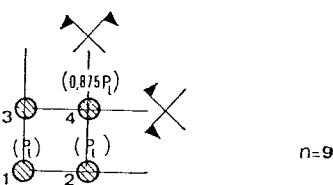
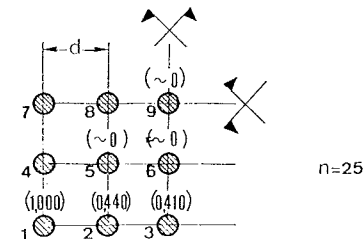
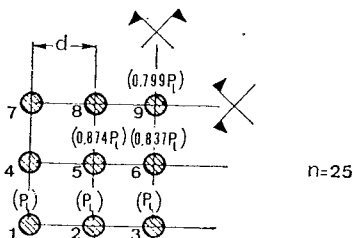
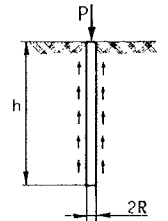
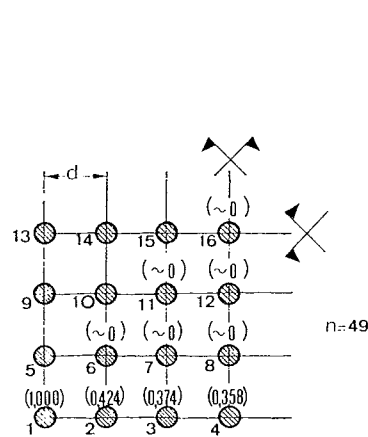
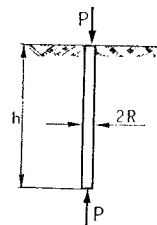
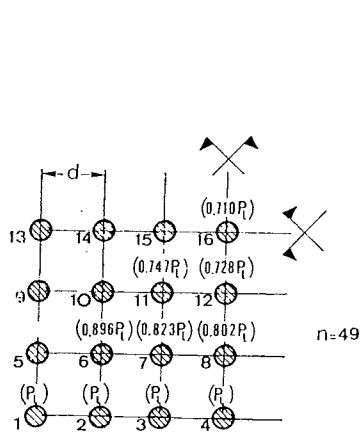


Fig. 8. - Carico trasmesso solo dalla base; $\rho = \frac{d}{h} = 6$,
 $\alpha = \frac{h}{R} = 100$, $\mu = 0,35$.

Tali disuniformità si accentuano ovviamente quando i pali, anzi che essere distribuiti lungo una linea sono distribuiti su di un'area. Nelle figure 8 e 9 sono riportati, al solito per i due diversi modi di funzionamento e per palificate costituite da 49, 25 e 9 pali, aventi le stesse caratteristiche dei precedenti, i valori dei carichi su ciascun palo avendo assunto pari ad 1 il carico sul palo d'an-

golo. Mentre nella prima situazione (fig. 8), ad esempio per $n = 49$, il palo d'angolo ha un carico 1,33 volte maggiore del carico medio, nella seconda esso risulta 5,7 volte più grande; inoltre l'intero carico applicato alla palificata è praticamente distribuito solo sui pali posti lungo il perimetro dell'area caricata (fig. 9); lo stesso può dirsi per le palificate costituite da 25 e 9 pali. Quest'ultima circostanza, evidentemente di scarsa aderenza alla realtà dei fatti è, fra l'altro, diretta conseguenza dell'aver supposto il terreno perfettamente elastico. Nel pa-

Fig. 9. - Carico uniformemente distribuito lungo l'asse;
 $\rho = \frac{d}{R} = 6$, $\alpha = \frac{h}{R} = 100$, $\mu = 0,35$.

ragrafo successivo verrà esaminato il comportamento delle palificate tenendo anche conto del raggiungimento di uno stato plastico nel terreno. La deduzione dei presenti risultati costituisce tuttavia, come sarà chiaro in seguito, necessaria premessa a detto studio.

