

Sull'impiego del modello di semispazio eterogeneo negli studi di interazione tra struttura di fondazione e terreno

L. BELLONI *, M. JAMIOLKOWSKI **

SOMMARIO: Nel presente lavoro si prendono in esame i problemi connessi con il calcolo degli spostamenti verticali (W_0) del limite superiore di un semispazio elastico, isotropo, dotato di eterogeneità continua, in virtù della quale il modulo di deformazione varia con la profondità secondo la seguente legge: $E(z) = E_0 + E_n Z$ ($F \cdot L^{-2}$).

Dopo un esame critico delle soluzioni matematiche disponibili viene presentata una soluzione approssimata ottenuta sovrapponendo in parallelo le soluzioni elementari: di BOUSSINESQ [1885] per $E(z) = E_0 = \text{costante}$ e di BOROWICKA [1943] per $E(z) = E_n \cdot z$ seguendo un procedimento sviluppato da KLEIN [1956] e adottato da KLEIN e DURAJEV [1971], nel caso di $\nu = 0,333$. La soluzione ottenuta dagli scriventi [vedi la (17)] è valida per i valori di $0 \leq \nu \leq 0,4$; per $\nu > 0,4$ può essere utile la soluzione approssimata della (21).

Ne consegue uno studio parametrico dei coefficienti di influenza I_K^w e I_K^e che permettono di calcolare il cedimento al centro di fondazioni rettangolari flessibili, poggianti sul limite superiore di un semispazio eterogeneo avente il modulo variabile con la profondità in accordo con la (1).

Il confronto dei valori di I_K^e e I_K^w ottenuti con quelli dati da BROWN e GIBSON [1972] e quelli riportati da CARRIER e CHRISTIAN [1972, 1973] dimostrano la validità della soluzione approssimata adottata nel campo dei valori di $0 \leq \nu \leq 0,4$. Infine l'esame dell'andamento del cedimento della superficie del semispazio considerato in funzione dell'indice di eterogeneità del semispazio stesso β [vedi la (18)] permette di trarre interessanti conclusioni circa i limiti d'applicabilità dei modelli del suolo alla WINKLER e del semispazio alla BOUSSINESQ negli studi d'interazione tra terreno e fondazione.

Introduzione

In questi ultimi anni si è avuto un notevole aumento di interesse per i problemi d'interazione tra struttura e terreno.

Il problema è uno dei più complessi tra quelli di cui si occupa l'ingegneria delle fondazioni. Perciò, anche se negli ultimi anni la disponibilità dei calcolatori elettronici ed il conseguente sviluppo dei metodi di calcolo numerico ha permesso sensibili passi in avanti nella soluzione di questo problema, molto rimane ancora da fare, particolarmente per quanto riguarda:

- la scelta di un modello fisico matematico, che descriva in modo più appropriato la deformabilità dei terreni di fondazione;
- la determinazione sperimentale dei parametri geotecnici, che caratterizzano questo modello;
- lo sviluppo di procedimenti che permettano di tener conto della variazione nel tempo delle caratteristiche di deformabilità, sia del terreno

sia dei materiali costituenti la struttura di fondazione.

In questa sede gli autori hanno rivolto la loro attenzione al primo dei tre aspetti del problema sopra menzionato, considerando cioè la convenienza di schematizzare il terreno come un semispazio elastico-isotropo-eterogeneo, avente il modulo di deformazione variabile con la profondità secondo la seguente legge:

$$E(z) = E_0 + E_n \cdot z \quad (F \cdot L^{-2}) \quad (1)$$

essendo:

$E(z)$ = modulo di deformazione del terreno, alla profondità « z » sotto il limite superiore del semispazio; ($F \cdot L^{-2}$)

E_0 = valore del modulo di deformazione in corrispondenza della superficie del terreno ($z = 0$); ($F \cdot L^{-2}$)

E_n = gradiente della legge del modulo ($F \cdot L^{-3}$)

Il coefficiente di Poisson ν è invece costante ed indipendente dalla profondità⁽¹⁾.

Nella fig. 1 è rappresentato il semispazio eterogeneo ed il sistema cartesiano di riferimento adottato.

(1) In tutte le soluzioni di seguito considerate si è supposto $\nu = \text{costante}$ al variare di z .

* Dott. Ing. Luigi BELLONI, *Studio Geotecnico Italiano*, Milano.

** Dott. Ing. Michele JAMIOLKOWSKI, *Istituto di Scienze delle Costruzioni*, Politecnico di Torino.

congruenza all'interno del continuo, deve sussistere la seguente relazione tra l'esponente m ed il coefficiente di Poisson ν :

$$\nu = \frac{1}{2 + m} \quad (4)$$

In base a tale relazione, nel caso di $\nu = 0,33$ la soluzione di KLEIN coincide con quella di BOROWICKA ($m = 1$); sempre per la (4), nel caso di $\nu = 0,5$ la soluzione di Klein coincide con quella di Boussinesq ($m = 0$).

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti alle formule elementari di BOROWICKA-KLEIN, è possibile calcolare il cedimento del limite superiore di un semispazio eterogeneo, soggetto ad un carico uniformemente ripartito (q) agente su un'area finita (A):

Nel caso di un rettangolo e per $m = 1$:

$$W(z = 0) = \frac{\gamma}{E_n} \quad (5)$$

$$\cdot \int_{x-c/2}^{x+c/2} \int_{y-b/2}^{y+b/2} \frac{q \cdot d\xi \cdot d\eta}{\xi^2 + \eta^2} \quad [L]$$

Nel caso di un cerchio e per $m = 1$:

$$W(z = 0) = \frac{2\gamma}{E_n} \quad (6)$$

$$\cdot \int_0^\pi \int_0^R \frac{q \cdot \rho \, d\rho \, d\phi}{(x^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos \phi)} \quad [L]$$

essendo:

b = lato del rettangolo parallelo all'asse delle y [L]

c = lato del rettangolo parallelo all'asse delle x [L]

R = raggio del cerchio [L]

W = cedimento [L]

γ = coefficiente adimensionale, dipendente solo dal coefficiente di Poisson ν , i cui valori sono riportati nell'appendice 2.

Per gli altri simboli vedi le figure 2 e 3.

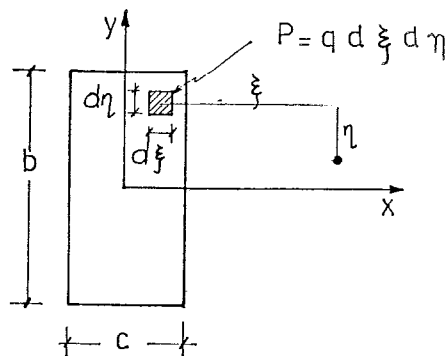


Fig. 2. — Area rettangolare uniformemente caricata.

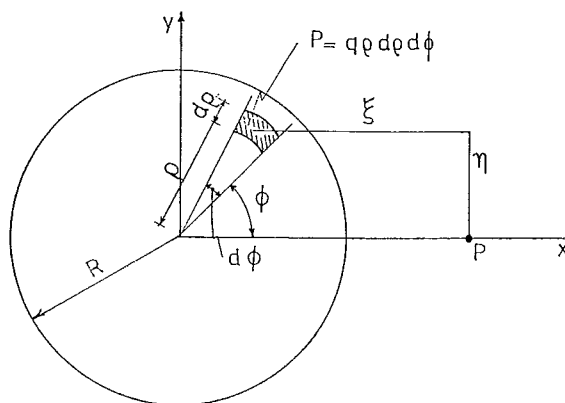


Fig. 3. — Area circolare uniformemente caricata .

Integrando la (5) si ottiene, per $\nu \neq 0,5$:

$$W(z = 0) \neq \infty \quad \text{per } x > |b/2| \quad (5 a)$$

$$W(z = 0) = \infty \quad \text{per } x \leq |b/2| \quad (5 b)$$

Procedendo analogamente per la (6) si ottiene:

$$W(z = 0) \neq \infty \quad \text{per } x \neq 0 \quad (6 a)$$

$$W(z = 0) = \infty \quad \text{per } x = 0 \quad (6 b)$$

Nel caso di $\nu = 0,5$ la (5) e la (6), analogamente a quanto già osservato per la forza concentrata, forniscono $W(x, y, 0) = 0$.

Questo consegue dal fatto che, nella ricerca di tali espressioni, si è applicato semplicemente il principio di sovrapposizione degli effetti alla formula elementare per il calcolo degli spostamenti, valida nel caso di una forza concentrata P .

Una soluzione matematicamente completa del semispazio eterogeneo uniformemente caricato del tipo:

$$E_x = E_n \cdot z \quad [FL^{-2}] \quad (2)$$

con coefficiente di Poisson costante ed indipendente da z è stata ottenuta recentemente da GIBSON [1967], GIBSON e SILLS [1971] ed AWAJOBI e GIBSON [1973].

