

Comportamento delle piastre circolari su suolo alla Repnikov

G. BARLA, L. BELLONI, M. JAMIOLKOWSKI, E. PASQUALINI *

SOMMARIO: Nel presente lavoro si esamina il problema di una piastra circolare avente rigidità relativa variabile, soggetta ad un sistema di carichi di tipo assialsimmetrico e poggiante su un suolo il cui comportamento fisico è descrivibile mediante il modello di REPNIKOV. Adottando il metodo risolutivo di ZEMOTCKINE si determinano le reazioni al contatto tra la fondazione ed il terreno, i cedimenti della superficie del terreno al di sotto della fondazione e nelle vicinanze del suo perimetro, i momenti flettenti radiali e tangenziali, nonché lo sforzo di taglio e le rotazioni della piastra. Si conduce un'analisi parametrica che consente di trarre alcune conclusioni preliminari sull'applicabilità del modello di REPNIKOV negli studi di interazione tra fondazione e terreno. Si danno in particolare i valori dei coefficienti adimensionali che possono essere utilizzati in applicazioni di interesse pratico.

Introduzione

Nello studio dell'interazione tra fondazione e terreno è necessario postulare per quest'ultimo un modello fisico-meccanico di comportamento che consenta di descrivere in modo adeguato almeno la deformabilità della sua superficie. A questo fine il modello proposto da REPNIKOV [1967], SCHULTZE [1967] e RIVKIN [1969], avente un comportamento intermedio tra quello di un semispazio omogeneo, isotropo ed elastico lineare (modello alla BOUSSINESQ, 1885)⁽¹⁾ e quello di un mezzo costituito da un letto di molle⁽²⁾ (modello alla WINKLER, 1867), è di estremo interesse in applicazioni pratiche. Questo modello infatti riproduce, anche se in modo approssimato, il comportamento di un semispazio elastico, isotropo ed eterogeneo avente un modulo di deformazione variabile con la profondità secondo la seguente legge:

$$E_z = E_0 + E_n z \quad [\text{FL}^{-2}] \quad (1)$$

essendo:

E_0 = modulo di deformazione in corrispondenza del limite superiore del semispazio ($z = 0$) $[\text{FL}^{-2}]$;

E_n = gradiente della legge di variazione del modulo di deformazione $[\text{FL}^{-3}]$

z = profondità $[\text{L}]$.

Una schematizzazione di questo tipo è assai

vantaggiosa perché permette di rappresentare in modo realistico la variazione lineare del modulo di deformazione con la profondità [JANBU, 1963 e 1967; SCHULTZE, 1967] come si osserva sperimentalmente nei depositi di materiali omogenei di grande spessore.

Infatti in tali terreni il valore del modulo di deformazione E_z aumenta proporzionalmente allo sforzo efficace ottaedrico

$$\bar{\sigma}_{ott} = \frac{\bar{p}_v (1 + 2 \bar{K}_0)}{3} \quad [\text{FL}^{-2}]$$

\bar{p}_v = pressione verticale efficace;

\bar{K}_0 = rapporto tra tensione orizzontale e verticale, ambedue espresse in termini di sforzi efficaci;

il quale è crescente linearmente o quasi con la profondità. Inoltre E_z è influenzato in modo sensibile dalla storia dello stato di tensione e più precisamente dal grado di consolidazione del materiale.

La possibilità di descrivere in prima approssimazione la deformazione del *limite superiore* di un semispazio eterogeneo mediante il modello alla Repnikov, postulata da SCHULTZE [1967 e 1970] e da REPNIKOV stesso [1967], trova la sua giustificazione nelle seguenti considerazioni di carattere teorico e sperimentale:

1) Le prove di carico effettuate su piastre di varie dimensioni, soggette alla stessa pressione uniformemente ripartita q , indicano che la relazione tra il cedimento y ed il raggio della piastra R ha andamento molto simile a quello calcolato tanto in base alla teoria di un semispazio eterogeneo che ricorrendo al modello di

* Prof. Ing. Giovanni BARLA, Incaricato del corso di *Meccanica delle rocce* presso il Politecnico di Torino.

Dott. Ing. Luigi BELLONI, *Studio Geotecnico Italiano* di Milano.

Dott. Ing. Michele JAMIOLKOWSKI, Incaricato del corso di *Geotecnica* presso il Politecnico di Torino.

Dott. Ing. E. PASQUALINI, Ricercatore presso l'Istituto di *Scienza delle Costruzioni* del Politecnico di Torino.

(¹) Caratterizzato da un modulo di elasticità E_s $[\text{FL}^{-2}]$ e da un coefficiente di Poisson η_s .

(²) Caratterizzato dalla costante di sottofondo k $[\text{FL}^{-3}]$.

(³) Vedi per esempio: BJERRUM e EGGESTAD [1963] e TERZAGHI e PECK [1967].

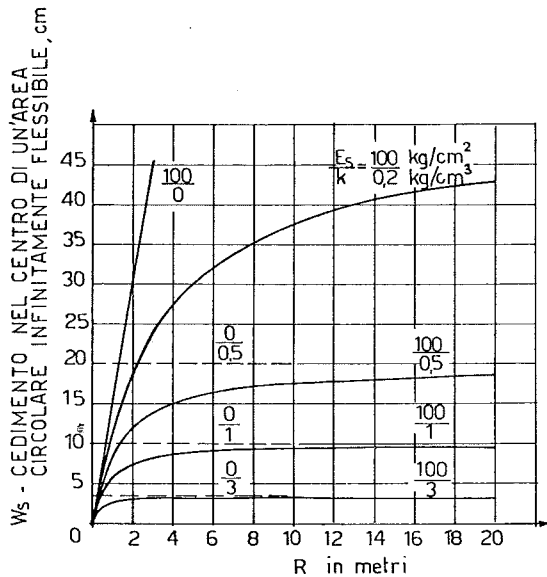


Fig. 1. — Influenza delle dimensioni della piastra circolare sul cedimento del terreno alla REPNIKOV al variare

del rapporto $\frac{E_s}{k}$.

REPNIKOV (fig. 1) (4). L'andamento delle funzioni $y(R)$ che si ottiene utilizzando i due modelli sopra menzionati è omotetico.

- 2) Le misure effettuate su opere in vera grandezza dimostrano che la propagazione delle deformazioni della superficie del terreno al di fuori dell'area caricata è intermedia tra quella che si ha ricorrendo ai modelli di Boussinesq e di Winkler. Questa evidenza sperimentale è conforme a quanto si ottiene calcolando le deformazioni della superficie del terreno con l'ausilio della teoria di un semispazio eterogeneo o di quella del terreno alla Repnikov.
- 3) La deformazione del limite superiore di un semispazio eterogeneo, avente il modulo di deformazione variabile con la profondità in accordo con la (1), è nella condizione al limite analoga a quella ottenuta col modello di Repnikov. Infatti si ha che ($D = 2R$):

$$\text{quando } \frac{E_s}{kD} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{E_o}{E_n D} \rightarrow 0$$

le deformazioni del limite superiore del mezzo tendono ai valori che si ricavano schematiz-

zando il terreno come il suolo alla Winkler (4). Nel caso opposto, quando

$$\frac{E_s}{kD} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \frac{E_o}{E_n D} \rightarrow \infty$$

il comportamento dei due modelli si identifica con quello del semispazio alla Boussinesq.

L'equivalenza tra il comportamento del limite superiore di un semispazio eterogeneo e di quello del modello di Repnikov trova una rappresentazione schematica nell'illustrazione di fig. 2.

Sembra perciò giustificata l'adozione del modello di Repnikov negli studi di interazione tra fondazione e terreno soprattutto quando si desidera simulare la deformabilità del limite superiore di un semispazio eterogeneo avente un modulo di deformazione variabile con la profondità secondo l'equazione (1).

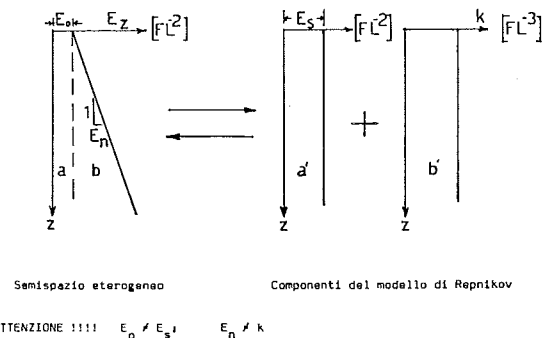


Fig. 2. — Analogia tra semispazio eterogeneo e modello di Repnikov.

L'impiego di questo modello nelle applicazioni pratiche è inoltre giustificato dalla sua semplicità contrapposta alla attuale difficoltà delle poche soluzioni analitiche disponibili [KLEIN 1956, KLEIN e DURAJEV 1971, BOROWICKA 1943, GIBSON 1967, GIBSON e SILLS 1969, 1971, GIBSON e AWAJOBI 1973, ZARETZKY e TSYTOVICH 1969 *et al.*, BROWN e GIBSON 1972] e ciò almeno sino a quando non sia approfondito lo studio delle soluzioni analitiche tuttora disponibili per il calcolo delle deformazioni di un semispazio eterogeneo o non siano completate, ricorrendo a metodi numerici (5), le tabelle con coefficienti di influenza adimensionali che danno il cedimento del limite superiore di tale semispazio.

(4) Nel caso di $\eta = 0,5$ e $E_o = 0$ si ha un comportamento identico al suolo alla Winkler; per valori di η inferiori, la deformata della superficie del terreno è quasi totalmente contenuta al di sotto dell'area caricata [GIBSON, 1967; GIBSON e SILLS, 1971; AWAJOBI e GIBSON, 1972; BROWN e GIBSON, 1972].