Quando la palificata risulta molto estesa, tutti i pali, fatta eccezione per quelli esterni, hanno prati-

camente lo stesso carico; lo si vede ad esempio già per il gruppo di 19 pali per il quale il carico applicato al palo mediano differisce di poche unità per cento rispetto a quello dei due pali adiacenti. Al crescere però del numero dei pali in una od entrambe le direzioni x ed y , la soluzione matematica dà spostamenti sempre crescenti ed infiniti quando si considerino distribuzioni illimitate. Tale divergenza degli spostamenti è, com'è facile riconoscere dalla soluzione di MINDLIN, diretta conseguenza della lentezza con cui si smorzano i movimenti allontanandosi dal carico, ciò che costituisce anche una critica all'impiego della teoria dell'elasticità a questioni comprendenti la meccanica del terreno.

5. La ripartizione dei carichi tenendo conto anche del comportamento plastico del terreno.

Dall'esame dei risultati riportati nel paragrafo precedente, a conclusione dello studio sul comportamento in regime perfettamente elastico delle palificate, appare chiaramente come la disuniformità della distribuzione dei carichi sia fortemente accentuata quando lo schema di funzionamento è riconducibile a quello di portanza solo per attrito; in particolare, per palificate estese in due direzioni, i pali interni risulterebbero praticamente scarichi e quelli appartenenti al perimetro gravati, di conseguenza, dalla totalità del carico complessivo applicato alla palificata stessa.

In realtà ben difficilmente tale situazione potrà realizzarsi in quanto, com'è facile riconoscere, ciò comporterebbe sui pali appartenenti al perimetro carichi generalmente superiori a quello limite « convenzionale » proprio di ciascun palo. Si consideri ad esempio il gruppo di 49 pali aventi al solito le caratteristiche $\rho = 6$ ed $\alpha = 100$; detto P_m il carico medio, definito come rapporto fra il carico applicato alla palificata ed il numero dei pali, risulta, dai dati riportati nella figura 9, che i pali d'angolo, ad esempio, reggono un carico circa 5,7 volte maggiore del valor medio ed i due adiacenti circa 2,5 volte maggiore; se il carico medio è prossimo a quello di esercizio, tali pali, pensando che con i consueti criteri di progettazione il coefficiente di sicurezza sia 2, dovrebbero già aver raggiunto il carico limite, ciò che comporta quindi un funzionamento essenzialmente plastico anzi che elastico del terreno circostante. Questa situazione presenta dunque, sotto certi aspetti, analogie di comportamento col problema della fondazione rigida, gravata con un carico centrato, giacente su suolo elastico; è noto infatti che lungo il perimetro compaiono pressioni infinitamente grandi ma che non si possono produrre in seguito a fenomeni plastici.

Per tenere dunque conto, seppure in modo approssimativo, della circostanza che in corrispondenza dei pali appartenenti al perimetro possano venire superati i limiti elastici del terreno, faremo riferimento a due ipotesi limiti e precisamente: la prima consistente nello schematizzare il comportamento del palo come perfettamente elastico fino a quando il carico ha raggiunto il valore limite, poi perfettamente plastico; la seconda nel supporre che lo stato elastico di tutti i pali per i quali non è stato raggiunto il carico limite, non venga sostanzialmente modificato dalla presenza dei fenomeni plastici del terreno circostante i pali che già hanno raggiunto il carico limite stesso⁽⁸⁾.

Ciò premesso è facile giungere alle conclusioni.