Questi autori hanno presentato le soluzioni valide per un carico uniformemente distribuito q , agente su un'area nastriforme indefinita di larghezza $2b$ ⁽²⁾, vedi fig. 4, pervenendo alla seguente espressione:

$$W(x, z) = \frac{q(1+\nu)}{2\pi E_n(1-\nu)} \left[\tan^{-1} \frac{x+b}{z} - \tan^{-1} \frac{x-b}{z} \right] + \quad (7)$$

$$+ \frac{q(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E_n(1-\nu)} \left\{ \log \left[1 + \left(\frac{x+b}{z} \right)^2 \right] \tan^{-1} \frac{x+b}{z} - \log \left[1 + \left(\frac{x-b}{z} \right)^2 \right] \tan^{-1} \frac{x-b}{z} \right\}$$

Ponendo nella (7) $z = 0$ si osserva quanto segue:

— Nel caso di $\nu = 0,5$ il cedimento del limite superiore del semispazio risulta uguale a:

$$\text{per } x \leq b; \quad W(x, 0) = 1,5 \frac{q}{E_n} \quad (7a)$$

$$\text{per } x > b; \quad W(x, 0) = 0 \quad (7b)$$

— Nel caso di $\nu < 0,5$ il cedimento della superficie risulta uguale a:

$$\text{per } x \leq b; \quad W(x, 0) = \infty \quad (7c)$$

$$\text{per } x > b; \quad W(x, 0) = \frac{q(1-2\nu)(1+\nu)}{2E_n(1-\nu)} \log \frac{x+b}{x-b} \quad (7d)$$

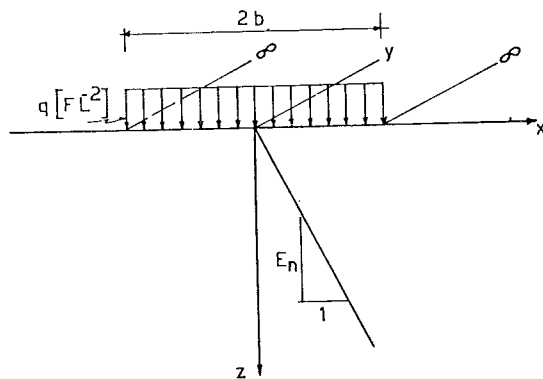


Fig. 4. — Striscia indefinita di larghezza $2b$ soggetta alla pressione uniformemente ripartita « q ».

La soluzione presentata da AWAJABI e GIBSON [1973] per il caso di una superficie di carico avente forma circolare porta a risultati sostanzialmente simili a quelli ottenuti per il caso di deformazione piana. Infatti questi autori ottengono:

— Nel caso di $\nu = 0,5$ il cedimento del limite superiore del semispazio risulta uguale a:

$$\text{per } r \leq R; \quad W(r, 0) = 1,5 \frac{q}{E_n} \quad (8)$$

$$\text{per } r > R; \quad W(r, 0) = 0 \quad (8a)$$

— Nel caso di $\nu < 0,5$ si ottiene:

$$\text{per } r \leq R; \quad W(r, 0) = \infty \quad (8b)$$

per $r > R$;

$$W(r, 0) = \frac{q(1+\nu)}{2E_n} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \log \frac{r^2}{r^2 - R^2}$$

(2) Condizioni di deformazione piana.

essendo:

R = raggio dell'area di carico
 r = coordinata radiale.

I risultati che si ottengono nel valutare il cedimento verticale della superficie di un semispazio eterogeneo avente $E_0 = 0$ attraverso le formule date da GIBSON *et al.* e da BOROWICKA-KLEIN, permettono le seguenti considerazioni:

1. - Per $\nu < 0,5$ le soluzioni proposte da GIBSON *et al.* portano a risultati del tutto simili a quelli ricavabili dalle espressioni di BOROWICKA-KLEIN, ottenute con il procedimento di sovrapposizione degli effetti per un'area caricata, vedi la (5) e la (6), cioè indicano cedimento infinito sotto l'area di carico e finito al di fuori di essa. Questo risultato è dovuto al fatto che per $z \rightarrow 0$ $E \rightarrow 0$, cioè in prossimità della superficie la compressibilità del terreno tende all'infinito.

2. - Nel caso di $\nu = 0,5$ il comportamento del semispazio eterogeneo è correttamente definito dalla soluzione di GIBSON. Pertanto esso risulta

coincidente con quello di un letto di molle alla WINKLER⁽³⁾, essendo costante il cedimento sotto l'area caricata e nullo al di fuori di essa.

Avendo constatato questo, sia per l'area di carico nastriforme sia per quella circolare, GIBSON *et al.* ritengono lecito supporre, dal momento che è sempre valido il principio di sovrapposizione degli effetti, che tale comportamento sia indipendente dalla geometria dell'area caricata.

3. - Nel caso di $\nu = 0,5$ la soluzione di BOROWICKA ricavata mediante la sovrapposizione degli effetti, applicata direttamente a w , porta a valori di w stesso diversi da quelli ottenuti da GIBSON.

Tuttavia, come si dimostra nell'appendice A, anche la soluzione di BOROWICKA, se convenientemente usata, giunge allo stesso risultato di Gibson nella ricerca del cedimento sotto un'area caricata.

Quindi le due soluzioni, BOROWICKA e GIBSON, conducono agli stessi risultati, in termini di sforzi e deformazioni, indipendentemente dal valore di ν .

4. - Le soluzioni di GIBSON *et al.* e di BOROWICKA-KLEIN possono comunque essere utilizzate negli studi d'interazione tra strutture e terreno, in quanto è possibile definire il cedimento *relativo* della superficie del semispazio sotto l'area di carico. Così per esempio, nel caso della soluzione di GIBSON [1967] e GIBSON e AWAJOBI [1973]:

— Per il caso di deformazione piana; $x < b$

$$W(x, 0) - W(0, 0) = \frac{3q \cdot (1 - 2\nu)}{4E_n(1 - \nu)} \log\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \quad (9)$$

— Per il caso di carico assialsimmetrico: $r < R$

$$W(0, 0) - W(r, 0) = \frac{3q}{8E_n} \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) \quad (10)$$

Ovviamente, disponendo solo dell'assestamento relativo sotto l'area di carico, è invece preclusa la possibilità di valutare, nel calcolo d'interazione, l'influenza dovuta alle fondazioni vicine.

(3) Questo singolare comportamento è dovuto al fatto che l'incompressibilità del terreno, $\nu = 0,5$, determina alla superficie del semispazio uno stato di sforzo isotropo, come nel problema di Boussinesq. L'assenza perciò degli sforzi tangenziali elimina l'effetto della compressibilità infinita ($E = 0$) a $z = 0$.

Va rilevato che le soluzioni date per il semispazio eterogeneo descritto dalla (2), anche se di grande interesse teorico, non trovano applicazione pratica, in quanto in realtà non si incontrano terreni di fondazione aventi il modulo di deformazione nullo in superficie.

Per il semispazio di formula (1) GIBSON e SILLS [1971], AWAJOBI e GIBSON [1973] e GIBSON e BROWN [1973] hanno recentemente fornito le espressioni integrali per il problema piano e per l'area circolare, in termini di sforzi e spostamenti; le corrispondenti espressioni per W sono però così complesse matematicamente, da renderle, almeno per adesso, di assai difficile uso nella risoluzione di problemi pratici.

Stando così le cose, gli autori hanno ritenuto di studiare la deformabilità del limite superiore del semispazio eterogeneo, rappresentato dalla espressione:

$$E(z) = E_0 + E_n z \quad (11)$$

facendo riferimento alla soluzione approssimata proposta da KLEIN e DURAJEV [1971].

Nel paragrafo seguente è illustrato appunto il modello fisico matematico proposto da KLEIN e DURAJEV.

Soluzione adottata

Per il semispazio eterogeneo avente il modulo di deformazione variabile con la profondità in accordo con la (11) KLEIN [1956] ha proposto una soluzione approssimata basata sulle seguenti ipotesi:

1) Si considerano agenti in « parallelo » i due modelli di semispazio isotropo noti: il primo avente E_0 e ν_0 costanti con la profondità, ed il secondo avente $E(z) = E_n z$, in accordo con la (2) e $\nu = \nu_0$, costante con la profondità.

2) In questo modo una forza qualsiasi P agente sulla superficie di tale semispazio, vedi fig. 5, viene sopportata per la quota λP (4) dal semispazio alla BOUSSINESQ, e per la quota $(1 - \lambda) P$ dal semispazio eterogeneo $E(z) = E_n z$.

La soluzione di KLEIN, valida solo per $\nu = \frac{1}{3}$,

è stata estesa a tutti i valori del coefficiente di Poisson, utilizzando la soluzione data da BOROWICKA [1943].

In queste condizioni la forza concentrata P (vedi fig. 5), agente sul limite superiore di un semi-

(4) $0 \leq \lambda \leq 1$, coefficiente di ripartizione.

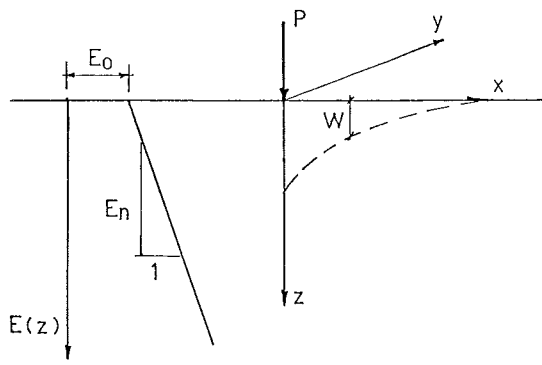


Fig. 5

Fig. 5. — Forza concentrata P agente sul limite superiore del semispazio eterogeneo.

spazio eterogeneo, produce uno spostamento di tale limite, che può essere ricavato separatamente dalle due seguenti espressioni:

— con riferimento al modello di semispazio alla BOUSSINESQ ($E_x = E_0 = \text{costante}$)

$$W_{E_0}(x, y, 0) = \frac{P(1 - \nu^2) \cdot \lambda}{\pi \cdot E_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (12)$$

— con riferimento al modello di semispazio alla BOROWICKA ($E_0 = 0, E_x = E_n z$)

$$W_{E_n}(x, y, 0) = \frac{\gamma \cdot P(1 - \lambda)}{E_n(x^2 + y^2)} \quad (13)$$

Imponendo la condizione di congruenza tra i due cedimenti ($W_{E_0} = W_{E_n}$), si ottiene:

$$\frac{\lambda P(1 - \nu^2)}{\pi E_0 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(1 - \lambda) \gamma P}{E_n(x^2 + y^2)} \quad (14)$$

Risolviendo la (14) rispetto al parametro di distribuzione del carico λ si ricava:

$$\lambda = \frac{\gamma \pi E_0}{(1 - \nu^2) E_n \sqrt{x^2 + y^2} + \pi \gamma E_0} \quad (15)$$

e sostituendo in una delle formule, si ottiene:

$$W(x, y, 0) = \frac{P}{\frac{\pi \cdot E_0}{1 - \nu^2} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\pi E_n}{\gamma} (x^2 + y^2)} \quad (16)$$

La formula (16) perde di significato nel caso in cui si abbia simultaneamente $\nu = 0,5$ ed $E_n \neq 0$,

in quanto fornirebbe $W(x, y, 0) = 0$, mentre la parte di semispazio alla BOUSSINESQ ($E_x = E_0$) cede anche con $\nu = 0,5$.