(5) Tabelle analoghe a quelle compilate da ZEMOTCKINE e SINICYN [1962], per il caso di semispazio omogeneo alla BOUSSINESQ possono ad esempio essere ottenute mediante il metodo degli elementi finiti ricorrendo a modelli assial-simmetrici.

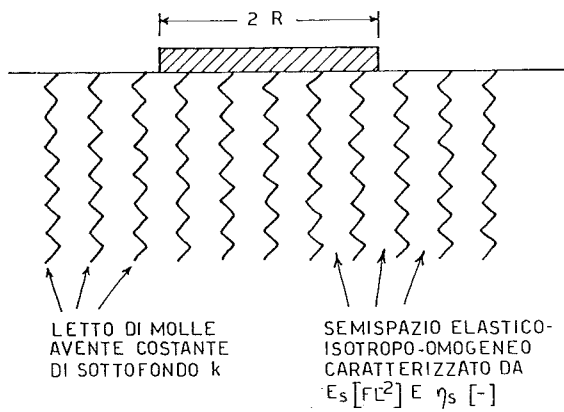


Fig. 3. — Schema del terreno alla REPNIKOV.

Richiami sul modello di Repnikov

La schematizzazione del terreno dovuta a Repnikov consiste in un semispazio elastico, omogeneo ed isotropo, indefinito, caratterizzato da E_s e η_s costanti, nel quale sia immerso un sistema di molle con costante di sottofondo k (fig. 3). In questo modo si ipotizza che una generica pressione q agente sul terreno gravi con la quota λq sulle molle e con la quota $(1-\lambda)q$ sul semispazio elastico. Il cedimento della superficie del terreno può essere calcolato tanto basandosi sul semispazio elastico che sulle molle, dovendo, per la congruenza, i due valori ottenuti per qualsiasi punto della superficie del terreno risultare uguali. Nel caso semplice di una piastra circolare infinitamente rigida, la costante λ di ripartizione è facilmente trovata.

Così avendo per un semispazio omogeneo, isotropo ed elastico lineare

$$y^e = I_B \frac{R q (1 - \eta_s^2) (1 - \lambda)}{E_s} \quad [L] \quad (2)$$

e per un letto di molle

$$y^k = \frac{q}{k} \lambda \quad [L] \quad (3)$$

dove:

y^e = assestamento del semispazio alla Boussinesq [L];

I_B = coefficiente di forma [-];

R = raggio della piastra [L];

q = pressione uniformemente ripartita agente sulla piastra [FL⁻²];

$1 - \lambda$ = aliquota della pressione q agente sul semispazio elastico [-];

y^k = assestamento delle molle [L];

λ = aliquota della pressione che grava sulle molle [-]

uguagliando la (2) e la (3) si ottiene

$$\lambda = \frac{k \cdot I_B \cdot R (1 - \eta_s^2)}{E_s + k I_B R (1 - \eta_s^2)} \quad (4)$$

Nel caso di una piastra flessibile la ripartizione tra i due componenti del semispazio è meno immediata, risultando il coefficiente λ funzione della deformabilità della struttura.

Il modello di Repnikov viene quindi introdotto come di seguito esposto.

Metodo risolutivo adottato

Si considera una piastra circolare di fondazione soggetta ad un sistema di carichi aventi simmetria radiale. Si determinano le caratteristiche di sollecitazione, cedimenti e rotazioni della piastra nell'ipotesi che il terreno sia schematizzabile mediante il modello di Repnikov prima descritto. Si propone di ricorrere, a questo scopo, al metodo di discretizzazione proposto da ZEMOTCKINE [1962].

La piastra circolare viene suddivisa, secondo lo schema illustrativo di fig. 4 (a), in anelli concentrici di uguale larghezza c , partendo da un cerchio centrale avente c come diametro. Non si considera l'attrito al contatto tra piastra e terreno. Quindi si sostituisce il contatto continuo tra piastra e terreno con uno discreto, interponendo tra i due un numero arbitrario di aste verticali infinitamente rigide, incernierate in alto e in basso.

La simmetria radiale della struttura consente di sostituire, ai fini della soluzione del problema, lo schema di fig. 4 (a) con quello illustrato in fig. 4 (b), dove le aste appartenenti a ciascun anel-

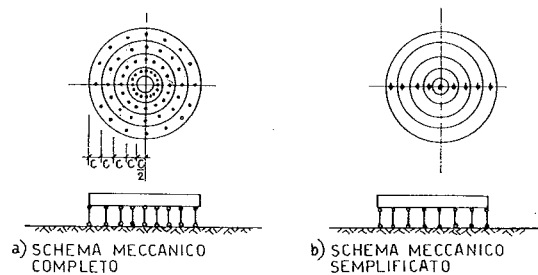


Fig. 4. — Piastra circolare.

lo vengono raggruppate in due, poste simmetricamente rispetto al centro della piastra, tutte lungo un'unica sezione diametrale. In tal modo lo studio del comportamento della piastra viene ricondotto all'analisi di ciò che avviene in quella sua sezione diametrale.

Si considera al posto dello schema meccanico quello statico ad esso corrispondente. In questo modo ciascun'asta relativa al semianello che le compete viene sostituita da una forza verticale X_i incognita, agente sulla piastra come forza concentrata e sul terreno come forza uniformemente di-

stribuita (fig. 5). In particolare su quest'ultimo si dovrà avere

$$X_i = X_i^E + X_i^K \quad (5)$$

in quanto, per ipotesi, ciascuna forza X_i si distribuisce in parte sulle molle di sottofondo (X_i^K) ed in parte sul semispazio elastico (X_i^E).

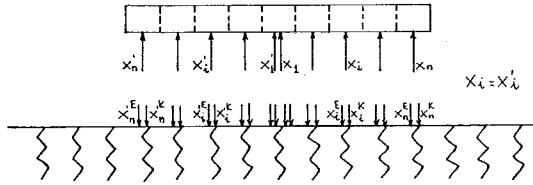


Fig. 5. — Piastra circolare poggiate sul terreno alla REPNIKOV, schema statico.

La piastra sotto l'azione di carichi esterni agisce sul terreno deformandolo e deformandosi, fino a raggiungere una posizione di equilibrio sotto l'azione delle reazioni X_i^E e X_i^K nel terreno, nate a seguito delle deformazioni subite da quest'ultimo. Lo spostamento globale della struttura risulta quindi dalla somma di uno spostamento rigido e di uno elastico, e può essere immaginato in due tempi; per primo avviene lo spostamento rigido e la sua posizione viene definita attraverso le sue componenti, spostamento verticale rigido y_0 e rotazione rigida ϕ_0 , entrambi incogniti, definiti in un punto qualsiasi della struttura. Intorno a questo punto, considerato ora come fisso, cioè come un vincolo, si fa avvenire lo spostamento elastico ad opera delle X_i e dei carichi esterni.

Trattando un problema con simmetria radiale risulta conveniente porre questo vincolo nel centro della piastra; ciò rende la ϕ_0 nulla; si ha inoltre che, avendo cura di scegliere le aste ed il vincolo nel modo sopra indicato, sarà sufficiente considerare, nel corso della soluzione, soltanto metà piastra.

A questo proposito si fa osservare che:

- il calcolo delle deformazioni strutturali deve essere fatto prendendo in considerazione solo le forze X_i ed i carichi esterni agenti sulla metà piastra considerata;
- nel calcolo degli assestamenti del terreno occorre al contrario tenere conto di tutte le forze X_i^E agenti^(*).

(*) A meno che non si vogliano calcolare gli assestamenti del terreno in base ai valori di X_i^K .

Sistema risolvete

Con riferimento alla fig. 6 si pone:

L = numero arbitrario degli anelli, compreso il cerchio centrale (detti di seguito anche «conci»), in cui si suppone suddivisa la piastra circolare (e quindi il terreno sotto l'impronta di questa);

M = numero arbitrario di conci in cui si suddivide il terreno al di fuori della piastra;

$N = M + L =$ numero complessivo dei conci.

La soluzione del problema consiste nel determinare il cedimento y_0 in corrispondenza del vincolo fittizio ed i valori di X_i^E e X_i^K per ciascun i -esimo concio (noti i quali si ottiene per la (5) immediatamente la X_i), cioè in totale $2N + 1$ incognite.

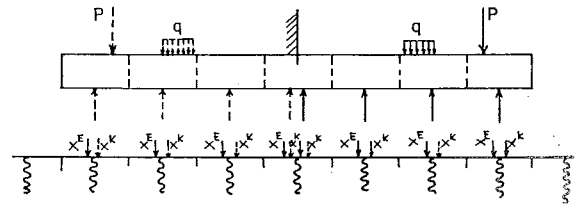


Fig. 6. — Piastra circolare, poggiate su terreno alla REPNIKOV, soggetta a carichi assialsimmetrici; schema statico risolvete.

Si perviene alla soluzione verificando le seguenti condizioni:

- 1) continuità di contatto tra piastra e terreno con riferimento agli spostamenti verticali
- 2) congruenza per gli spostamenti delle due componenti del modello di REPNIKOV;
- 3) equilibrio delle forze generate nelle due componenti del modello al di fuori della piastra.
- 4) equilibrio alla traslazione verticale.

1) La condizione di continuità tra la piastra e il terreno è verificata imponendo che lo spostamento verticale relativo sia nullo.