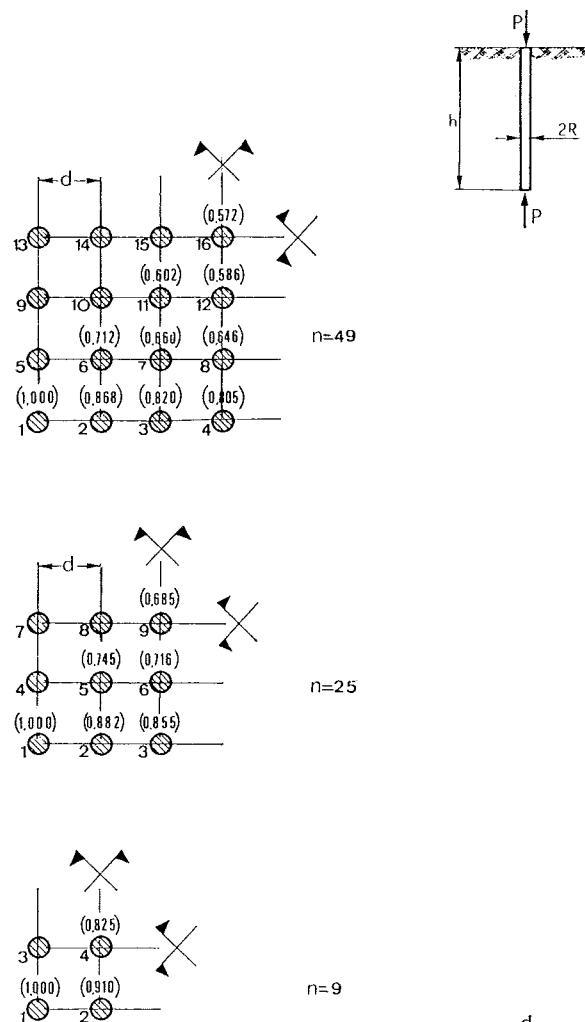


Fig. 10. - Carico trasmesso solo dalla base: $\rho = \frac{d}{h} = \nu$
 $\alpha = \frac{\nu}{R} = 100, \mu = 0,35.$

(8) Tale seconda supposizione appare ovviamente tanto meno legittima quanto più risulta ridotto, rispetto all'intera palificata, il numero dei pali che mantengono, nell'ambito teorico, comportamento elastico.

Consideriamo per fissare le idee, il gruppo di 49 pali sempre nell'ipotesi di portanza solo per attrito, e pensiamo noti il carico totale applicato al gruppo ed il carico limite, uguale per ciascun palo. Applichiamo quindi la frazione del carico totale necessaria affinché si raggiunga sul palo 1 il carico limite; con i dati numerici riportati nella figura 9 risulta che, in questa prima fase, il primo incremento di carico, espresso come multiplo del carico limite, vale $\Delta Q_1 = 11,8 P_1$ ed i carichi su tutti i pali sono:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1, & P_2 &= 0,426 P_1, & P_3 &= 0,375 P_1, \\ P_4 &= 0,359 P_1, & P_6 &\cong 0, & P_7 &\cong 0, & P_8 &\cong 0, \\ P_{11} &\cong 0, & P_{12} &= 0, & P_{16} &= 0. \end{aligned}$$

Incrementiamo poi il carico ΔQ_1 della quantità ΔQ_2 necessaria per portare anche il carico sul palo 2 (e conseguentemente anche sul 5) al valore P_1 , escludendo dalla situazione elastica l'influenza del palo 1 che ha già raggiunto il carico limite; a calcoli fatti risulta che l'incremento di carico necessario è $8,3 P_1$, ripartito sui pali nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P_2 &= 0,574 P_1, & P_3 &= 0,315 P_1, & P_4 &= 0,297 P_1, \\ P_6 &= 0,004 P_1, & P_7 &= 0, & P_8 &= 0, & P_{12} &= 0, \\ P_{16} &= 0. \end{aligned}$$

Sommando per ciascun palo tali valori ai precedenti si ottiene la distribuzione dei carichi quando i pali tipo 1, 2 e 5 hanno raggiunto il carico limite. Così procedendo per successivi incrementi è possibile portare al carico limite file sempre più interne di pali. S'intende che, avendo prefissato il carico totale applicato, il procedimento si arresta quando la somma dei vari incrementi uguaglia o supera il carico totale.

Nelle figure 10 e 11 si trovano riportate le distribuzioni dei carichi, per palificate costituite da 49, 25 e 9 pali e per le due caratteristiche situazioni di funzionamento, quando tutti i pali appartenenti al perimetro hanno raggiunto il carico limite. Nella prima situazione e cioè quando i pali hanno dominante l'appoggio alla base, se tutti i pali di perimetro hanno raggiunto il carico limite, alla palificata, qualunque sia il numero dei pali, è applicato un carico complessivo che vale circa l'80% di $n P_1$, molto prossimo quindi al carico limite del gruppo, ed inoltre i pali interni hanno praticamente tutti lo stesso carico. Profondamente differente è invece lo stato di sollecitazione dei pali nella seconda situazione; infatti i pali posti lungo il perimetro raggiungono il carico limite per valori abbastanza modesti del carico complessivo, che risulta circa il 50% di $n P_1$ ed, ad esclusione delle file di pali adiacenti a quelle di perimetro, tutte le altre sono

praticamente scariche.