Il risultato anomalo è dovuto al fatto che il semispazio $E = E_n z$ per $\nu = 0,5$ ha $\gamma = 0$.

Dalla (16), utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ottiene il cedimento del limite superiore del semispazio quando esso è soggetto ad una pressione uniformemente ripartita q agente su un'area finita di forma qualsiasi.

Nel presente lavoro si prende in esame l'andamento della funzione $W(x, y, 0)$ per il caso di un'area di carico rettangolare flessibile.

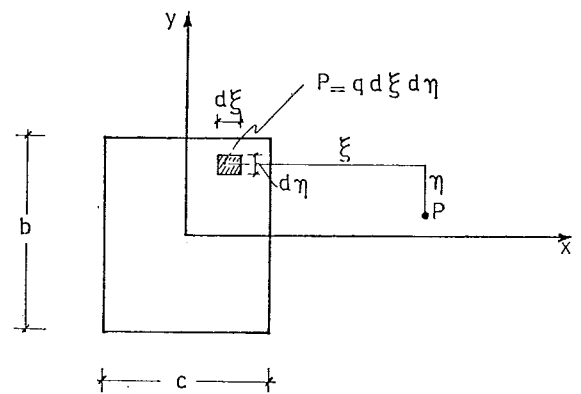


Fig. 6. — Area rettangolare uniformemente caricata.

Con riferimento alla fig. 6 nel punto $M(x, y)$ si ha:

$$W(x, y, 0) = \int_{x-c/2}^{x+c/2} \int_{y-b/2}^{y+b/2} \left(\frac{1}{\pi \gamma E_0} \cdot \frac{\gamma q d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \pi E_n (\xi^2 + \eta^2)}} \right) \quad (17)$$

Si definisce il grado di eterogeneità del semispazio con il parametro β , ricavabile dalla seguente espressione:

$$\beta = \frac{E_0}{E_n c} \quad (18)$$

Si osserva che il cedimento calcolato con la (17) tende ai valori di BOUSSINESQ per $\beta \rightarrow \infty$, a quelli di BOROWICKA per $\beta \rightarrow 0$.

Nel caso $\nu \neq 0,5$ la singolarità che si incontra per $\beta \rightarrow 0$, che comporta $W(x, y, 0) = \infty$ per $x \leq [c/2]$, non rappresenta una limitazione nell'uso della (17) in quanto priva di significato fisico.

Nel caso di $\nu = 0,5$ la singolarità che si incontra nell'uso della (17), $\gamma = 0$, può essere rimossa riferendosi direttamente alle aree caricate, invece di risalire al loro cedimento attraverso la soluzione elementare di forza concentrata.

Questa approssimazione vale per il cedimento al centro; nel caso dell'area rettangolare $b \times c$ si ha infatti, considerando il caso del semispazio alla BOUSSINESQ:

$$W(0,0,0) = \frac{3 \lambda q c}{4 E_0} I_B \quad (19)$$

in cui I_B è un coefficiente di forma che dipende da b/c .

Per il cedimento del semispazio eterogeneo $E = E_n z$ si ha invece:

$$W(0,0,0) = \frac{q(1-\lambda)}{E_n} \quad (20)$$

Imponendo la congruenza, si ricava λ e quindi $W(0,0,0)$:

$$W(0,0,0) = 1,5 q I_B \cdot c \cdot \frac{1}{c I_B E_n + 2 E_0} \quad (21)$$

Analisi dei risultati ottenuti

L'integrale della formula (17) è stato valutato numericamente, per diversi valori di b/c , in funzione del parametro β , prima definito, e del coefficiente di Poisson ν , variabile da 0 a 0,4.

A tale scopo si è fatto ricorso ad un programma di calcolo che utilizza l'elaboratore IBM 360/50.

Il cedimento W è stato calcolato al centro dell'area rettangolare, cioè per $x = y = 0$.

Nel caso di $\nu = 0,5$ invece, il cedimento $w(0,0,0)$ è stato calcolato facendo uso della formula approssimata (21).

I risultati di questi calcoli sono stati espressi in funzione di β e di due coefficienti adimensionali, definiti dalle seguenti espressioni:

$$I_K^E = \frac{E_0 W_c}{q c} \quad (22)$$

$$I_K^W = \frac{E_n W_c}{q} \quad (23)$$

Tali coefficienti sono legati dalla relazione:

$$\frac{I_K^E}{I_K^W} = \beta$$

essendo:

W_c = cedimento al centro dell'area rettangolare $b \times c$ [L]

q = pressione uniformemente distribuita su tale area [FL⁻²]

c = lato minore della fondazione [L]

$I_K^E \cdot I_K^W$ = coefficienti di forma, dipendenti da $\nu, \beta, b/c$ [—]

Nelle figure 7, 8, 9 è riportato l'andamento di I_K^E in funzione di β , per $b/c = 1, 2, 5$ e per $\nu = 0; 0,25; 0,33; 0,4; 0,5$.

Come si può constatare, per $\beta \rightarrow \infty$ I_K^E tende ai valori del semispazio di Boussinesq (I_B); già per $\beta = 10$ la differenza tra I_K^E e I_B è, dal punto di vista applicativo, trascurabile, come si può vedere dalla seguente tabella:

TABELLA 1

Confronto tra I_B di Boussinesq e I_K^E , per $\beta = 10$ e nel caso di $\nu = 0; 0,33; 0,4$

b	$\nu = 0$		$\nu = 0,33$		$\nu = 0,5$	
	I_K^E	I_B	I_K^E	I_B	I_K^E	I_B
1	1,05	1,12	0,93	1	0,795	0,84
2	1,42	1,53	1,23	1,36	1,07	1,15
5	1,85	2,10	1,6	1,87	1,42	1,57

Dalla fig. 9 si vede come l'influenza della geometria dell'area caricata sul cedimento diminuisce con il diminuire di β .

Dalle figg. 7 e 8 si vede invece come l'influenza del coefficiente di Poisson ν sul cedimento aumenta con il diminuire di β .

Nelle figg. 10, 11, 12 è riportato l'andamento di I_K^W in funzione di β , per $b/c = 1, 2, 5$ e per $\nu = 0 - 0,25 - 0,33 - 0,4 - 0,5$. Come si vede, diminuendo β diminuisce su I_K^W l'influenza della geometria dell'area caricata, mentre aumenta la influenza del coefficiente di Poisson ν . Questo concorda con quanto discusso circa il comportamento della superficie del semispazio nel caso di $\beta \rightarrow 0$, cioè quando il semispazio si riduce a $E(z) = E_n z$.

Il valore di I_K^W per $\beta \rightarrow 0$ nel caso di $\nu = 0,5$, tende al valore 1,5, mentre per gli altri valori di ν tende ad infinito, in quanto w_c in questo caso tende ad infinito.

Il risultato interessante è che già per $\beta < 0,01$ l'influenza della geometria dell'area caricata è modesta sul valore di I_K^W , e quindi sul cedimento, come si vede dalla fig. 12.

Considerando che i valori di β compresi tra 10 e 0,01 rappresentano il campo praticamente possibile per l'indice di eterogeneità del semispazio, si può anticipare, come conclusione parziale, che in pratica, per $\beta < 0,01$ e per aree di carico geometricamente simili, il cedimento al centro può essere definito da un unico coefficiente I_K^W .

Nelle figure 13, 14, 15, 16 i risultati ottenuti per $b/c = 1$ mediante la (17) per $\nu = 0; 0,25;$

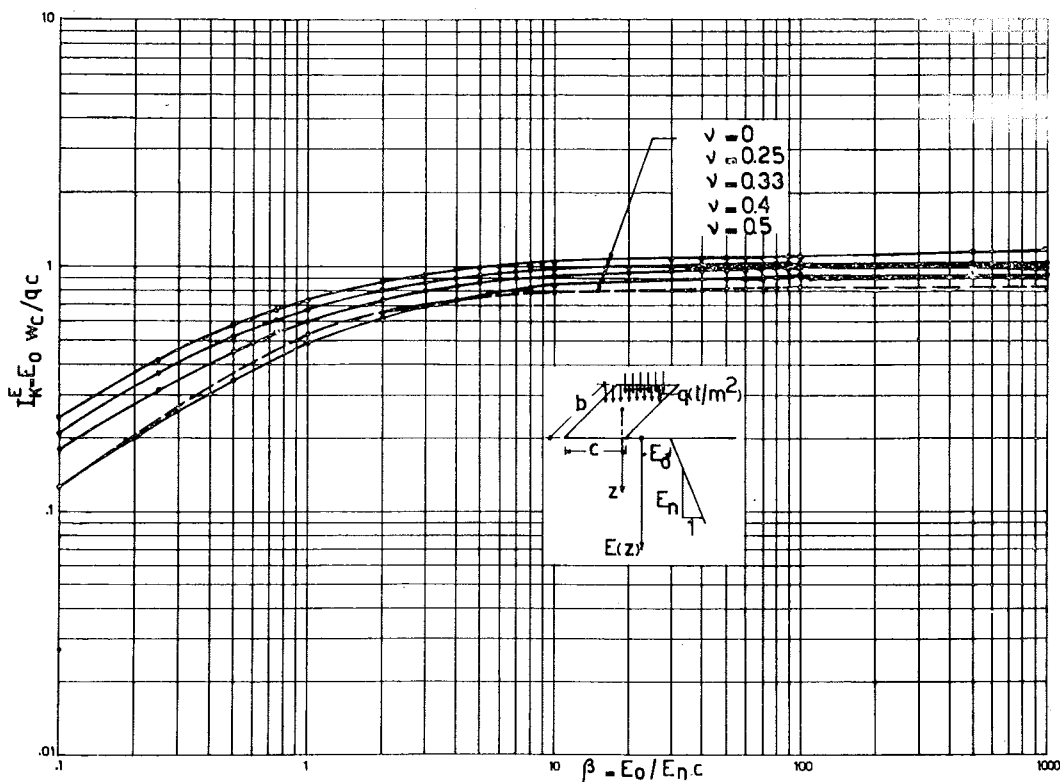


Fig. 7. — I_K^E in funzione di β per $\alpha = b/c = 1$ e per $\nu = 0; 0.25; 0.33; 0.4; 0.5$.