Scritta per il generico punto « i », tale condizione ha la seguente forma:

$$\sum_{j=1}^L X_j v_{ij} + \sum_{j=1}^N X_j^E w_{ij} + \Delta_i^P + y_0 = 0 \quad (6)$$

dove:

$\sum_{j=1}^L X_j v_{ij} =$ inflessione strutturale della piastra nel punto « i » (al centro del concio « i ») determinata dalle influenze di tutti i carichi concentrati X_j che agiscono su metà di essa;

$\sum_{j=1}^N X_j^E w_{ij}$ = cedimento del terreno nel punto « i » determinato dalle influenze di tutte le pressioni che agiscono sul semispazio elastico dovute alle X_j^E ;

Δ_i^P = inflessione strutturale della piastra nel punto « i » generata dalle forze esterne [L];

v_{ij} = deformazione strutturale nel punto « i » dovuto alla forza X_j resa unitaria; tale deformazione è calcolata ponendo un incastro puntiforme fittizio nel centro della piastra [FL⁻¹];

w_{ij} = cedimento del terreno in mezzeria dell'anello i-esimo dovuto alla forza X_j^E resa unitaria, raddoppiato per tener conto del contributo delle forze simmetriche X_j^E [F · L⁻¹].

Tenendo presente che:

$$X_j = X_j^E + X_j^K \quad (7)$$

si può scrivere l'equazione di continuità per il generico punto « i » anche sotto la forma:

$$\sum_{j=1}^L X_j^E (v_{ij} + w_{ij}) + \sum_{j=L+1}^N X_j^E w_{ij} + \sum_{j=1}^L X_j^K v_{ij} + \Delta_i^P + y_0 = 0 \quad (8)$$

Tale condizione, imposta in tutti gli L punti in cui sono applicate le aste, permette di scrivere L equazioni.

2) La seconda condizione è verificata imponendo che per ciascun concio « i » sia:

$$y_i^K = y_i^E \quad (9)$$

Si ha per y_i^K ricorrendo alla (2):

$$y_i^K = \frac{X_i^K}{A_i k} \quad (10)$$

dove si è posto $q = \frac{X_i^K}{A_i}$, essendo A_i [L²] la semiarea del concio i-esimo; y_i^E è invece dato da:

$$y_i^E = \sum_{j=1}^N X_j^E w_{ij} \quad (11)$$

Per la (10) e la (11) la condizione di congruenza (9) fra le due componenti del modello di REPNIKOV assume questa forma:

$$\frac{X_i^K}{A_i k} = \sum_{j=1}^N X_j^E w_{ij} \quad (12)$$

Tale condizione, imposta in tutti gli N punti del terreno, permette di scrivere N equazioni.

3) La condizione di equilibrio delle forze generate nelle due componenti del modello al di fuori del perimetro della piastra è espressa da:

$$X_j^E + X_j^K = 0 \quad (13)$$

Tale condizione, imposta in tutti gli M punti al di fuori del perimetro della piastra, permette di scrivere M equazioni.

4) La condizione di equilibrio alla traslazione verticale è data da:

$$\sum_{j=1}^L 2(X_j^E + X_j^K) = \sum_{m=1}^L P_m \quad (14)$$

dove $\sum_{m=1}^L P_m$ = sommatoria delle forze esterne.

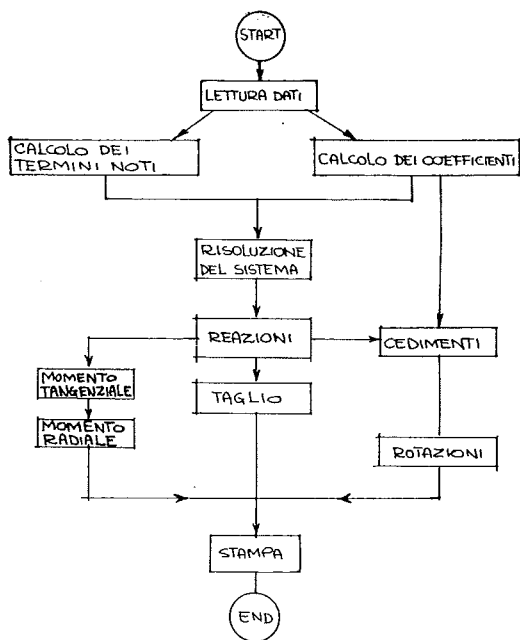
Concludendo si hanno $N + L + M + 1 = 2N + 1$ equazioni; tante quante sono le incognite.

Nel sistema risolvete, costituito dalle (8), (12), (13) e (14), compaiono, come coefficienti o come termini noti, i cedimenti del terreno e le deformazioni strutturali.

I cedimenti w_{ij} , che intervengono nei coefficienti, possono essere calcolati ricorrendo a formule analitiche che danno questi in un punto qualsiasi della superficie di un semispazio omogeneo ed isotropo alla Boussinesq, nei casi di carico uniformemente distribuito su un cerchio (contributo al cedimento del carico centrale) e su una corona circolare (contributo al cedimento degli anelli).

I valori delle inflessioni v_{ij} , generate dalle reazioni incognite rese unitarie, intervengono inoltre nella determinazione dei coefficienti; i valori delle inflessioni Δ_i^P , generate dalle forze esterne, costituiscono invece i termini noti. Sia gli uni che gli altri possono essere valutati ricorrendo a note formule della Scienza delle Costruzioni.

La risoluzione del sistema e la determinazione delle sollecitazioni e delle deformazioni nella piastra sono state ottenute mediante un programma di calcolo scritto per l'elaboratore IBM 360/44. Qui di seguito ne viene riportato il diagramma di flusso con lo scopo di illustrare, in forma schematica, le diverse parti che costituiscono questo programma.



Commento dei risultati ottenuti

Con lo scopo di acquisire alcune indicazioni preliminari sul comportamento delle strutture di fondazione poggianti sul suolo alla REPNIKOV, si è condotto uno studio parametrico riferito ad una piastra circolare avente un diametro di 10 m e differenti spessori compresi tra 0.23 e 0.99 m.

Le condizioni di carico adottate nei calcoli sono le seguenti:

- pressione uniformemente ripartita (q) agente su tutta la piastra;
- carico concentrato (P), applicato nel centro della piastra;
- carico lineare (P') agente ad una distanza radiale (R') dal centro della piastra.

Al fine di caratterizzare la deformabilità del suolo alla REPNIKOV si è definito il coefficiente di eterogeneità β

$$\beta = \frac{2 \cdot k \cdot D}{E_s} \text{ ove } D = \text{Diametro della piastra}$$

In tutti i casi esaminati si sono posti $E_s = 3000 \text{ t/m}^2$, $\eta_s = 0,33$, e si è variato il valore della costante di sottofondo k (⁷⁾.

In base al presente studio è possibile fare le osservazioni preliminari di seguito riportate.

a) Influenza del numero di suddivisioni adottato.

Nelle figure 7 ÷ 10 si confrontano i valori dei momenti flettenti lineari tangenziali (M_t) e radiali (M_r), degli assestamenti del terreno (y), ottenuti

(⁷) Per errore nelle figure è riportato per E il valore di 1500 t/m^2 .

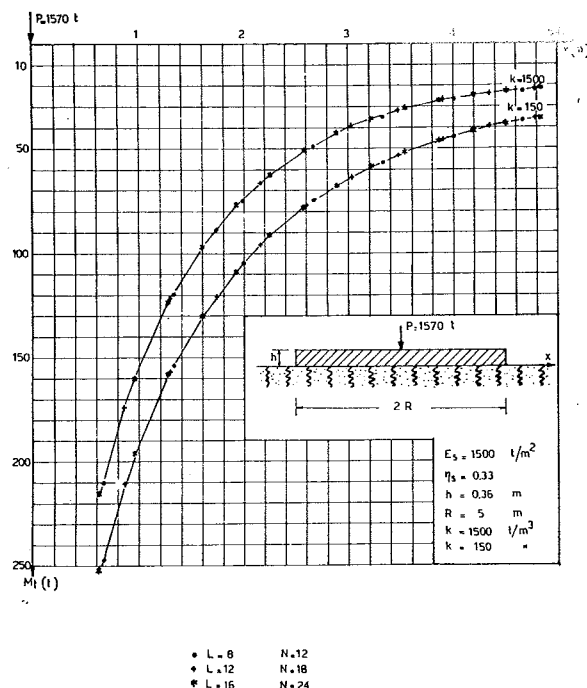


Fig. 7. — Confronto tra le distribuzioni del momento tangenziale lineare calcolato con diverse suddivisioni della piastra circolare.