Tale modo approssimato di procedere è certo ben lontano dal risolvere il problema assai complesso del comportamento in regime elasto-plastico delle palificate, tuttavia ci sembra che anche per tale via qualche indicazione di carattere pratico possa trarsi, confortati in ciò anche dal fatto che altri Autori, per un problema in parte analogo e precisamente per quello della distribuzione delle pressioni sotto

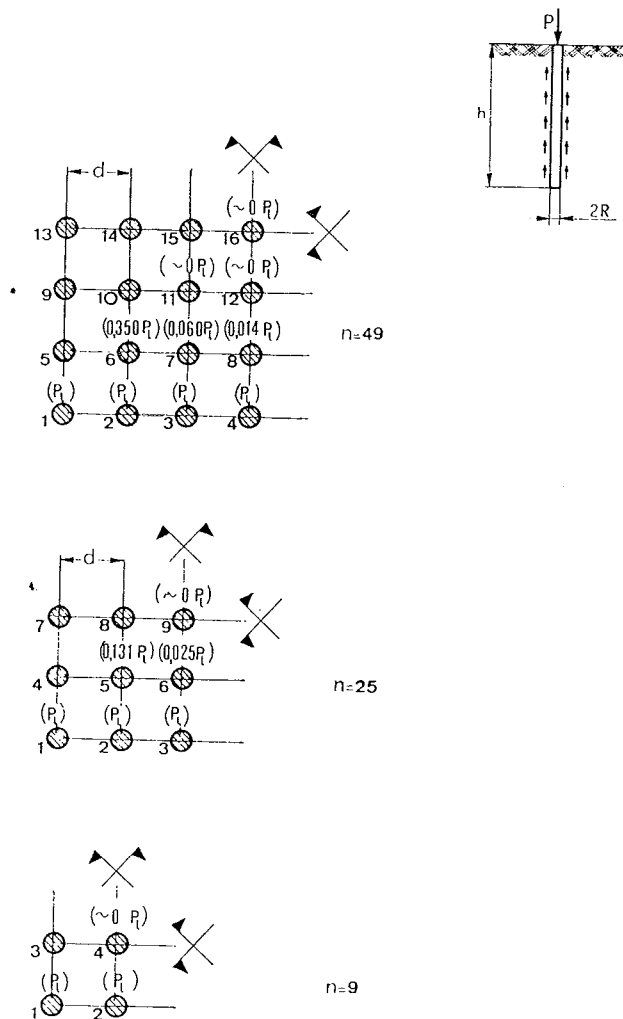


Fig. 11. - Carico uniformemente distribuito lungo l'asse;

$$\rho = \frac{d}{R} = 6, \quad \alpha = \frac{h}{R} = 100, \quad \mu = 0,35.$$

le lastre rigide, hanno operato in modo concettualmente simile trovando poi soddisfacenti conferme sperimentali [SCHULTZE, 1961].

6. Un procedimento per un rapido calcolo orientativo della distribuzione dei carichi per una palificata nell'ipotesi che la portanza dei pali sia dovuta esclusivamente all'appoggio della base.

Dai procedimenti di calcolo esposti nei paragrafi 4 e 5 si giunge alla risoluzione di sistemi di equazioni, ciò che complica alquanto il calcolo sopra

tutto quando il numero delle incognite risulta elevato. Molto spesso poi nella pratica non ha grande interesse conoscere per tutti i pali, appartenenti ad un determinato gruppo, la distribuzione dei carichi ma solamente per alcuni di essi; ad esempio in una palificata con i pali regolarmente distribuiti, all'interno di un'area rettangolare, in corrispondenza dei vertici di maglie rettangolari, può interessare sopra tutto conoscere di quanto si sovraccaricano i pali d'angolo e quelli posti in corrispondenza delle mediane rispetto a quello centrale; altrettanto dicasi per altri casi particolari. Può quindi essere di qualche utilità un procedimento di calcolo che, per quanto approssimato, permetta di arrivare speditamente alla conclusione senza necessariamente dover risolvere sistemi di equazioni. In vista di ciò si consideri, per fissare le idee, la distribuzione di pali di figura 6 nell'ipotesi che le sezioni dei pali stessi siano tutte uguali. Per ciascun palo i l'equazione esprime l'uguaglianza dell'abbassamento al valore prefissato è, come già si è visto,

