

Consolidazione per variazione periodica delle pressioni interstiziali al contorno

L. CAVALERA **

SOMMARIO: Sono presentati i risultati teorici e sperimentali di uno studio sulla consolidazione, prodotta da variazioni periodiche delle pressioni interstiziali.

Per la parte teorica ci si riferisce alla diffusione del calore che, impostata su posizioni analoghe a quella della consolidazione lineare di Terzaghi, consente l'adattamento a problemi geotecnici e lo sviluppo di alcune soluzioni, per descrivere i fenomeni che più interessano le applicazioni. Viene esaminata la consolidazione di uno strato di argilla drenato ad uno o ad entrambi gli estremi, per una variazione sinusoidale e quadra delle pressioni al contorno.

I risultati ottenuti, espressi in forma adimensionale e in funzione di un parametro che riassume le caratteristiche principali del problema, sono stati sottoposti ad una verifica sperimentale. La teoria utilizzata si sviluppa infatti sull'ipotesi di comportamento elastico dello scheletro solido ed è perciò interessante controllarne i limiti di validità.

A tal fine si è effettuata in laboratorio una ricerca sperimentale su due argille sovraconsolidate: i risultati ottenuti confermano la validità dell'ipotesi assunta e quindi la possibilità di impiegare nella pratica le soluzioni teoriche, ad esempio per lo studio del comportamento di terreni argillosi a contatto con stratificazioni sabbiose ove avvengano periodiche oscillazioni della falda.

Alcuni fenomeni ricorrenti in problemi di stabilità o di subsidenza connessi a variazioni periodiche delle condizioni idrologiche, trovano infatti, nelle conclusioni che se ne traggono, una possibile giustificazione.

1. Premessa

In un terreno compressibile soggetto a sollecitazioni esterne costanti, la diminuzione o l'aumento delle pressioni interstiziali danno origine, com'è noto, ad un processo di consolidazione, che produce nel tempo, rispettivamente la compressione o il rigonfiamento, con effetti analoghi a quelli prodotti da opposte variazioni delle sollecitazioni applicate.

Si presenta frequentemente il caso di uno strato compressibile soggetto a pressioni interstiziali al contorno variabili periodicamente nel tempo, con oscillazioni di segno alternato attorno ad un valore medio. Il problema è stato finora poco trattato, benché abbia interessanti applicazioni nello studio del comportamento di terreni stratificati: ad esempio, nella stabilità dei pendii e nei fenomeni di subsidenza, in relazione a variazioni periodiche delle condizioni idrologiche [TER-MARTIROSYAN, 1973].

Sul piano teorico il problema presenta le stesse difficoltà di quello più classico della consolidazione prodotta da variazioni delle tensioni applicate, e può risolversi con alcune ipotesi semplificative, che peraltro risultano in questo caso meno limitative. Le ipotesi di com-

portamento elastico dello scheletro solido e di filtrazione e deformazione monodimensionali della teoria della consolidazione di Terzaghi, sembrano infatti più aderenti alla realtà quando si considerano gli effetti di piccole variazioni tensionali entro limiti fissi su stratificazioni estese rispetto allo spessore. Con queste ipotesi il fenomeno della consolidazione diviene simile a quello della diffusione del calore, già studiato per varie condizioni al contorno [CARSLAW, JAEGER, 1959].

Si è visto che l'ipotesi di comportamento lineare dello scheletro solido nella teoria della consolidazione, invece di più complesse e realistiche leggi costitutive non lineari, conduce a risultati molto validi per quanto riguarda le relazioni cedimenti-tempo, ma non altrettanto approssimati per le pressioni interstiziali all'interno dello strato in consolidazione [VIGGIANI, 1972]. È perciò interessante controllare sperimentalmente per quali aspetti ed entro che limiti l'ipotesi di comportamento lineare dello scheletro solido fornisce soluzioni valide, nel caso della consolidazione prodotta da oscillazioni periodiche delle pressioni interstiziali al contorno.

Nella prima parte di questa memoria vengono illustrate le soluzioni teoriche del problema, mentre nella seconda parte sono riportati i risultati di una ricerca sperimentale sul comportamento di due terre argillose sovraconsolidate.

* Lavoro condotto con il contributo del C.N.R. per il programma di ricerca: «Reologia delle argille sature», sotto la direzione del Prof. G. Calabresi.