0,33; 0,4 sono confrontati con i risultati ottenuti da:

- GIBSON e BROWN, per un'area circolare flessibile, attraverso una soluzione matematica rigorosa del problema⁽⁵⁾;
- da CHRISTIAN e CARRIER, per un'area circolare rigida, attraverso una soluzione numerica, precisamente usando il metodo degli elementi finiti.

Il primo risultato che consegue da questo confronto è che risulta soddisfacente, limitatamente al calcolo dei cedimenti, l'impiego della (17).

Dal confronto con i dati di GIBSON e BROWN (vedi figg. 13 e 14) e considerando che il rapporto I_K^E quadrato / I_K^E cerchio (o I_K^w quadrato / I_K^w cerchio) per uno stesso valore di ν deve variare tra i seguenti limiti:

$$\frac{I_K^E \text{ quadrato}}{I_K^E \text{ cerchio}} = \begin{cases} 1,12 & \text{per } \beta \rightarrow \infty \\ 1 & \text{per } \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

si deduce quanto segue:

- per $\beta > 1$ il rapporto tra i corrispondenti I_K^E risulta intorno ad 1,12

⁽⁵⁾ I dati di Gibson e Brown sono stati « letti » dal grafico riportato nella memoria di questi autori; pertanto il loro valore può essere affetto da un comprensibile errore.

- per $1 > \beta > 0,05$ il rapporto tra i corrispondenti I_K^E risulta compreso tra 1,2 e 1.
- per $\beta < 0,05$ il rapporto assume valori inferiori ad 1, indicando che la soluzione per il quadrato è errata per difetto. Questo è dovuto all'approssimazione numerica insita nel metodo di calcolo adottato per la (17). Infatti il procedimento di calcolo adottato si è mostrato rapidamente convergente per $\beta > 0,05$, ma lentamente convergente per $\beta < 0,05$.
- si può ritenere comunque che per valori di $\beta < 0,05$ il rapporto suddetto valga praticamente 1.

Per il confronto con i dati di CHRISTIAN e CARRIER bisogna considerare che il rapporto I_K^E quadrato / I_K^E cerchio rigido (o $I_K^w q$ / $I_K^w cr$) per uno stesso valore di ν , varia tra i seguenti limiti:

$$\frac{I_K^E \text{ quadrato}}{I_K^E \text{ cerchio rigido}} = \begin{cases} 1,27 & \text{per } \beta \rightarrow \infty \\ 1 & \text{per } \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

In questo caso, inoltre, i valori di I_K^E , per cerchio rigido, calcolati con il metodo degli elementi finiti, sono approssimati per difetto del 12% [CHRISTIAN e CARRIER, 1972] rispetto a quelli teorici di Boussinesq, in quanto il metodo, per potersi applicare, limita il semispazio con dei con-

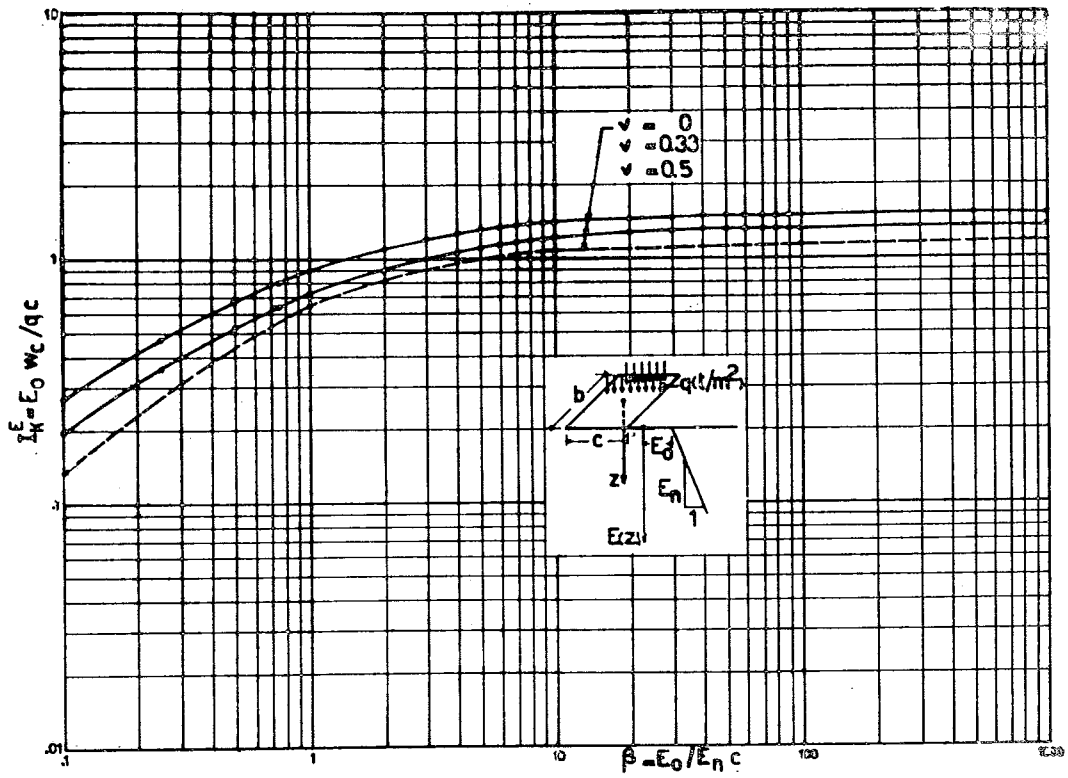


Fig. 8. — I_K^E in funzione di β per $\alpha = b/c = 2$ e $\nu = 0; 0.33; 0.5$.

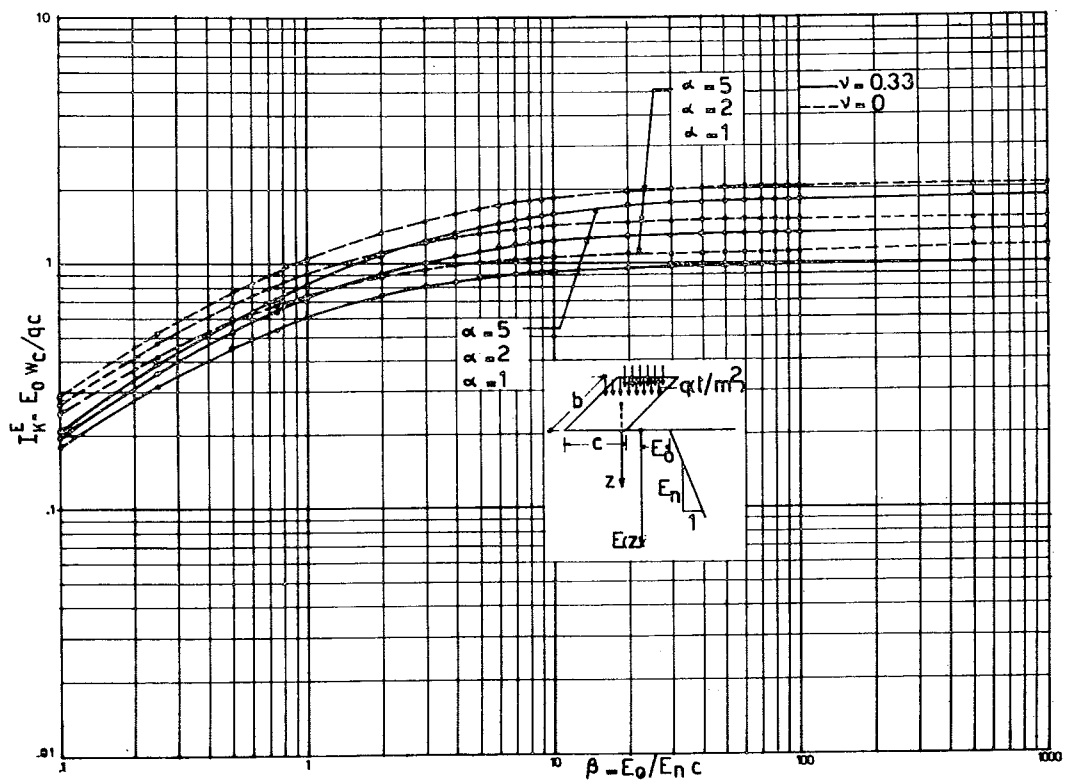


Fig. 9. — I_K^E in funzione di β per $\alpha = b/c = 1; 2; 5$; e per $\nu = 0; 0.33$.