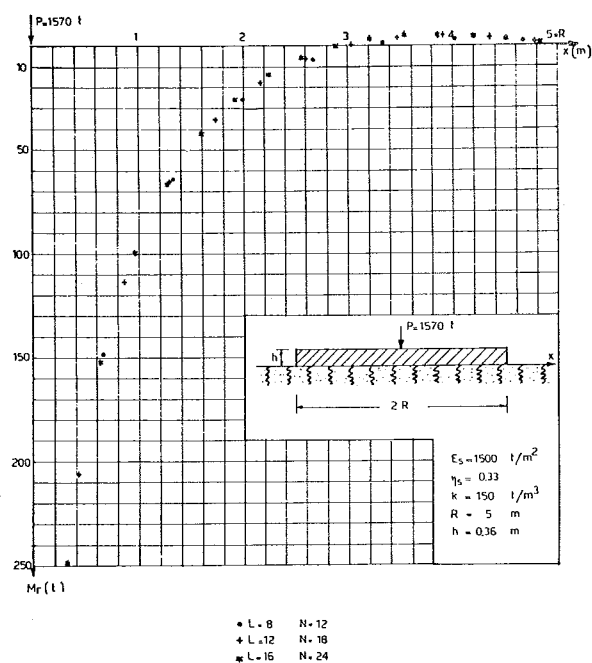


Fig. 8. — Confronto tra le distribuzioni del momento radiale lineare calcolato con diverse suddivisioni della piastra circolare.

per diversi valori di L ed N , variabili entro i seguenti limiti:

$$8 < L < 16 \quad \text{e} \quad 12 < N < 24$$

Dal confronto riportato, eseguito per il caso di carico concentrato e per due diversi valori di k , è possibile osservare che il numero delle suddivisioni adottato, in relazione alle dimensioni della

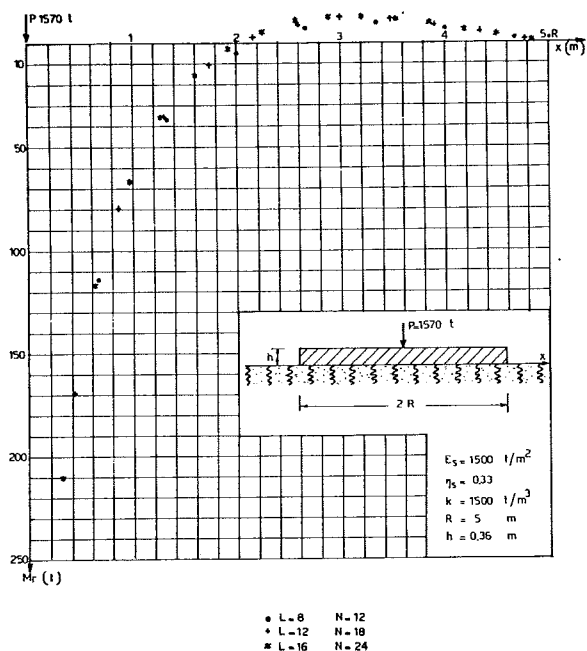


Fig. 9. — Confronto tra le distribuzioni del momento radiale lineare calcolato con diverse suddivisioni della piastra circolare.

piastra, non influenza in modo sensibile i risultati. Si è deciso comunque di condurre la maggior parte dei calcoli ponendo:

$$L = 15 \quad \text{e} \quad N = 22$$

b) Reazioni p_i

Le figure 11 e 12 mostrano l'andamento delle reazioni del terreno p_i al variare di k nel caso di carico concentrato P e per due diversi spessori della piastra circolare.

Risulta evidente un progressivo decrescere della rigidità relativa della piastra all'aumentare del valore di k .

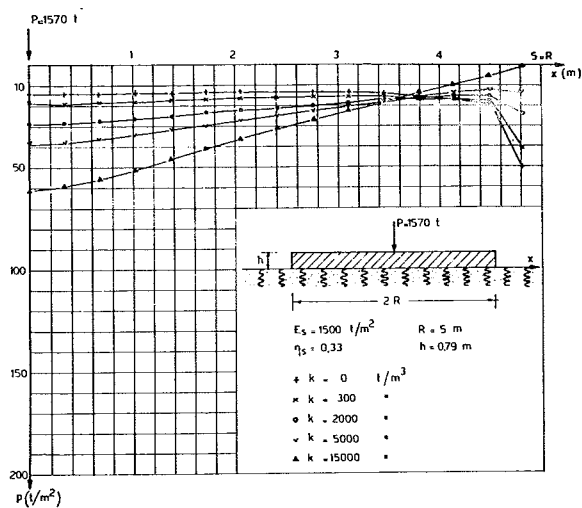


Fig. 11. — Andamento delle reazioni sotto una piastra circolare caricata nel centro al variare del valore di k .

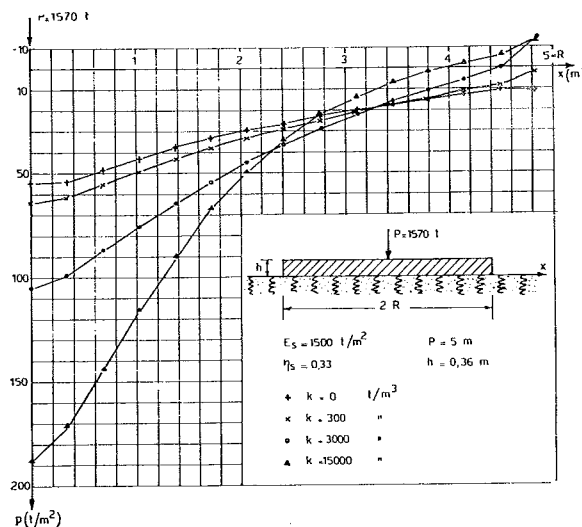


Fig. 12. — Andamento delle reazioni sotto una piastra circolare caricata nel centro al variare del valore di k .

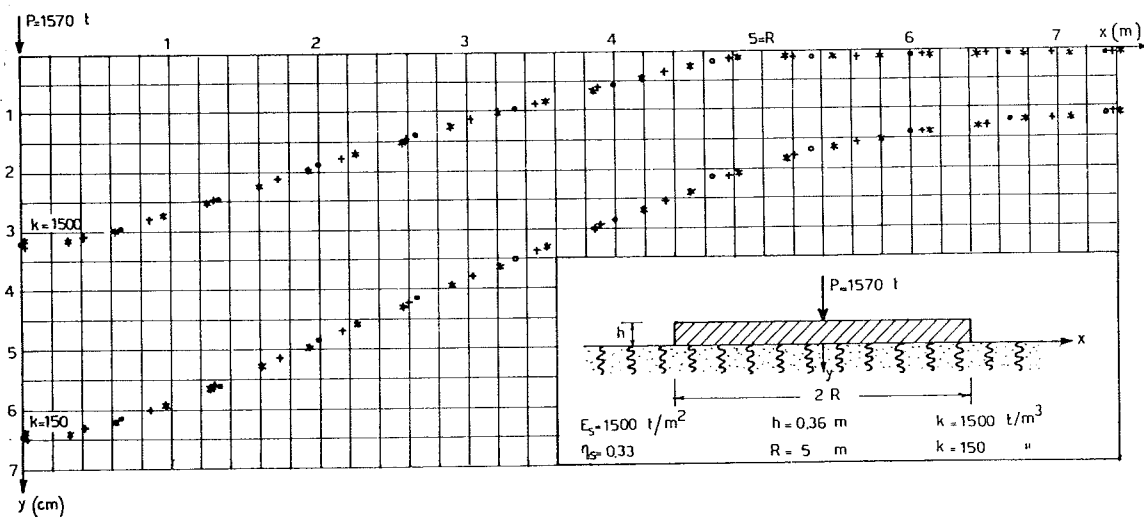


Fig. 10. — Confronto tra gli andamenti del cedimento calcolato con diverse suddivisioni della piastra.

c) Coefficiente di distribuzione

Note le forze X_1^E e X_1^K , si è calcolato, in corrispondenza di ogni concio, il valore del coefficiente

$$\lambda_1 \text{ definito da: } \lambda_1 = \frac{X_1^K}{X_1^E + X_1^K}$$

in considerazione due piastre circolari di differente spessore e sottoposte ad un carico q .

I risultati ottenuti, al variare della distanza radiale $\frac{x}{R}$ e per diversi valori di k , compresi tra $21,4 \text{ t/m}^3$ e 48000 t/m^3 , sono riportati nelle figure 13 e 14.

E' possibile osservare che il coefficiente λ_1 rimane pressoché costante lungo tutto il raggio della piastra, fatta eccezione per i conchi perimetrali, dove esso decresce a causa della concentrazione delle X_1^E che si ha in questa zona, concordemente alla teoria di BOUSSINESQ.

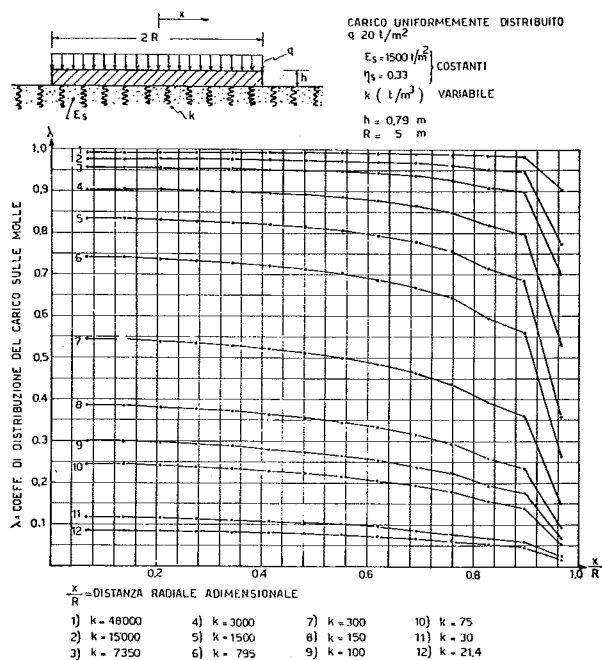


Fig. 13. — Piastra circolare soggetta a carico assialsimmetrico e poggiante su suolo alla REPNIKOV.

d) Andamento dei cedimenti del terreno

Nelle figure 15 e 16 è riportato l'andamento del cedimento della superficie del terreno, sotto e all'esterno dell'impronta della piastra per diversi valori di k . Si è considerato il caso di carico uniformemente ripartito su piastre aventi spessore di $0,23 \text{ m}$ e $0,79 \text{ m}$.