** Dott. Ing. Laura CAVALERA, borsista presso la Cattedra di Meccanica delle Terre e Tecnica delle Fondazioni della Facoltà di Ingegneria - Università degli Studi di Roma.

2. Fondamenti teorici

La teoria matematica della conduzione del calore, si sviluppa sull'ipotesi, confermata dall'esperienza, che la quantità di calore scambiata fra due superfici a distanza « d » e la differenza di temperatura « Δt » fra le superfici stesse, siano proporzionali. La costante di proporzionalità, definita « conduttività termica » della sostanza, determina la velocità di evoluzione del fenomeno di equalizzazione della temperatura fra le due superfici. Per un solido omogeneo ed isotropo, con una conduttività indipendente dalla temperatura, se le due superfici isoterme sono parallele a un piano di riferimento $x = 0$ e il flusso di calore è monodimensionale (con linee di flusso parallele all'asse x), la diffusione del calore si esprime nella forma differenziale:

$$\bar{f} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1)$$

in cui la costante \bar{f} rappresenta la « diffusività » della sostanza. Questa espressione è analoga a quella che rappresenta il fenomeno della consolidazione lineare monodimensionale di Terzaghi:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

come sono analoghe del resto le cause dei due processi e le ipotesi che ne permettono lo studio.

La conduzione del calore, già ampiamente trattata anche per la soluzione di numerosi casi particolari, si presta dunque ad essere utilizzata come metodo risolutivo di problemi di consolidazione lineare. Per il problema che ora interessa, e cioè la consolidazione di uno strato omogeneo di limitato spessore in presenza di variazioni periodiche delle pressioni al contorno, conviene introdurre una nuova grandezza, legata esclusivamente alle caratteristiche oggettive del problema. Lo spessore H dello strato di argilla, il periodo T dello stimolo esterno e il valore c_v del coefficiente di consolidazione definiscono infatti un unico parametro adimensionale:

$$R = \frac{c_v T}{H^2}$$

significativo nelle applicazioni per valori compresi tra 0.003 e 2.5 circa. Come si vedrà in seguito, il valore di R condiziona essenzialmente

lo sviluppo delle soluzioni e la forma dei risultati, per cui eventuali osservazioni e commenti verranno valutati solo in funzione di tale parametro.

3. Consolidazione di uno strato limitato da due superfici permeabili per variazione delle pressioni su una di esse

3.1. Distribuzione delle pressioni

Consideriamo uno strato di argilla di spessore H , compreso tra due piani paralleli: $x = 0$, $x = l$; il piano $x = 0$ rappresenta il contorno drenante, il piano $x = l$ rappresenta il luogo della sollecitazione esterna (Fig. 1).

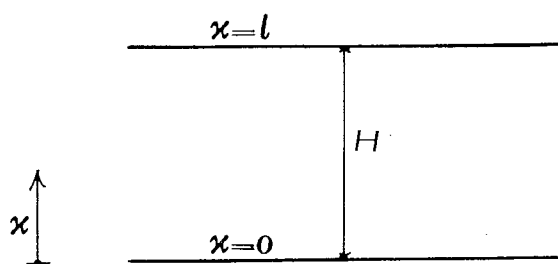


Fig. 1.

a) Variazione periodica sinusoidale.

Per il piano $x = 0$ il valore delle pressioni è costantemente nullo; per il piano $x = l$ la sollecitazione impressa segue la legge:

$$V_1(t) = \sin \omega t$$

La soluzione che interessa è costituita dalla somma di due termini: uno stazionario periodico ed uno transitorio. Per il termine stazionario, vale la forma [CARSLAW e JAEGER, 1959]:

$$u = A \sin(\omega t + \Phi) \quad (1)$$

con

$$A = \left| \frac{\sin h k x (1 + i)}{\sin h k l (1 + i)} \right|$$

$$\Phi = \arg \left\{ \frac{\sin h k x (1 + i)}{\sin h k l (1 + i)} \right\}$$

$$K = \sqrt{\frac{\omega}{2 c_v}}$$

È possibile sviluppare questa soluzione, evidenziando i parametri che interessano, nei casi di pratica utilità, la consolidazione dei terreni.

