

**Applicazione dell'analisi limite a materiali anisotropi.**

REINICKE K. M., RALSTON T. D. - *Plastic Limit Analysis with an Anisotropic, Parabolic, Yield Function*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., vol. 14, n. 3, 1977.

L'impiego dei metodi d'equilibrio limite nei problemi di stabilità ha avuto una notevole importanza per lo sviluppo della Meccanica dei Terreni, ed è ben nota la fiducia che i tecnici ripongono in essi per la risoluzione di importanti problemi progettuali.

Gli inconvenienti di questi metodi, tuttavia, possono risultare notevoli e sorgono, come ha fatto anche notare recentemente GÜDDEHUS [1977], principalmente per il fatto che il meccanismo di rottura posto a base del consueto metodo delle strisce non è, in generale, cinematicamente ammissibile.

È solo da pochi anni, tuttavia, che alcuni concetti della teoria della plasticità, specialmente quelli relativi alla nozione di legge di flusso, cominciano a diventare familiari ai cultori di Geotecnica. Tale apporto di idee ha permesso di far luce su alcuni aspetti della meccanica dei fenomeni di rottura, contribuendo ad una impostazione dei problemi più aderente ai principi della meccanica applicata.

La filosofia essenziale dell'analisi limite, « limit design » nella letteratura tecnica anglosassone, consiste nella ricerca di un intervallo entro cui può ricadere il reale carico di collasso di un « corpo » soggetto ad un determinato sistema di sollecitazioni. Per materiali idealmente plastici, dotati di legge di flusso associata<sup>(1)</sup>, DRUCKER, PRAGER e GREENBERG [1952] hanno formulato due teoremi, rispettivamente, del limite inferiore e del limite superiore, che permettono di determinare due estremi del predetto intervallo.

Il teorema del limite inferiore afferma che, se in un corpo è possibile trovare almeno uno stato tensionale, conseguente ad un certo sistema di carichi, staticamente ammissibile e che non violi la condizione di plasticizzazione, il carico associato a tale stato tensionale è minore, o al più uguale, al reale carico limite.

(1) Una legge di flusso si dice « associata » se la funzione di plasticizzazione può essere assunta come potenziale plastico del materiale.

Il teorema del limite superiore stabilisce che, se in un generico incremento della deformazione plastica, il lavoro delle forze esterne agenti sul corpo è più grande, o almeno uguale, all'energia dissipata tramite un campo di velocità cinematicamente ammissibile, il risultante di tali forze è maggiore, o tutt'al più uguale, al reale carico limite.

Secondo che si utilizzi il primo o il secondo teorema per la determinazione del carico di collasso, occorre impiegare una tecnica di calcolo diversa; c'è da dire, però, a questo riguardo, che tranne in casi di geometria particolarmente semplice, il teorema inferiore offre una via d'intervento capace di fornire risultati abbastanza accurati solo a scapito dell'agilità del procedimento.

L'utilizzazione del teorema del limite superiore, invece, porta ad una tecnica più sbrigativa che, per certi versi, rientra nella filosofia dei metodi d'equilibrio limite.

Ambedue le tecniche prima citate fanno uso di una funzione di snervamento che è riconducibile, almeno per quanto fino ad ora noto dalla letteratura, al criterio di resistenza di Mohr-Coulomb.

Tale funzione può essere espressa in generale [DRUCKER e PRAGER, 1952], come  $f = \alpha J_1 + J_2 = k$ , in cui  $\alpha$  e  $k$  sono costanti positive che dipendono dal materiale,  $J_1$  è il primo invariante del tensore delle tensioni e  $J_2$  è il secondo invariante del tensore deviatorico delle tensioni.

È stato osservato che se si assume la  $f = k$  come legge di flusso associata, la variazione di volume del materiale conseguente ad un incremento di tensione tangenziale (dilatanza) è generalmente diversa da quella rilevata sperimentalmente [DRUCKER, GIBSON e HENKEL, 1955]; d'altra parte, neppure l'adozione di modelli di comportamento reologico più aderenti alla realtà di quanto non lo sia l'ipotesi di plasticità perfetta, ha portato al superamento di alcune incongruenze di cui quella citata precedentemente è, forse, fra le più significative.

Nella memoria che si recensisce, gli AA. studiano l'applicazione dei metodi dell'analisi limite ad un materiale omogeneo e anisotropo la cui superficie di snervamento è una quadrica con tre piani di simmetria mutuamente or-

togonali, su ciascuno dei quali il materiale ha differenti resistenze a trazione e a compressione.

Dall'esame dell'equazione della predetta superficie, considerata come legge di flusso associata, gli AA. traggono argomenti per confermare, anche nel loro caso, i caposaldi principali dell'analisi limite dei mezzi idealmente rigido-plastici. Dopo avere dimostrato, pertanto, che un campo di velocità per essere cinematicamente ammissibile deve essere « dilatante », tale cioè da dar luogo ad un aumento di volume durante lo scorrimento, gli AA. passano a derivare un'espressione per il calcolo dell'energia dissipata nella zona in cui viene idealmente confinato lo scorrimento.

C'è da osservare, a questo riguardo, che non vengono presentati risultati sperimentali a sostegno del criterio di resistenza proposto, mentre sarebbe interessante poter verificare se l'entità dell'effetto di dilatanza previsto da questa teoria è in accordo con quanto risulta solitamente dall'evidenza sperimentale.

La memoria si conclude con l'applicazione ad un caso concreto. Si tratta del ben noto problema del punzonamento di un semispazio, in cui gli AA. si propongono di trovare il valore limite del carico per il quale il punzonamento avviene.

Per rendere credibile l'esempio, gli AA. si rivolgono ad un particolare mezzo, quale è una lastra di ghiaccio in cui lo sviluppo dei cristalli è avvenuto in direzione normale alla lastra stessa.

Il calcolo del carico limite procede, a parere dello scrivente, in maniera troppo poco agile anche con il procedimento dell'estremo superiore, tradizionalmente più agevole. Ciò è dovuto al fatto che nel caso generale trattato, contrariamente a quanto avviene se si adopera il criterio di Mohr-Coulomb, gli AA. non hanno ottenuto alcuna relazione fra i valori normale e tangenziale della velocità relativa fra due blocchi in movimento facenti parte dello stesso meccanismo di rottura.

Tale deficienza, che rende impossibile l'uso dell'odografo nella determinazione del campo delle velocità, viene così a gravare piuttosto pesantemente

sulla maneggiabilità dello strumento di calcolo.

Per concludere, un'osservazione sul risultato ottenuto. I due valori, inferiore e superiore, del carico limite trovati dagli AA. differiscono tra loro di poco meno del 5%. Tale risultato è sicuramente un buon indizio dell'affidabilità del procedimento se si osserva che, pur essendo il valore superiore non cautelativo nei riguardi della rottura, la sua vicinanza al valore inferiore

autorizza ad usare il primo, con sufficiente tranquillità, come carico di collasso.

(Antonino Musso)

#### BIBLIOGRAFIA

DRUCKER D. C., PRAGER W. (1952) - *Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design*. Quart. App. Math., 10, pp. 157-165.

DRUCKER D. C., GIBSON R. E., HENKEL D. J. (1955) - *Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity*. J. Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE, n. 798.

DRUCKER D. C., PRAGER W., GREENBERG H. J. (1952) - *Extended Limit Design Theorems for Continuous Media*. Quart. App. Math., 9, pp. 381-389.

GUDEHUS G. (1977) - *Discussion*. Int. Symp. on the Geotechnics of Structurally Complex Formations, Capri.