E' possibile osservare che, se si rapporta la « variazione del cedimento », che si ha passando al di fuori della impronta della piastra, con il cedi-

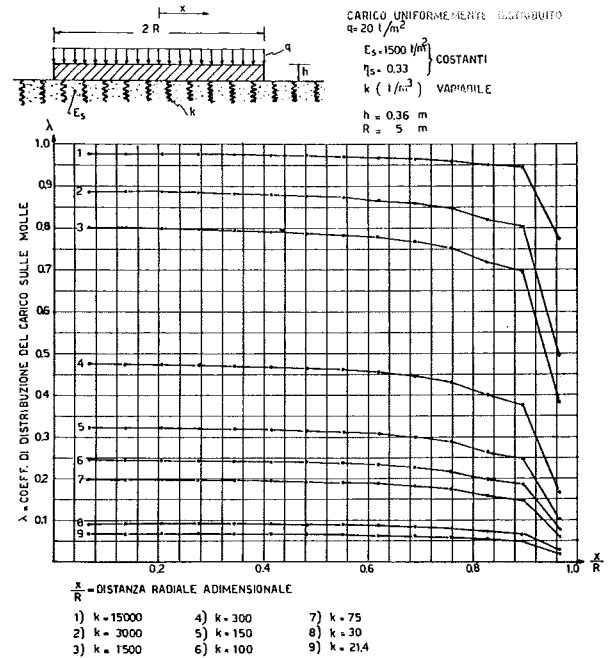


Fig 14 — Piastra circolare soggetta a carico assialsimmetrico e poggiante su suolo alla REPNIKOV.

mento sotto di essa⁽⁸⁾, il rapporto che se ne ottiene cresce al crescere di k . Questo significa che i cedimenti al di fuori della piastra si smorzano più rapidamente per alti valori di k .

Questo fenomeno appare più evidente da quanto illustrato in figura 17, dove si riporta il rapporto

$$\frac{A_r}{A_t} \text{ in funzione di } \beta, \text{ essendo:}$$

$$A_r = \int_0^{X=R} y \, dx$$

e

$$A_t = \int_0^{X=\infty} y \, dx$$

L'andamento di tale rapporto permette di constatare che per valori di β inferiori ad 1 il comportamento del terreno, dal punto di vista considerato, non differisce sostanzialmente da quello di semispazio alla BOUSSINESQ; per valori di β superiori a 100, la deformabilità della superficie del terreno tende a diventare prossima a quella prevedibile in base al modello di WINKLER.

⁽⁸⁾ Si fa riferimento al cedimento calcolato sotto il conchio perimetrale ($i = L$).

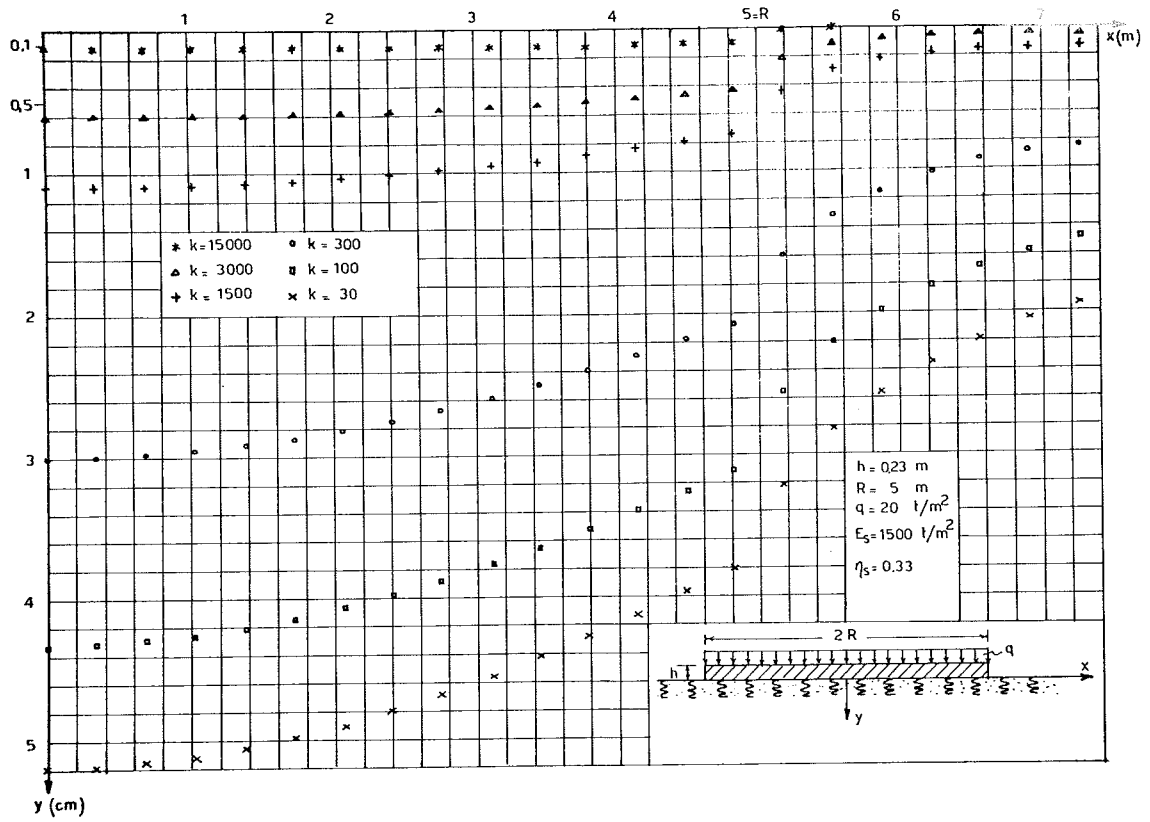


Fig. 15. — Andamento dei cedimenti del terreno al variare del valore di k (t/m^3).

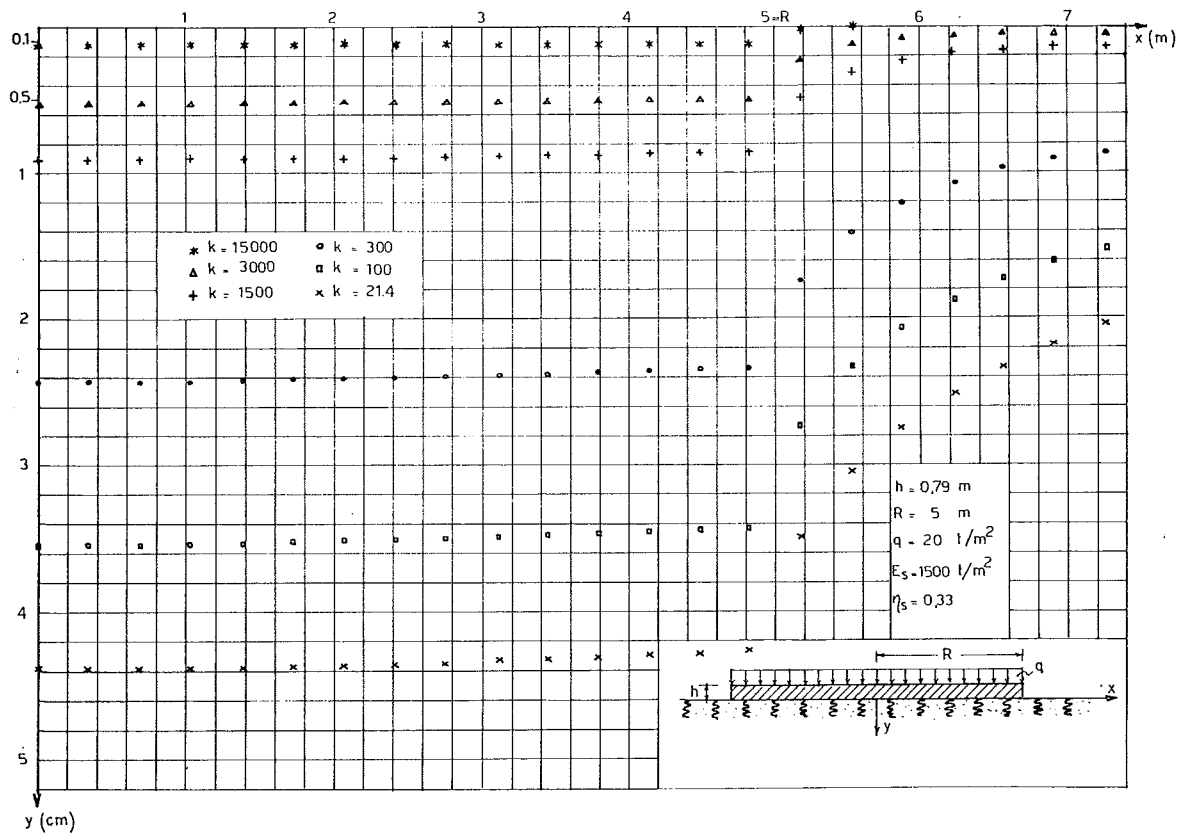


Fig. 16. — Andamento dei cedimenti del terreno al variare del valore di k (t/m^3).