$$X_i \eta_{ii} + \sum_j X_j \eta_{ji} = \bar{\eta}, \quad (8)$$

con j che varia da 1 ad n escluso i . Il sistema costituito dalle equazioni del tipo (8) si può risolvere, secondo noti procedimenti iterativi, pensando dapprima che tutte le incognite abbiano lo stesso valore e ricavando quindi l'incognita generica X_i dalla (8) come:

$$X_i = \bar{\eta} / \sum_j \eta_{ji}$$

ciò che fra l'altro corrisponde a considerare le forze X_i inversamente proporzionali, a meno di $\bar{\eta}$, agli spostamenti indotti in i da un sistema di forze tutte uguali. I valori delle incognite così calcolati possono servire poi per calcolare la sommatoria a primo membro della (8) ed ottenere quindi le incognite X_i con approssimazione migliore; s'intende poi che procedendo in modo analogo è possibile migliorare quanto si vuole l'approssimazione del risultato. La convergenza com'è noto, è tanto più grande quanto più i coefficienti della diagonale principale sono prevalenti su tutti gli altri. Per questo motivo esso si presta vantaggiosamente alla risoluzione dei problemi riguardanti i gruppi di pali la cui portanza è data prevalentemente per appoggio alla base poiché in tal caso abbastanza forti sono gli smorzamenti degli effetti di un carico concentrato nel terreno alla profondità h , mentre non dà risultati soddisfacenti nel caso di pali la cui portanza è dovuta all'attrito.

Un esempio numerico vale a mostrare l'entità degli errori ed il grado di convergenza quando agiscono solo i carichi trasmessi dalle basi dei pali. Si consideri dunque la schiera di pali di figura 6; il sistema (6), risolto calcolando i coefficienti con le (2) e (3) e ponendo $\mu = 0,35$, porge:

$$\begin{aligned} X_1 &= 7,512 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_2 &= 6,931 \text{ GR}\bar{\eta}, \\ X_3 &= 6,703 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_4 &= 6,571 \text{ GR}\bar{\eta}, \\ X_5 &= 6,483 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_6 &= 6,423 \text{ GR}\bar{\eta}, \\ X_7 &= 6,381 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_8 &= 6,354 \text{ GR}\bar{\eta}, \\ X_9 &= 6,338 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_{10} &= 6,333 \text{ GR}\bar{\eta}. \end{aligned}$$

Calcolando le X_i con la (8) si ottiene invece:

$$\begin{aligned} X_1 &= 7,261 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_2 &= 6,865 \text{ GR}\bar{\eta}, \\ X_3 &= 6,691 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_4 &= 6,587 \text{ GR}\bar{\eta}, \\ X_5 &= 6,517 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_6 &= 6,469 \text{ GR}\bar{\eta}, \\ X_7 &= 6,413 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_8 &= 6,380 \text{ GR}\bar{\eta}, \\ X_9 &= 6,341 \text{ GR}\bar{\eta}, & X_{10} &= 6,340 \text{ GR}\bar{\eta}. \end{aligned}$$

I risultati sono dunque ottimamente approssimati e l'errore percentuale più sensibile, rispetto al valore rigoroso, si commette sul primo palo ed è appena pari a circa il 3,3 %.

7. Osservazioni conclusive.

Lo studio della ripartizione dei carichi sui pali di fondazione con impressi spostamenti uniformi, permette di svolgere alcune osservazioni, valide, s'intende, nell'ambito delle schematizzazioni teoriche formulate sulle proprietà meccaniche del terreno.

Una prima circostanza è che, per distanze dei pali comprese, come in genere avviene nella pratica, fra 3 e 5 volte il diametro della loro sezione, poca influenza sul comportamento della palificata hanno il distanziamento dei pali ed il valore del rapporto fra lunghezza del palo e diametro, in altri termini al variare di tali grandezze la distribuzione dei carichi continua a restare praticamente la stessa.

Grande importanza ha invece, agli effetti della ripartizione dei carichi il modo di funzionare dei pali e quindi, in ultima analisi, le caratteristiche meccaniche del terreno. Infatti per pali reggenti i carichi prevalentemente per attrito le differenze di carico fra elementi perimetrali ed interni sono molto maggiori dei divari che si hanno quando i pali hanno dominante l'appoggio alla base. In entrambi i casi poi, ed a parità d'altre condizioni, la legge di ripartizione del carico varia sensibilmente anche al variare del modo di distribuzione dei pali.