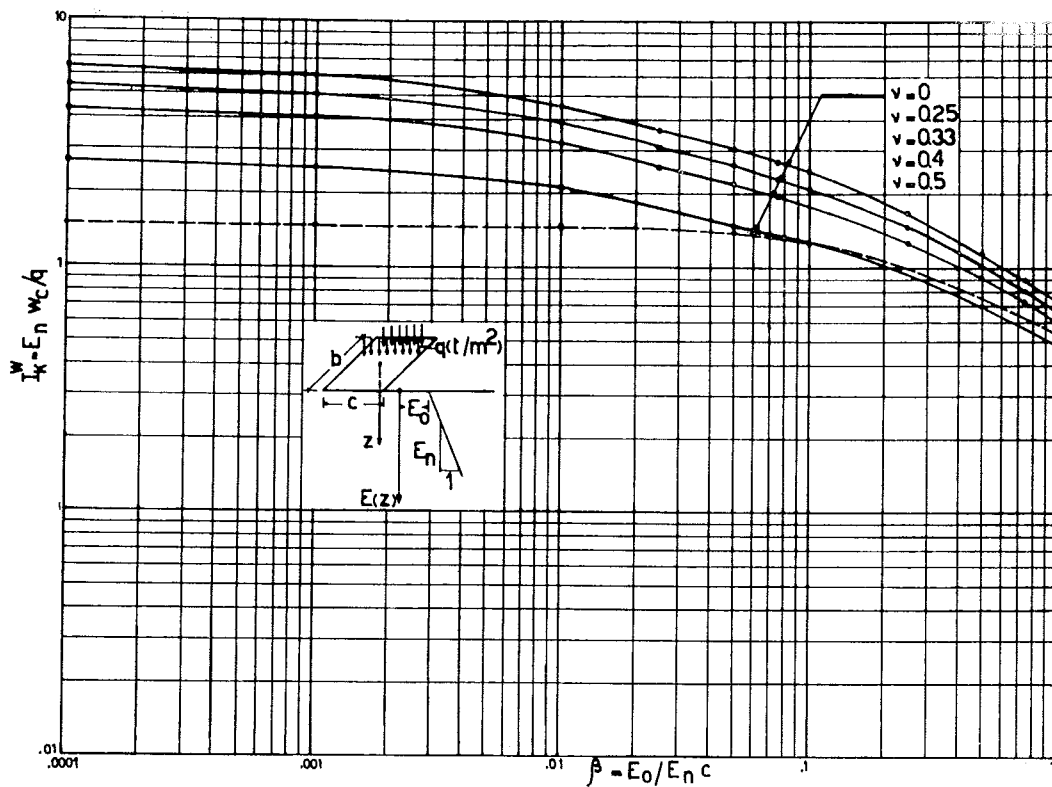


Fig. 10. — I_K^W in funzione di β per $\alpha = b/c = 1$ e per $\nu = 0; 0.25; 0.33; 0.4; 0.5$.

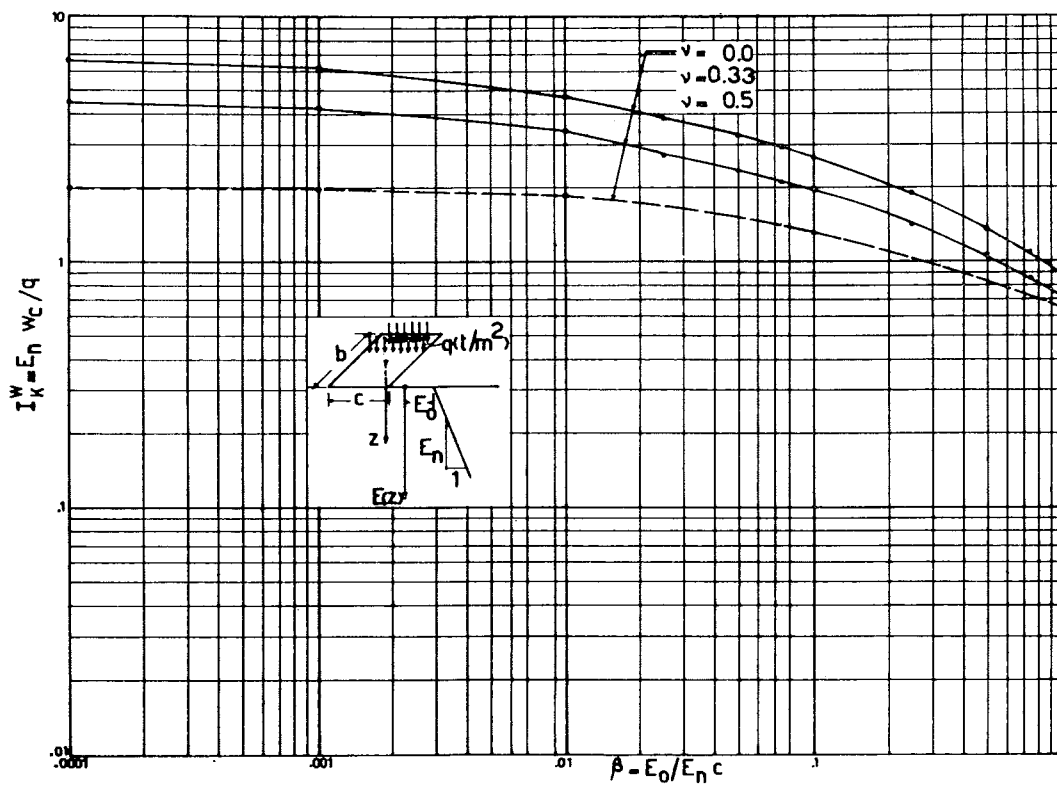


Fig. 11. — I_K^W in funzione di β per $\alpha = b/c = 2$ e per $\nu = 0; 0.33; 0.5$.

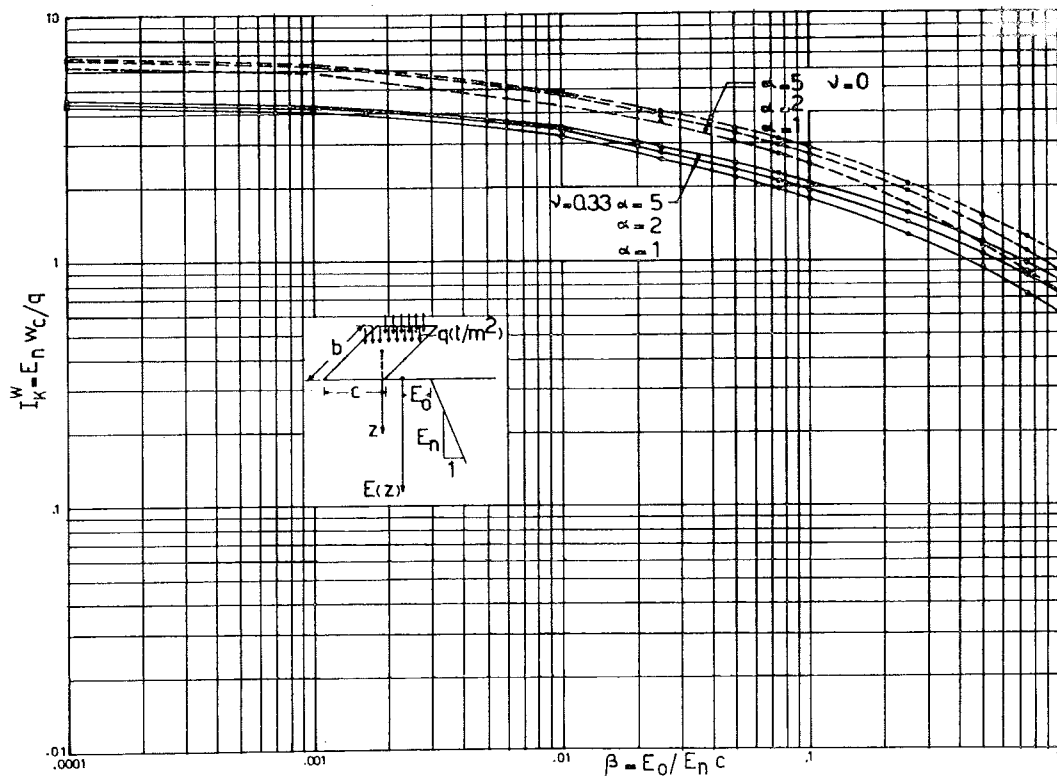


Fig. 12. — I_K^W in funzione di β per $\alpha = b/c = 1; 2; 5$; e per $\nu = 0; 0.33$.

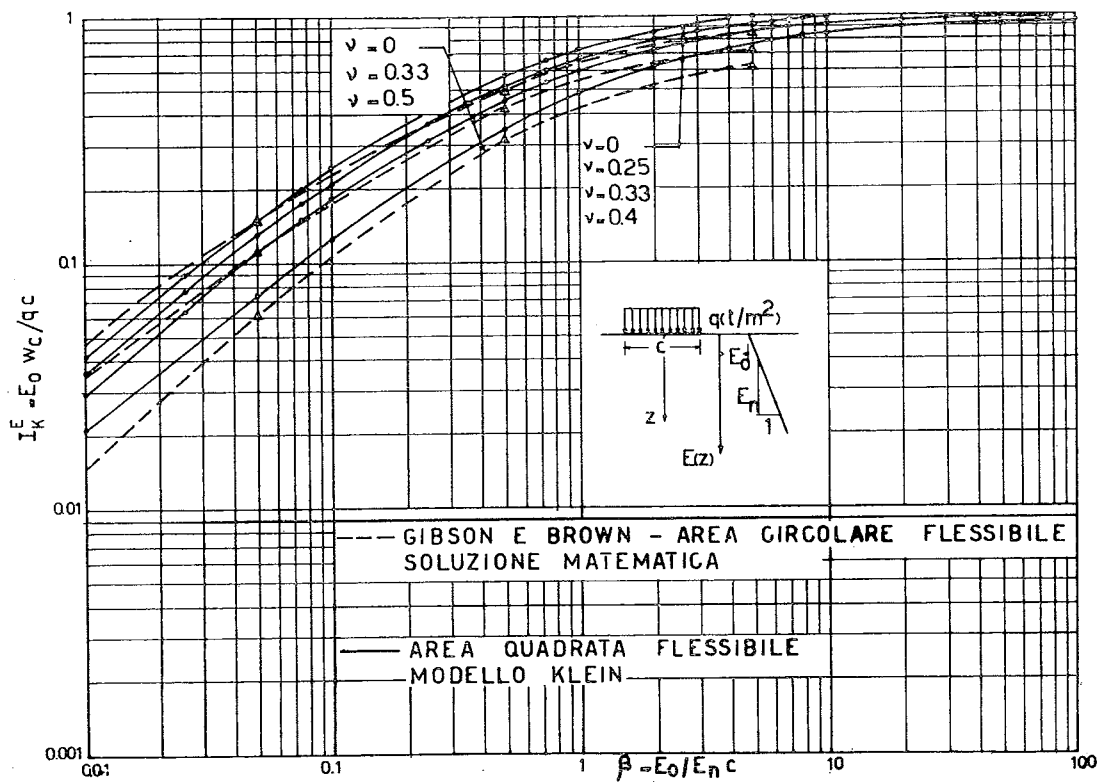


Fig. 13. — Confronto tra i risultati di GIBSON e BROWN (area circolare flessibile) ed i risultati ottenuti con il modello di KLEIN (quadrato).