Le quantità A e Φ sono così ampiezza e fase dell'oscillazione stazionaria della pressione, nel punto x , e sono funzioni di due variabili

adimensionali $\frac{x}{l}$ e kl . Infatti:

$$kl = \sqrt{\frac{\pi l^2}{T c_v}} = \sqrt{\frac{\pi}{R}}$$

Per esprimere e rappresentare la distribuzione delle u nello spazio e nel tempo, occorre evidenziare, nell'equazione (1), la parte immaginaria implicita nelle espressioni di A e di Φ , rispettivamente modulo e argomento di uno stesso numero complesso:

$$W = A e^{i\Phi} = A (\cos \Phi + i \sin \Phi)$$

L'espressione

$$u = A \sin(\omega t + \Phi)$$

è la parte immaginaria del numero, ancora complesso,

$$V = W e^{i\omega t}$$

cioè:

$$u = \text{Im} \{ W e^{i\omega t} \}$$

Sostituendo le precedenti definizioni di A e Φ e semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \frac{e^\alpha \sin(\omega t + \alpha) - e^{-\beta} \sin(\omega t - \beta)}{\sin \omega t [1 - 2 e^{-2kl} \cos 2kl + e^{-4kl}]} + \\ & + \frac{e^{-(\beta+2kl)} \sin[\omega t - (\beta - 2kl)]}{\sin \omega t [1 - 2 e^{-2kl} \cos 2kl + e^{-4kl}]} + \\ & - \frac{e^{\alpha-2kl} \sin[\omega t + \alpha + 2kl]}{\sin \omega t [1 - 2 e^{-2kl} \cos 2kl + e^{-4kl}]} \quad (2) \end{aligned}$$

dove:

$$\alpha = kl \left[\frac{x}{l} - 1 \right]; \quad \bar{u} = \frac{u}{V_1}$$

$$\beta = kl \left[\frac{x}{l} + 1 \right]$$

e V_1 è la variazione impressa delle pressioni interstiziali.

Con queste posizioni è dunque possibile descrivere semplicemente la variazione di u in profondità e al contorno, in forma adimensionale per mezzo del parametro R (Figg. 2a - 2d).

b) Variazione periodica quadra.

Per « variazione periodica quadra » al contorno, della variabile u , si intende la seguente funzione periodica del tempo.

$$V_1 = \Phi(t) = +V \quad \text{per } rT < t < rT + T_1$$

$$V_1 = \Phi(t) = -V \quad \text{per } rT + T_1 < t < (r+1)T$$

$$r = 0, 1, 2, \dots$$

Tenendo conto della simmetria della sollecitazione nei due periodi considerati, definiti per semplicità periodo « positivo » e periodo « negativo » della variazione impressa, la soluzione originaria di Carslaw e Jaeger, modificata e sviluppata, diventa:

— per il periodo « positivo »:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \frac{x}{l} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi \frac{x}{l} \cdot \\ & \cdot \frac{e^{-\alpha_n T (0.5+t/T)} - e^{-\alpha_n T t/T}}{e^{-\alpha_n T} - 1} \quad (3) \end{aligned}$$

con

$$\alpha_n T = \frac{n^2 \pi^2 c_v T}{l^2} = (n\pi)^2 R$$

— per il periodo « negativo »

$$\begin{aligned} \bar{u} = & - \frac{x}{l} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi \frac{x}{l} \\ & \frac{e^{-\alpha_n T (0.5+t/T)} - e^{-\alpha_n T t/T}}{e^{-\alpha_n T} - 1} \quad (4) \end{aligned}$$

La distribuzione delle pressioni $\frac{u}{V} = f\left(\frac{x}{l}, \frac{t}{T}\right)$ è illustrata per alcuni valori di R, nella figura 3.

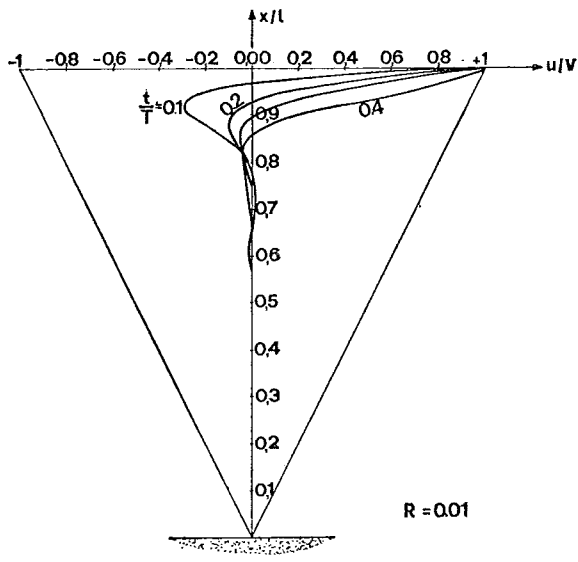


Fig. 2a.