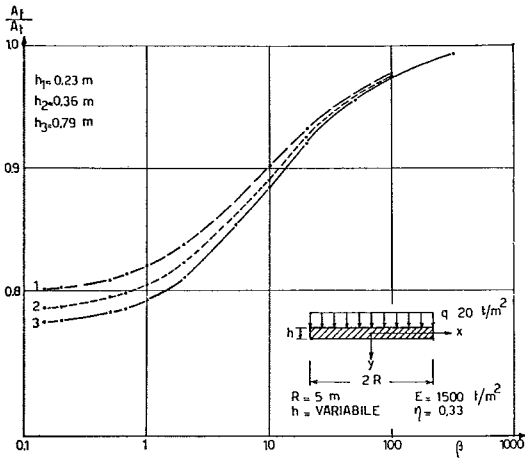


Fig. 17. — Rapporto $\frac{A_r}{A_t}$ in funzione di β per differenti dimensioni della piastra.

e) *Inflessione relativa.*

Nelle figure 18 e 19 è illustrato l'andamento della inflessione relativa δ_r della piastra, per diversi valori del coefficiente β , essendo:

$$\delta_r = \frac{y(x=0) - y(x=R)}{y(x=0)}$$

Si può osservare quanto segue:

1) al crescere del valore di k aumenta δ_r , con-

fermando la progressiva riduzione della rigidità relativa della piastra già notata in b);
 2) tale tendenza, nel caso particolare di carico uniformemente ripartito, non è rispettata per elevati valori di k (°). Questo fenomeno può

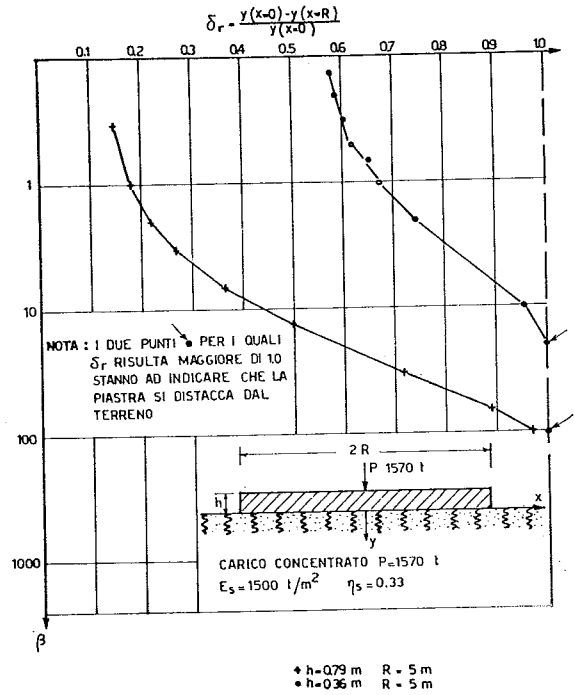


Fig. 19. — $\delta_r = f(\beta)$ per piastre circolari di differenti dimensioni.

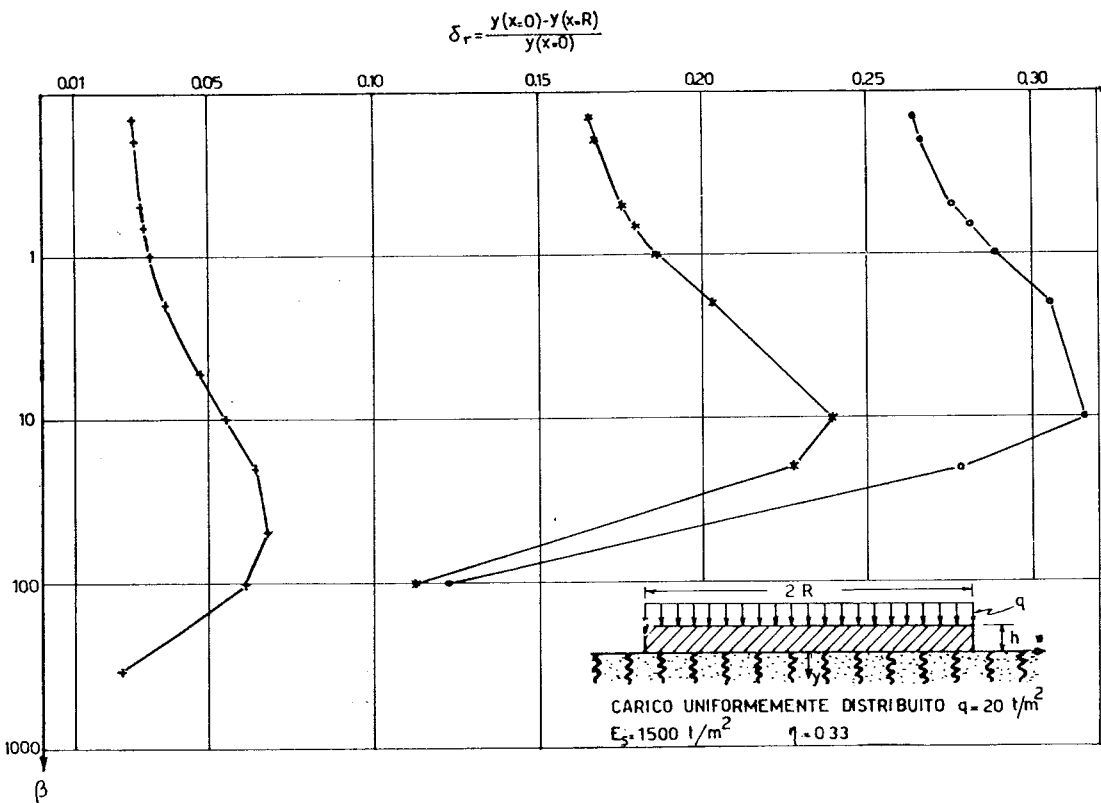


Fig. 18. — $\delta_r = f(\beta)$ per piastre circolari di differenti dimensioni.

(°) Si osservi che al crescere dello spessore della piastra aumenta il valore di β cui corrisponde il valore di δ_r massimo.

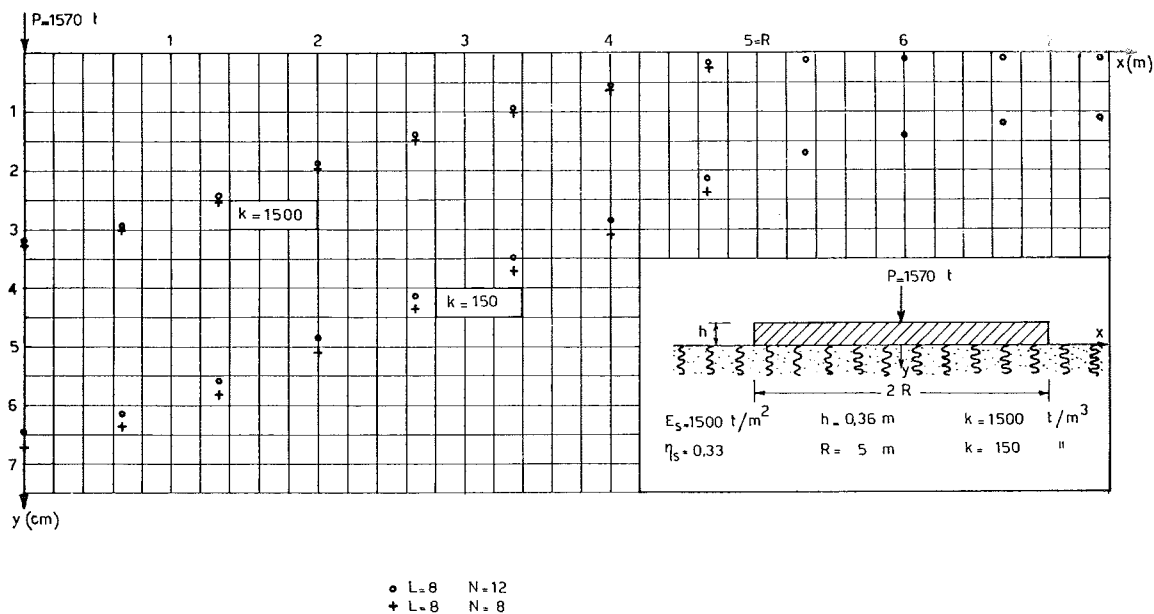


Fig. 20. — Confronto tra gli andamenti del cedimento calcolato con e senza concci esterni all'impronta della piastra.

essere attribuito alla limitazione del modello alla Winkler quando è applicato a piastre soggette a carico uniformemente ripartito.

f) *Influenza dei concci al di fuori della piastra*

In figura 20 sono messi a confronto gli andamenti del cedimento, calcolato con e senza concci, considerati all'esterno dell'impronta della piastra e per due diversi valori di k.

Si osserva che sotto la piastra tali andamenti

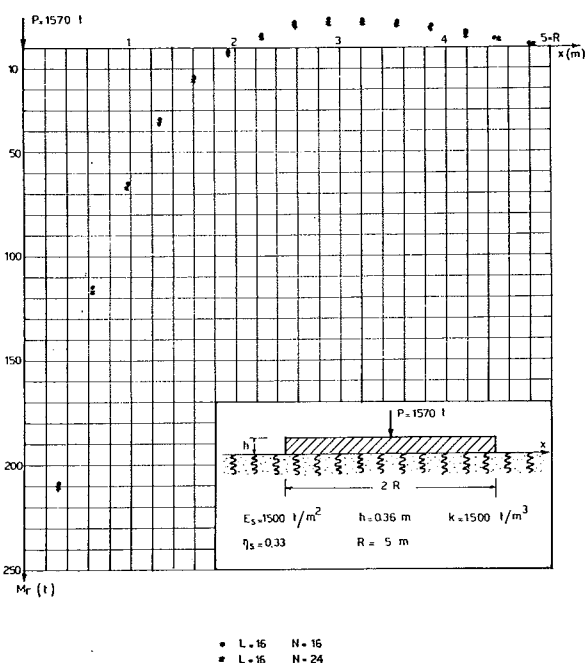


Fig. 21. — Confronto tra le distribuzioni del momento radiale lineare calcolato con e senza concci fuori della impronta della piastra.