Generalmente poi, sopra tutto quando la portanza è governata dall'attrito, intervengono fenomeni plastici in corrispondenza dei pali posti lungo il perimetro che limitano in parte le disuniformità dei carichi.

BIBLIOGRAFIA

- BERARDI G. (1965) - *Sulla distribuzione dello stato di sollecitazione in una palificata*. Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Pisa, vol. VI.
- CAQUOT J., KERISEL J. (1966) - *Traité de Mécanique des Sols*. Gauthier-Villars, Paris.
- GEDDES J. D. (1966) - *Stresses in foundation soil due to vertical subsurface loading*. Géotechnique, vol. XVI, pag. 231.
- LEE I. K. (1968) - *Soil Mechanics*. Butterworths, London.
- MELAN E. (1932) - *Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Inneren Beanspruchten Halbscheibe*. Zamm 12, 6.

- MINDLIN R. D. (1936) - *Force at a Point in the Interior of a Semi-infinite solid*. Physics, vol. VII, n. 5.
- SALAS J. A. J. and BELZUNCE J. A. (1965) - *Résolution théorique de la distribution des forces dans des pieux*. Proc. of 6 th Int. Conf. on Soil Mech. Found. Eng., Montreal, University of Toronto Press.
- SCHULTZE E. (1961) - *Distribution of stresses beneath rigid footings*. Proc. V Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. Dunod, Paris.
- SOWERS G. F., MARTIN C. B., WILSON L. L. (1961) - *The bearing capacity of friction pile groups in homogeneous clay from model studies*. Proc. V Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Dunod, Paris.
- THURMAN A. C. and D'APPOLONIA E. (1965) - *Computed Movement of Friction and End Bearing Piles Embedded in Uniform and Stratified Soil*. Proc. 6th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. Montreal, University of Toronto Press.
- WHITAKER T. (1957) - *Experiments with model piles in groups*. Géotechnique, vol. 7, n. 4.

S U M M A R Y

Load distribution among the piles in a group.

A. reports a criterion for the analysis of pile groups, under the hypothesis that the group is acted upon by a vertical axial load and that the piles are connected at their top by a rigid raft, so that they undergo the same displacements.

In a first step the subsoil is assumed to behave as a homogeneous, isotropic, elastic half-space. Calculation procedures are based on the well known MINDLIN'S solution for a concentrated vertical force acting inside the half-space.

The piles are treated as rigid; as for pile-soil interaction, two situations are examined: (i) the whole pile load is transferred to the pile point and (ii) the whole pile load is transferred through side friction. In the latter case the tangential stress between the pile shaft and the soil is assumed to be constant with the depth.

In both cases extensions of MINDLIN'S equation give influence values for the displacements of the piles; by equating the displacements and taking into account equilibrium the unknown values of the load acting on each pile are readily found.

As an example, in table I the ratios between the displacements of the single pile and of the piles in groups of 2, 3 and 4 are reported for different values of the parameter α (ratio between length and radius of the pile) and ρ (ratio between spacing and radius of the piles). In fig. 7, 8 and 9 the load distribution among the piles is shown for various typical pile groups.

The examples worked out show some interesting features.

The mutual influence among the piles is but slightly influenced by their spacing, at least within the values considered. For a given number of piles and a given spacing the load distribution is practically unaffected by the length of the piles and hence by α values (this substantiates on a theoretical basis the usual practice of establishing pile spacing irrespective of their length). Finally the load distribution is much more uniform for end-bearing than for floating piles.

According to the above given results in the hypothesis of perfectly elastic behaviour the perimeter piles and above all the corner piles of a group are heavily overloaded; in most practical cases this behaviour appears to be unrealistic.

As a better approximation of reality, in par. 5 a procedure is reported which is based on the following hypothesis: (i) the pile and the surrounding soil behave elastically up to the ultimate load, and then the displacements go on under constant load (perfectly elastic-perfectly plastic behaviour); (ii) the piles which have not yet reached the ultimate bearing capacity save their elastic behaviour notwithstanding the occurrence of plastic phenomena in the surrounding soil.

At the end of the paper an iterative calculation procedure is illustrated that allows an approximate solution of the load distribution among the piles in a group. The procedure is rapidly convergent and in some cases, especially for end-bearing piles, it gives sufficiently approximated results even after the first iteration.