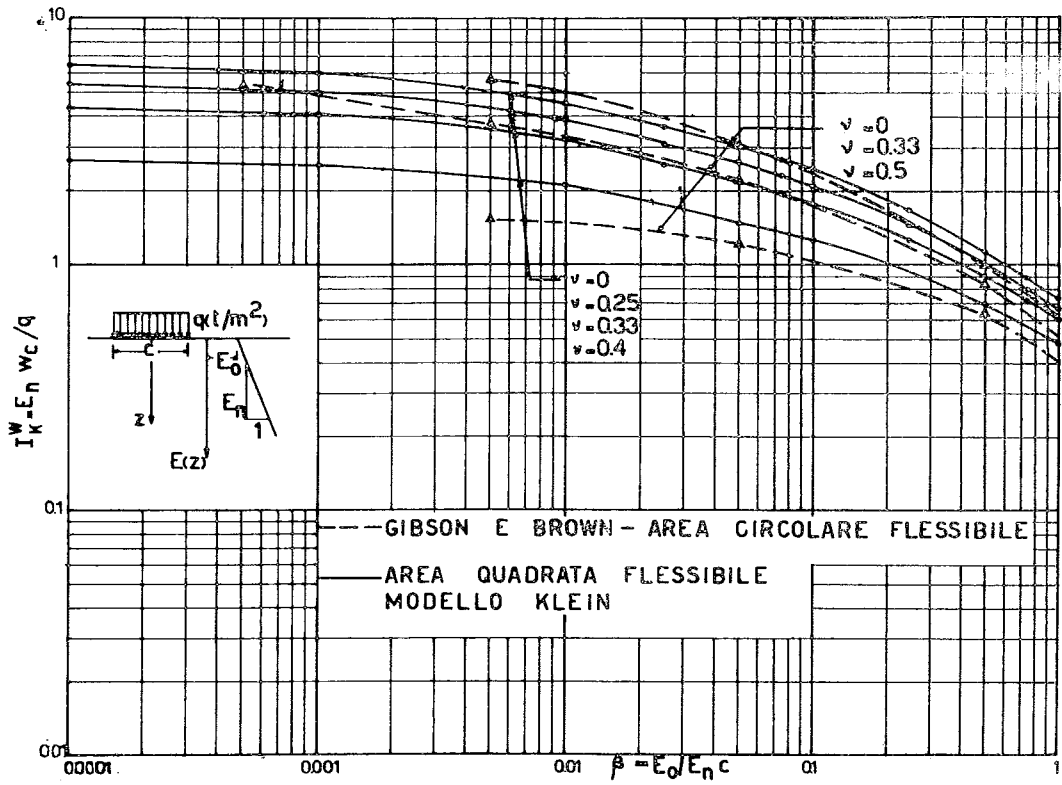


Fig. 14. — Confronto tra i risultati di GIBSON e BROWN (area circolare flessibile) ed i risultati ottenuti con il modello di KLEIN (quadrato).

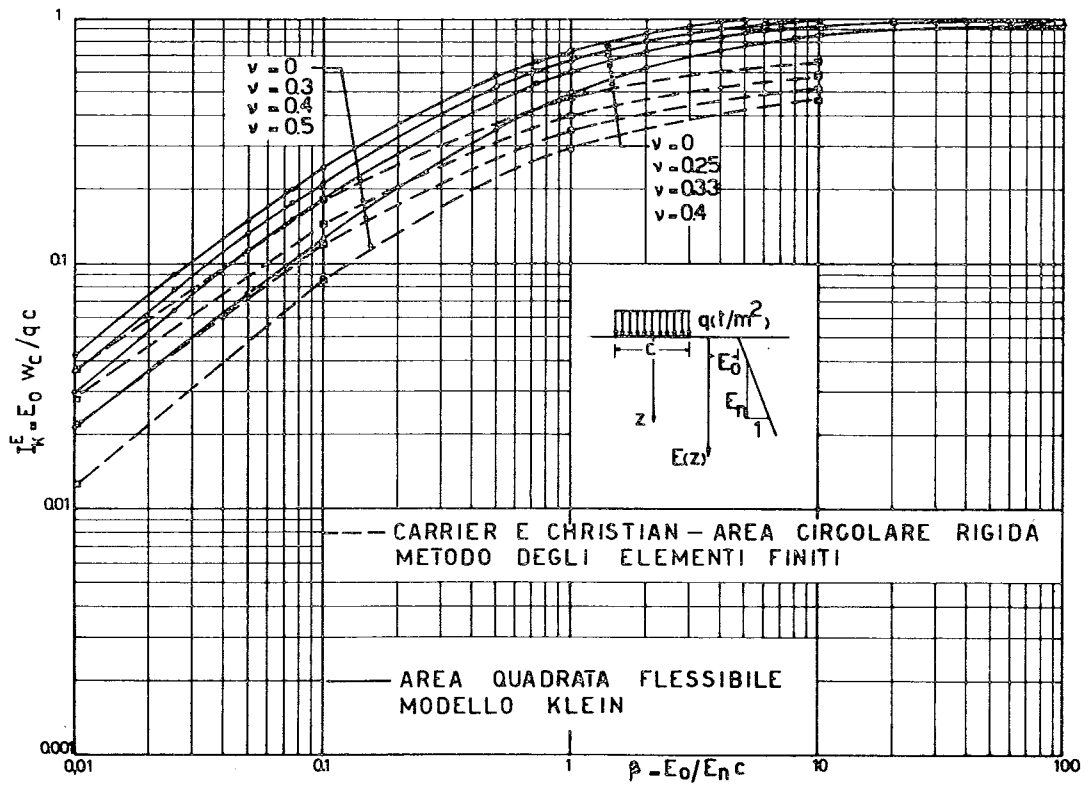


Fig. 15. — Confronto tra i risultati di CARRIER e CHRISTIAN (cerchio rigido) ed i risultati ottenuti con il modello di KLEIN (quadrato).

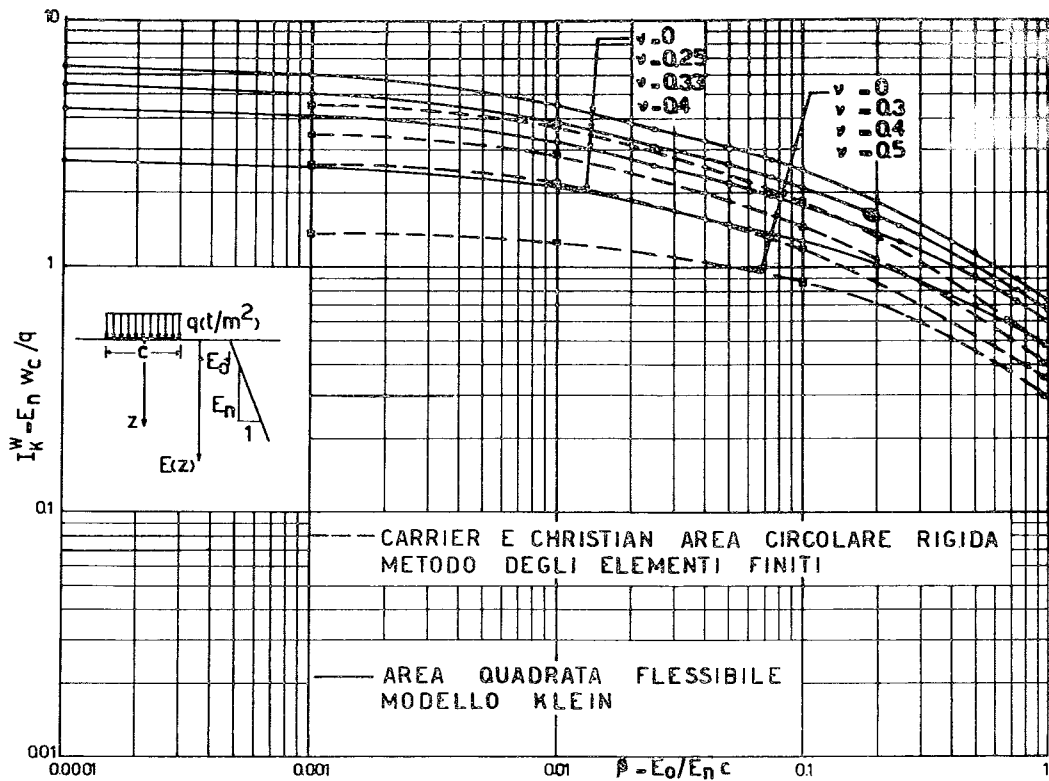


Fig. 16. — Confronto tra i risultati di CARRIER e CHRISTIAN (cerchio rigido) ed i risultati ottenuti con il modello di KLEIN (quadrato).