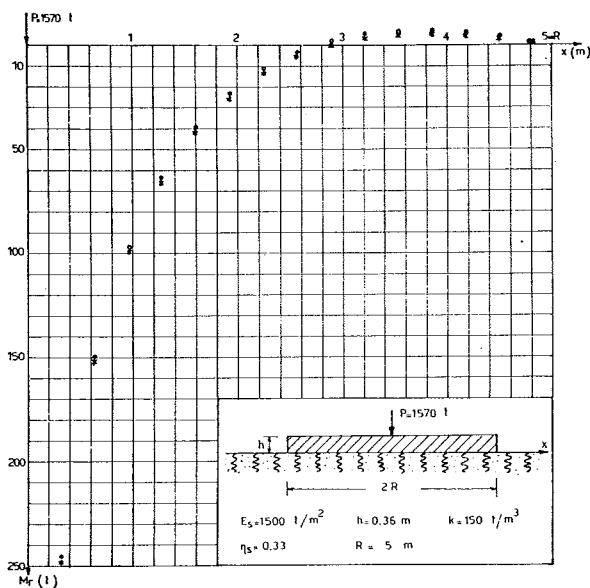


Fig. 22. — Confronto tra le distribuzioni del momento radiale lineare calcolato con e senza concci al di fuori della impronta della piastra. Il significato dei simboli è lo stesso della fig. 21.

sono omotetici tra di loro. Questo fatto ha come immediata conseguenza, come si può constatare dalle figure 21 ÷ 23, che le distribuzioni del momento radiale lineare e di quello tangenziale lineare non sono influenzate dall'impiego o meno dei concci esterni.

g) *Momenti flettenti.*

In figura 24 sono diagrammati i valori del coefficiente adimensionale del massimo momento radiale $M_{r \max}$ in funzione di β , nel caso di piastre

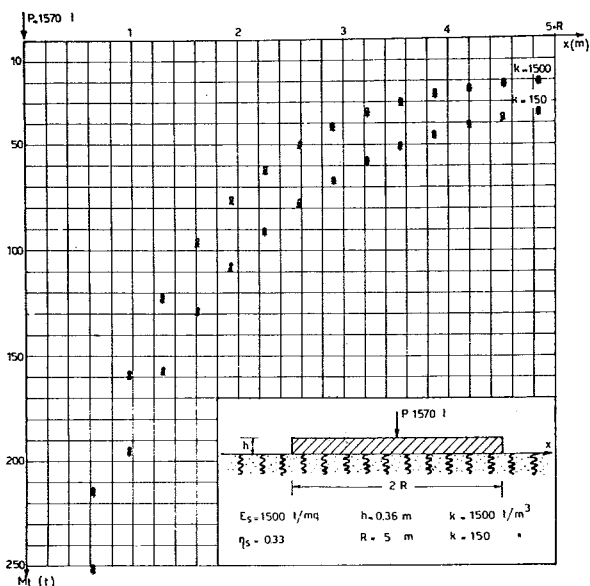


Fig. 23. — Confronto tra le distribuzioni del momento tangenziale lineare calcolato con e senza conci esterni alla impronta della piastra circolare. Il significato dei simboli è lo stesso della fig. 21.

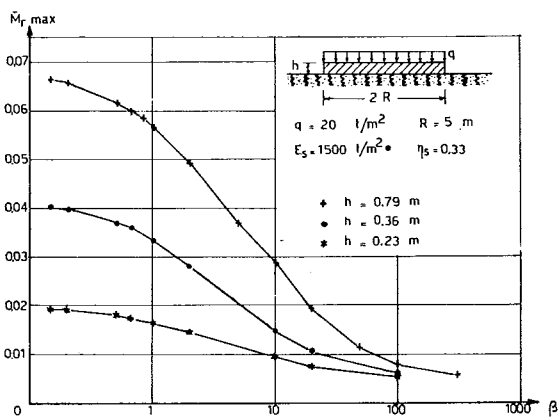


Fig. 24. — $\bar{M}_{r \max} = f(\beta)$ per differenti dimensioni

di tre differenti spessori, soggette ad un carico uniformemente distribuito, essendo:

$$\bar{M}_{r \max} = \frac{M_{r \max}}{R^2 q}$$

Si osserva che $M_{r \max}$ decresce con il crescere di β , indicando così la progressiva riduzione della rigidità relativa della piastra. Per valori di $\beta > 100$ interviene inoltre il già menzionato difetto della schematizzazione alla Winkler, nel caso di strutture soggette a carichi uniformemente distribuiti.

L'andamento dei momenti radiali, calcolati per il caso di carico lineare, applicato ad una distanza $R' = 0,85 R$ dal centro della piastra, è riportato, per diversi valori di k , nella figura 25.

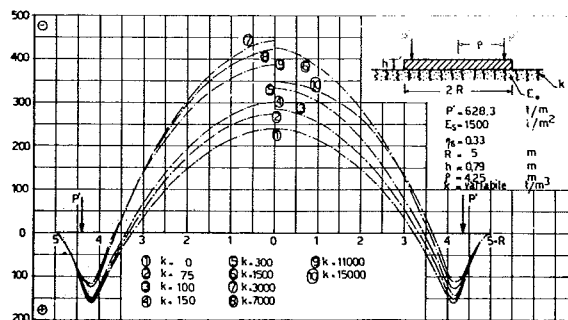


Fig. 25. — Piastra circolare soggetta a carico lineare P' andamento del momento radiale lineare al variare del valore di k .

Si nota che con il crescere del valore di k aumenta il valore del massimo momento flettente negativo in mezzeria. Questo fenomeno è dovuto alla progressiva diminuzione della concentrazione delle reazioni ai bordi che si ha all'aumentare del valore della costante di sottofondo k . Per $k > 3000$ si ha una inversione di tendenza poiché prevale sul fenomeno precedente la pronunciata diminuzione della rigidità flessionale relativa della piastra.

L'andamento del fenomeno descritto sopra può essere colto anche nella figura 26, dove si ana-

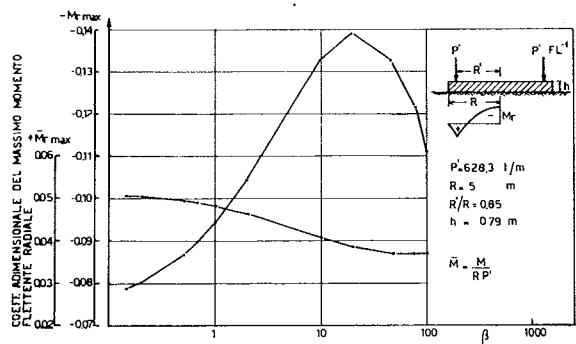


Fig. 26. — Andamento del coefficiente adimensionale del massimo momento flettente radiale n funzione di β .

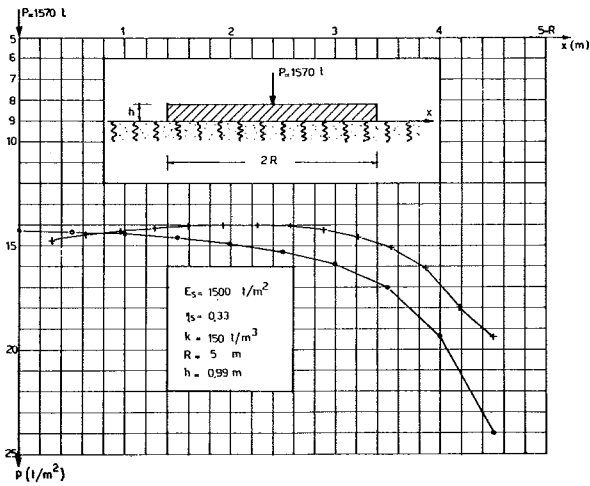
lizza l'andamento del coefficiente adimensionale del momento radiale massimo $\bar{M}_{r \max}$ in funzione di β , essendo:

$$\bar{M}_{r \max} = \frac{M_{r \max}}{R P'}$$

Si osserva infatti che il valore assoluto di $M_{r \max}$ negativo cresce al crescere di β sino ad un valore massimo di 0,14 per $\beta \approx 20$. Oltre tale punto il coefficiente $\bar{M}_{r \max}$ negativo decresce. Questo andamento non si osserva per quanto riguarda il $\bar{M}_{r \max}$ positivo, il quale decresce all'aumentare di β , tendendo al valore 0,037 per $\beta = 50$.

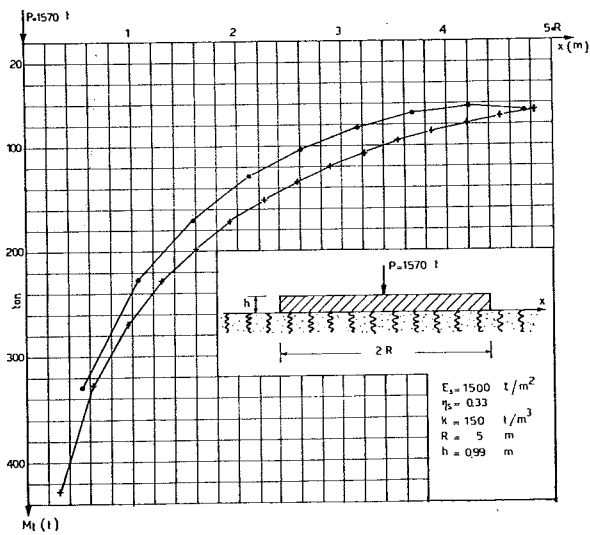
h) Confronto dei risultati ottenuti con quelli della soluzione semplificata di Schultze (1970).

Nelle figure 27 ÷ 29 vengono messi a confronto gli andamenti delle reazioni del terreno, dei momenti radiali e tangenziali, ottenuti con il metodo esposto nel presente lavoro e quelli ricavati ricorrendo al procedimento semplificato proposto da SCHULTZE. Questo confronto conferma l'applicabilità di quel procedimento nel calcolo di interazione tra piastra rigida e suolo alla REPNIKOV valido nel caso di piastre di elevata rigidezza.



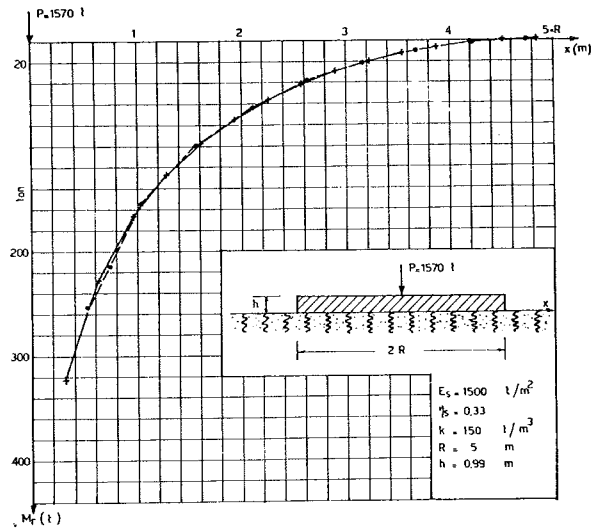
o Metodo di SCHULTZE - + Risultati numerici

Fig. 27. — Piastra circolare di elevata rigidezza poggiante su suolo alla REPNIKOV. Determinazione delle reazioni del terreno.



o Metodo di SCHULTZE - + Risultati numerici

Fig. 28. — Piastra circolare di elevata rigidezza poggiante su suolo alla REPNIKOV. Determinazione del momento tangenziale lineare.



o Metodo di SCHULTZE - + Risultati numerici

Fig. 29. — Piastra circolare di elevata rigidezza poggiante su suolo alla REPNIKOV. Determinazione del momento radiale lineare.

i) Coefficienti adimensionali del cedimento.

Nella figura 30 sono riportati i coefficienti adimensionali $I_R^E(\beta)$ e $I_R^W(\beta)$ che consentono di calcolare i cedimenti nel centro di una piastra circolare soggetta a carico uniformemente distribuito e poggiante su un terreno alla REPNIKOV mediante le seguenti espressioni:

$$W_{max} = \frac{I_R^E \cdot q \cdot R (1 - \eta_s^2)}{E_s} \quad [L]$$

oppure:

$$W_{max} = I_R^W \cdot \frac{q}{k} \quad [L]$$

L'andamento di questi coefficienti in funzione del parametro β permette di osservare quanto segue:

- 1) Per $\beta < 1$ i valori di I_R^E sono molto prossimi

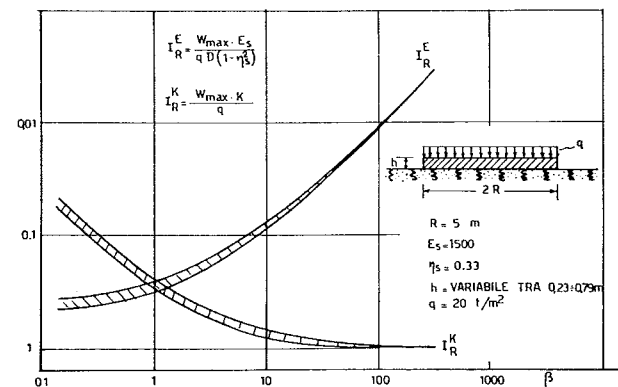


Fig. 30. — Coefficienti adimensionali per il calcolo del cedimento sotto il centro della piastra espressi in funzione di β .

ai coefficienti di influenza ottenuti in base alla teoria di BOUSSINESQ.

- 2) Per $\beta > 20$ il valore di I_R^w diventa prossimo all'unità, indicando che il comportamento del terreno si avvicina a quello del suolo alla WINKLER.
- 3) Tale andamento dei coefficienti di influenza sopra menzionati ed i limiti di β risultano simili all'analogo andamento dei coefficienti $I_K^w(\beta')$ e $I_K^E(\beta')$ ⁽¹⁰⁾, ricavati da BELLONI e JAMIOLKOWSKI [1973] nell'ipotesi di un semispazio eterogeneo avente modulo di compressibilità variabile linearmente con la profondità, in accordo con la (1).

$$^{(10)} \beta' = \frac{E_n D}{E_0}$$

BIBLIOGRAFIA

- BELLONI L., JAMIOLKOWSKI M. (1972) - *Written discussion on the State of the Art Report: « Soil Structure Interaction for Tall Buildings »*. Conference on Planning and Design of Tall Buildings. Lehigh Univ. Bethlehem Pennsylvania, vol. DS.
- BJERRUM L., EGGESTAD A. (1963) - *Interpretation of loading test on sand*. Proc. IIIrd Europ. Conf. on S.M. and F.E. Wiesbaden.
- BOROWICKA H. (1943) - *Die Druckausbreitung im Halbraum bei linear zunehmenden Elastizität modul*. Ingenieur Arch. Band XIV. Heft n. 2, Vien.
- BOUSSINESQ J. (1885) - *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Paris Gauthier-Villard.
- BROWN P. T., GIBSON R. E. (1972) - *Surface settlements of a deep elastic stratum whose modulus increase linearly with depth*. Canadian Geotechnical Journal n. 4.
- GIBSON R. E. (1967) - *Some Results Concerning Displacements and Stresses in a Nonhomogeneous Elastic Half-Space*. Geotechnique, Vol. XVII, n. 4.
- GIBSON R. E., SILLS G. C. (1969) - *On the Loaded Elastic Half-Space with Depth Varying Poisson's Ratio*. Journal of Applied Mathematics and Physics. Vol. 20, Fasc. n. 5.
- GIBSON R. E., SILLS G. C. (1969) - *Some Results Concerning the Plane Deformation of a Nonhomogeneous Elastic Half-Space*. Proc. Roscoe Memorial - Cambridge.
- KLEIN G. K. (1956) - *Studio dell'influenza della eterogeneità e della discontinuità delle deformazioni e delle altre proprietà meccaniche dei terreni sull'interazione tra terreno e fondazione*. Sbornik Trudov Moskovskij Inz. Strait. Inst. n. 14 (in russo).
- KLEIN G. K., DURAJEW A. E. (1971) - *Influenza dell'incremento del modulo di deformazione con la profondità sul calcolo delle travi poggianti sul terreno*. Gidrotechnicheskope Stroitelstro n. 7 (in russo).
- JANBU N. (1963) - *Soil Compressibility as Determined by Oedometer Tests*. Proc. Europ. Conf. S.M.F.E. Vol. 1, Wiesbaden.
- JANBU N. (1967) - *Settlement Calculations Based on the Tangent Modulus Concept*. Lectures Given at Moscow State University.
- REPNIKOV L. N. - *Calcolo delle travi sul suolo avente caratteristiche di deformazione intermedie tra quelle di suolo alla Winkler e semispazio elastico*. Osnovaniya, Fundamenty i Mekanika Gruntov n. 8 (in russo).
- RIVIKIN S. A. (1969) - *Progettazione delle fondazioni con particolare riferimento alla sovrastruttura ed al comportamento anelastico del terreno e del calcestruzzo* (in russo). Osnovaniya Fundamenti i Mekanika Gruntov n. 6.
- SCHULTZE E. (1967) - *Bettungszahl oder Steifenzahl - Festgruft Hirschfeld, Konstruktive Ingenieurbau, Dusseldorf*.
- SCHULTZE E. (1970) - *Die Kombination von Bettungszahl und Steifenzahlverfahren*. Mitteilungen V.G.B., Technische Hochschule, Aachen, Heft n. 48.
- TERZAGHI K., PECK R. (1967) - *Soil Mechanics in Engineering Practice*. J. Wiley & Sons.
- WINKLER E. (1867) - *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. Praga.
- ZARETSKY J. K., TSYTOVICH N. A. (1965) - *Consideration of heterogeneity and Non-linear Deformation of the Base in the Design of Rigid Foundations*. Proc. VI Int. Conf. on S. M. and F. E. Montreal Vol. I.
- ZEMOTSCHKINE B. N., SINICYN A. P. (1962) - *Metodi pratici per il calcolo delle travi e delle piastre poggianti su semispazio elastico*. Gorstroizdat - Mosca (in russo).

SUMMARY

Behavior of circular plates resting on Repnikov's soil.

The problem of a circular plate subjected to an axisymmetrical load distribution is analyzed, assuming that the plate is resting at the surface of a Repnikov's soil. As it is known, such a soil consists (fig. 3) in an elastic half-space reinforced by Winkler - type springs.

The response of such a model to surface loadings is very similar to that of an elastic half-space with a Young modulus linearly increasing with depth; both of them are believed to reproduce the behavior of real soils better than simple Winkler or Boussinesq models.

The interaction between the plate and the soil is stu-

died by means of a discretization procedure suggested by Zemotschkine. Plate deflection, settlement of the soil surface outside of the plate, bending moments, shear stresses and rotations are evaluated for different values of relevant parameters (Young modulus E_s of the half-space; coefficient of subgrade reaction k of the springs; thickness h of the plate). In each case a value of Poisson's ratio η_s of the half space and of plate diameter $2R$ of 0, 33 and 10 m resp. are assumed. Three load conditions, viz. concentrated force at center, uniform load per unit length over a circle at radius $r \leq R$, uniform load per unit surface over the whole plate, are considered. Results obtained are presented in figs. 7 to 30 and are analyzed and discussed.