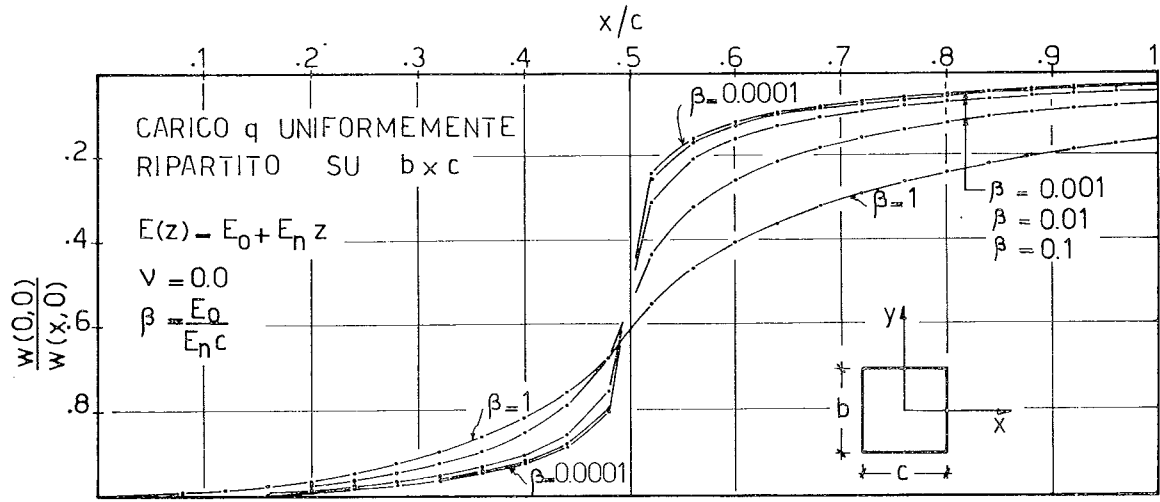


Fig. 17. — Andamento del cedimento relativo per $\beta = 1 \div 0.0001$ e $\nu = 0.0$

torni rigidi posti ad una certa distanza dall'area caricata. Ritenendo che l'errore si mantenga costante per tutti i valori di β , i due limiti precedentemente dati diventano quindi:

$$\frac{I_K^{\text{quadrato}}}{I_K^{\text{cerchio rigido el. finiti}}} = \begin{cases} 1,42 & \text{per } \beta \rightarrow \infty \\ 1,12 & \text{per } \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

Come si vede dalle figg. 15 e 16 i citati rapporti sono rispettati con buona approssimazione. Ugualmente i dati di CHRISTIAN e CARRIER risul-

tano in buon accordo, tenuto conto della differenza che esiste tra il cedimento nel centro di una fondazione rigida e di una flessibile e dell'errore di approssimazione del $\approx 12\%$, con i risultati di BROWN e GIBSON [1972].

Nelle figure 17 e 18 è riportato l'andamento del cedimento, riferito al cedimento nel centro, lungo l'asse x per vari valori di β e per $\nu = 0$ e 0,33, calcolati mediante la formula (17).

Il confronto con gli analoghi diagrammi riportati da BROWN e GIBSON [1972], ottenuti per un'area

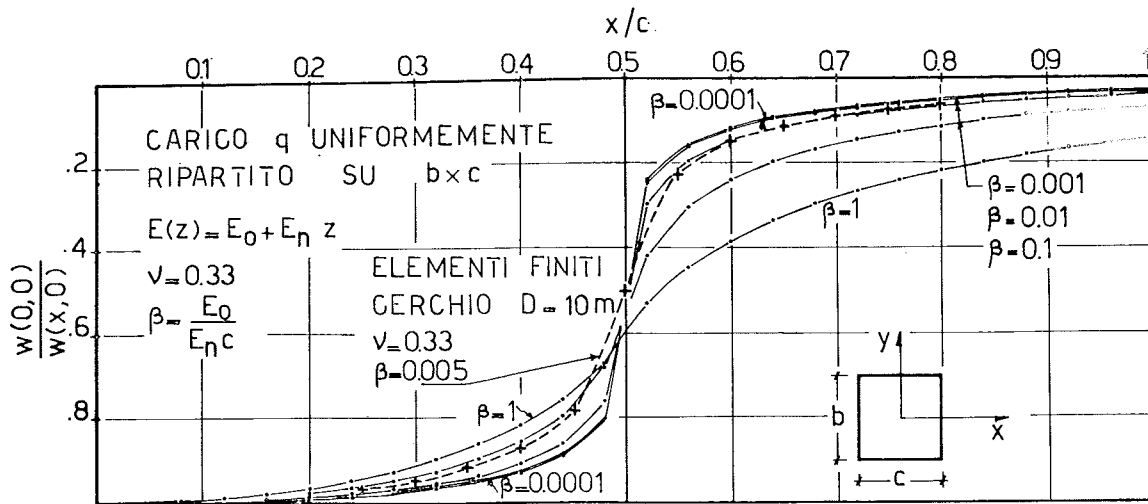


Fig. 18. — Andamento del cedimento relativo per $\beta = 1 \div 0.0001$ e $\nu = 0.0$.

circolare mediante una soluzione matematica rigorosa, può ritenersi soddisfacente.

Si osserva inoltre che per $\beta < 0,01$ il propagarsi delle deformazioni sulla superficie del semispazio al di fuori dell'area caricata risulta così modesta da ritenersi trascurabile dal punto di vista applicativo.

Conclusioni

Elaborando questa soluzione si è fatto riferimento ai lavori di BOROWICKA [1943], KLEIN [1956] e KLEIN e DURAJEV [1971].

Nell'articolo vengono riportati i risultati di calcoli eseguiti per una area di carico rettangolare-flessibile, confrontandoli con quelli ottenuti da altri autori, attraverso soluzioni più rigorose dal punto di vista matematico, oppure ricorrendo al metodo degli elementi finiti.

Da tale confronto si possono trarre le seguenti conclusioni:

- La soluzione proposta, ed espressa mediante la (17), può ritenersi valida per qualsiasi valore di x e y e per $0 \leq \nu \leq 0,4$.
- Per i valori di $0,4 < \nu \leq 0,5$ la (17) porta a risultati in difetto, a causa dell'errore di approssimazione legato alla valutazione numerica della (17), che aumenta con l'avvicinarsi al punto di singolarità ($\nu = 0,5$), nel quale appunto la (17) non è applicabile del tutto.
- Nel caso di $\nu = 0,5$, e limitatamente al calcolo del cedimento sotto il centro dell'area caricata, si può fare ricorso in prima approssimazione alla (21), per qualsiasi valore di β .
- Per i valori di $\beta > 10$ il semispazio eterogeneo può essere sostituito, ai fini dei calcoli di interazione tra terreno e struttura a dei calcoli

dei cedimenti, con quello omogeneo di BOUSSINESQ.

- Per $\beta < 0,01$ il cedimento al di fuori dell'area caricata può ritenersi ingegneristicamente trascurabile. In questo caso risulta lecito quindi studiare i problemi di interazione tra fondazione e terreno facendo ricorso al ben noto modello di Winkler.

- In questo ultimo caso il valore approssimato del coefficiente di reazione del suolo alla Winkler (K) potrà essere ricavato dalla seguente espressione:

$$K \cong \frac{E_n}{I^{w_K}}$$

I valori di I^{w_K} , relativi a coefficienti di Poisson compresi tra 0,4 e 0,5, per un fissato valore di $\beta < 0,01$ possono essere ricavati per interpolazione dai valori contenuti nelle tav. 10, 11, 12, sfruttando il fatto che per $\nu = 0,5$ e $\beta < 0,01$, $I^{w_K} \cong 1,5$ [BROWN e GIBSON, 1972].

Va comunque precisato che il valore di $\beta = 0,001$ deve ritenersi il limite inferiore di β praticamente possibile.

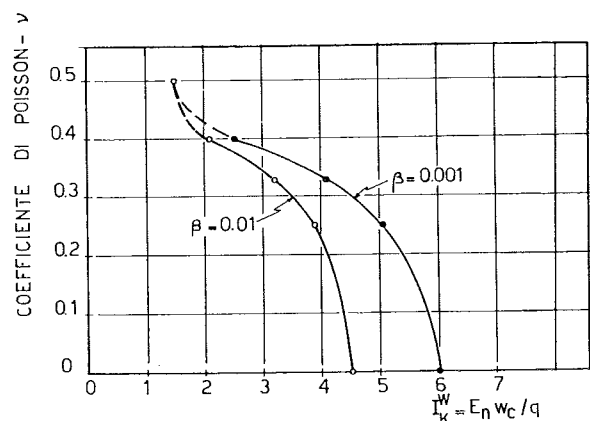


Fig. 19. — I^{w_K} in funzione di ν per un fissato valore di β .

APPENDICE I

Nel caso di $\nu = 0,5$ la soluzione di BOROWICKA per il calcolo degli sforzi, nel caso di forza concentrata P , ritrova per il semispazio eterogeneo $E = E_n z$ la soluzione di BOUSSINESQ.

Analogamente GIBSON e SILLS [1971], per il problema piano e per l'area circolare, nel caso di $\nu = 0,5$ e $E(z) = E_n z$, trovano che lo stato di tensione all'interno del semispazio coincide con quello di BOUSSINESQ.

Applicando alle tensioni della soluzione elementare di BOROWICKA il principio di sovrapposizione degli effetti per il caso di $\nu = 0,5$, non si può che ritrovare la soluzione di BOUSSINESQ per area circolare, rettangolare, problema piano ecc.

Basta calcolare lo spostamento verticale del semispazio eterogeneo $E(z) = E_n z$ facendo uso quindi delle tensioni secondo BOUSSINESQ per ritrovare i risultati anticipati da GIBSON. Così, nel caso del problema piano, con riferimento alla fig. 1.A, si ha:

$$W = \int_0^{\infty} \frac{1}{E} [\sigma_z (1 - \nu^2) - \nu \sigma_y (1 + \nu)] dz$$

e per $\nu = 0,5$

$$W = \int_0^{\infty} \frac{3}{4 E} (\sigma_z - \sigma_y) dz$$

APPENDICE II

Lo spostamento verticale $W(x, y)$ dovuto ad una forza concentrata P agente sulla superficie limite superiore del semispazio eterogeneo $E(z) = E_n z$, è dato dalla seguente espressione:

$$W = \frac{1}{2 \pi K_2} \frac{(1 + \nu)(1 - \nu)^2}{(1 - 3\nu)} \frac{1}{E_n} \frac{P}{(x^2 + y^2)}$$

e confrontando con la formula precedentemente usata per W in (5) e (6):

$$W = \frac{\gamma q}{E_n (x^2 + y^2)}$$

si ha per γ

$$\gamma = \frac{1}{2 \pi K_2} \frac{(1 + \nu)(1 - \nu)^2}{(1 - 3\nu)}$$

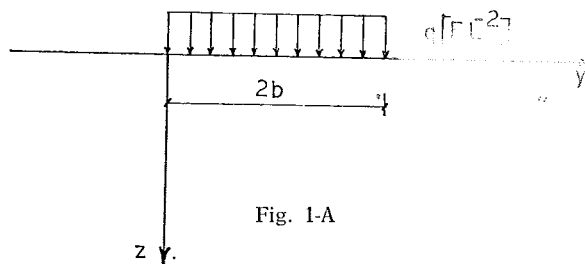


Fig. 1-A

Usando per σ_z e σ_y le espressioni di BOUSSINESQ e ponendo $E = E_n z$, si ha:

$$W = \int_0^{\infty} \frac{3}{4 E_n z} \cdot \left[\frac{2 q}{\pi} \frac{y z}{y^2 + z^2} - \frac{(y - 2 b) z}{(y - 2 b)^2 + z^2} \right] dz =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{3}{2 E_n} \left[\frac{q}{\pi} \frac{y}{y^2 + z^2} - \frac{(y - 2 b)}{(y - 2 b)^2 + z^2} \right] dz =$$

$$= \frac{3}{2 E_n} \frac{q}{\pi} \left[\text{arc tg} \frac{z}{y} - \text{arc tg} \frac{z}{y - 2 b} \right]_0^{\infty}$$

Si ha quindi:

$$W = \frac{3 q}{2 E_n} \text{ per } 0 \leq z \leq 2 b$$

$$W = 0 \text{ per } y < 0 \text{ e per } y > 2 b$$

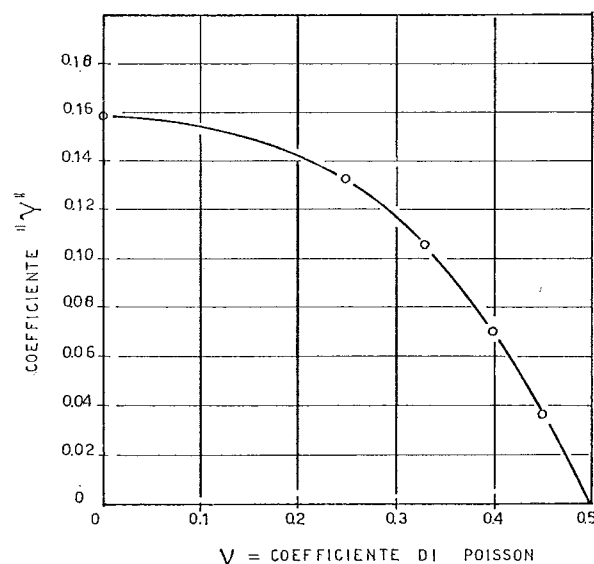


Fig. 2-B

il coefficiente K_2 è dato dalla seguente serie:

$$K_2 = \left[\frac{(3-\nu)(1-\nu)}{2(1-3\nu)} - \dots - \frac{1}{(2n+1)^2} \alpha_{2n-1} - \dots \right] +$$

$$+ K_1 \left[\frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} + \frac{1-\nu}{2} + \dots + \frac{1}{(2n+2)^2} \alpha_{2n} + \dots \right]$$

in cui K_1 è dato dalla serie:

$$K_1 = \frac{\frac{1-\nu}{6} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \alpha_{2n-1} + \dots}{\frac{1-\nu}{4} + \dots + \frac{1}{(2n+2)(2n+4)} \alpha_{2n} + \dots}$$

mentre i coefficienti α_{2n-1} e α_{2n} dalle seguenti espressioni:

$$\alpha_{2n-1} = \frac{[(2n-1)^2 - 2] - \nu [(2n-1)^2 - 4]}{(2n-1)^2 (1-\nu)} \alpha_{2n-3}$$

$$\alpha_{2n} = \frac{(4n^2 - 2) - (4n^2 - 4)\nu}{4n^2 (1-\nu)}$$

il coefficiente γ risulta quindi funzione soltanto del coefficiente di Poisson ν .

Sono stati calcolati per γ i seguenti valori:

ν	γ
0	0,159
0,25	0,133
0,33	0,1061
0,4	0,0651
0,45	0,0364
0,5	0,0

Nella fig. 2.B è riportato γ in funzione di ν .

BIBLIOGRAFIA

AWAJOBI A. O., GIBSON R. E. (1973) - *Plane Strain and Axially Symmetric Problems of a Linear Non-homogeneous Elastic Half-space*. Q. Jnl. Mech. Appl. Math.

BELLONI L., JAMIOLKOWSKI M. (1973) - *Alcuni aspetti del calcolo delle sollecitazioni nelle strutture di fondazione*. Costruzioni in Cemento Armato: Politecnico di Milano, Studi e Rendiconti - Volume 10.

BOROWICKA H. (1943) - *Die Druckausbreitung im Halbraum bei linear zunehmenden Elastizität modul*. Ingenieur Arch. Band XIV, Heft n. 2, Vien.

BOUSSINESQ J. (1885) - *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Paris, Gauthier-Villard.

BROWN P. T., GIBSON R. E. (1972) - *Surface Settlement of a Deep Elastic Stratum whose Modulus Increases Linearly with Depth*. Canad. Geot. Journal. Vol. 9.

CARRIER D. W., CHRISTIAN J. T. (1972) - *Rigid Circular Plate Resting on Nonhomogeneous Elastic Halfspace*. Geotechnique, Vol. 23, n. 1.

CARRIER D. W., CHRISTIAN J. T. (1973) - *Analysis of a Foundation Resting on Nonlinear Elastic Halfspace*. Paper submitted for publication, VIII Proc. Int. Conf. on S. M. and F. E. Moscow.

DE BEER E. (1972) - *Summary Report for the Technical Committee n. 11. Conf. on Planning and Design of Tall Buildings*. Lehigh Univ. Bethlehem Pennsylvania.

GIBSON R. E. (1967) - *Some Results Concerning Displacements and Stresses in a Nonhomogeneous Elastic Half-Space*. Geotechnique, Vol. XVII, n. 4.

GIBSON R. E., SILLS G. C. (1971) - *Some Results Concerning the Plane Deformation of a Nonhomogeneous Elastic Half-Space*. Proc. Roscoe Memorial-Cambridge.

JAMIOLKOWSKI M., MARCHETTI S. (1971) - *Alcuni risultati sperimentali ottenuti mediante un apparecchio di consolidazione edometrica a gradiente idraulico controllato*. Rivista Italiana di Geotecnica, Napoli.

JANBU N. (1963) - *Soil Compressibility as Determined by Oedometer Tests*. Proc. Europ. Conf. S.M.F.E., Vol. 1, Wiesbaden.

KLEIN G. K. (1956) - *Studio dell'influenza della eterogeneità e della discontinuità delle deformazioni e delle altre proprietà meccaniche dei terreni sull'interazione tra terreno e fondazione*. Sbornik Trudov Moskovskij Inz. Strait. Inst. n. 14 (in russo).

KLEIN G. K., DURAJEW A. E. (1971) - *Influenza dell'incremento del modulo di deformazione con le profondità sul calcolo delle travi poggianti sul terreno*. Gidrotechnicheskope Stroitelstro n. 7 (in russo).

RACHIMOV S., REPNIKOV L. N. (1971) - *Metodo di calcolo delle deformazioni in mezzo elastico avente caratteristiche intermedie tra quelle del mezzo alla Winkler ed il semispazio elastico*. Osnovaniya, Fundamienty i Mekhanika Gruntov n. 4.

REPNIKOV L. N. (1967) - *Calcolo delle travi sul suolo avente caratteristiche di deformazione intermedie tra quelle di suolo alla Winkler e semispazio elastico*. Osnovaniya, Fundamienty i Meckanika Gruntov n. 6 (in russo).

SCHULTZE E. (1967) - *Bettungszahl oder Steifenzahl*. Festgruft Hirschfeld, Konstruktiver Ingenieurbau, Dusseldorf.

WINKLER E. (1867) - *The law of elasticity and strength* (in german). H. Dominicus, Prague.

SUMMARY

The heterogeneous half-space as a model of the foundation soil

The problem of evaluating the settlement of an elastic, isotropic, and heterogeneous half space with the following law for the modulus of deformation:

$$E(z) = E_0 + E_n z$$

is considered.

The available analytical solutions for this problem are briefly reviewed. Then, an approximate method is discussed which relies upon the superposition of the solutions due respectively to BOUSSINESQ [1885] for $E(z) = E_0$ const, and BOROWICKA [1943], for $E(z) = E_n z$. This method was firstly proposed by KLEIN [1956] and applied by KLEIN and DURAJEV [1971] in the case of $\nu = 0,333$.

A solution [see (17)] which holds for $0 \leq \nu \leq 0,4$ and an approximate formula for $\nu > 0,4$ are obtained.

A parametric study of the influence coefficients I_K^w and I_K^e , valid for the evaluation of the settlement under the center of a flexible rectangular area, is presented. A comparison with the values for I_K^w and I_K^e obtained by BROWN and GIBSON [1972], and by CHRISTIAN and CARRIER [1972, 1973] shows that for $0 \leq \nu \leq 0,4$ the accuracy of the proposed solution is satisfactory.

Furthermore, a study of the deformation of the surface of the heterogeneous halfspace, related to the parameter β , defined by (18), yields some interesting conclusions on the use of the Winkler model and the Boussinesq halfspace, when dealing with problems of interaction between soil and foundation structures.