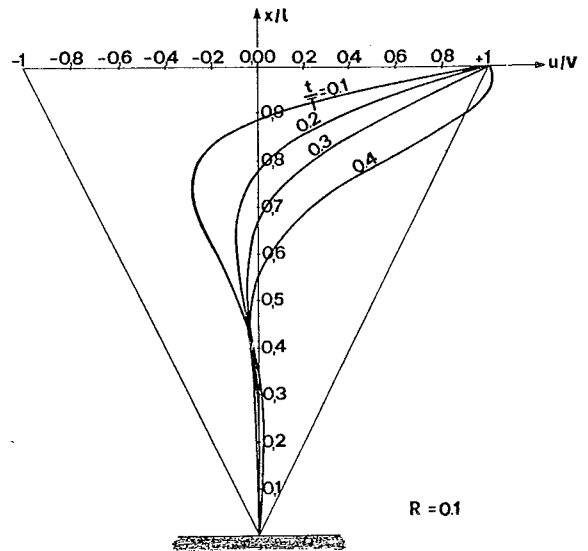


Fig. 2b.

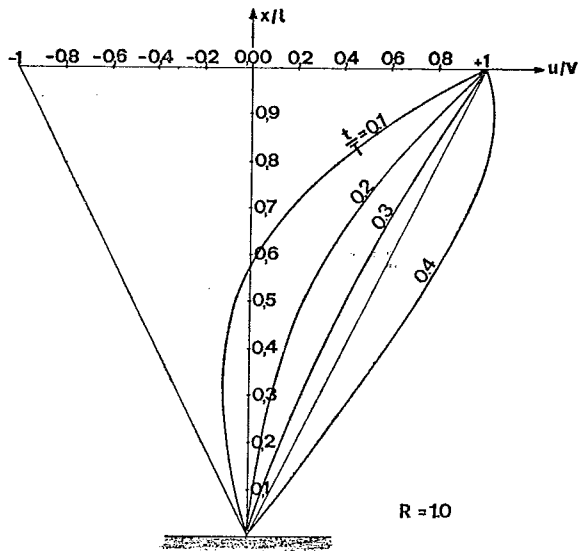


Fig. 2c.

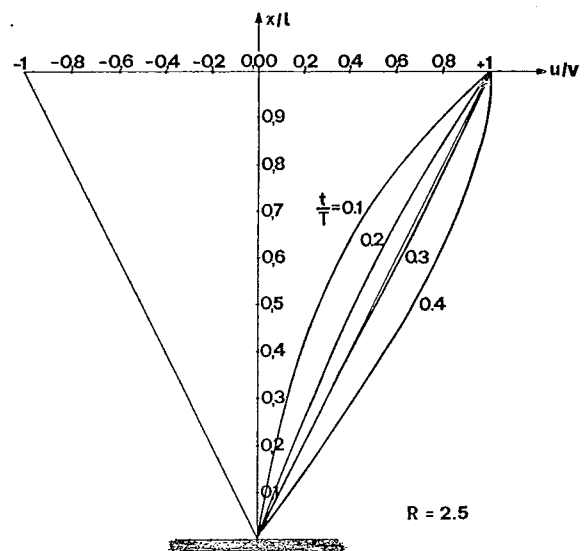


Fig. 2d.

Fig. 2. - Rappresentazione adimensionale delle isocrone relative alla consolidazione di uno strato limitato da due superfici permeabili, per variazione delle pressioni, su una delle due superfici, periodica sinusoidale.

3.2. Grado di consolidazione medio

Nel problema che si sta esaminando, in presenza di una variazione periodica delle pres-

sioni interstiziali al contorno, è opportuno assumere per il grado di consolidazione medio, una delle due seguenti definizioni alternative:

$$\bar{U}(t) = \frac{\int_0^1 u(x, t) dx}{\frac{1}{2} \int_0^1 V_1(t) dx}$$

$$\bar{U}^*(t) = \frac{\int_0^1 u(x, t) dx}{\frac{1}{2} \int_0^1 |V_1(\max.)| dx}$$

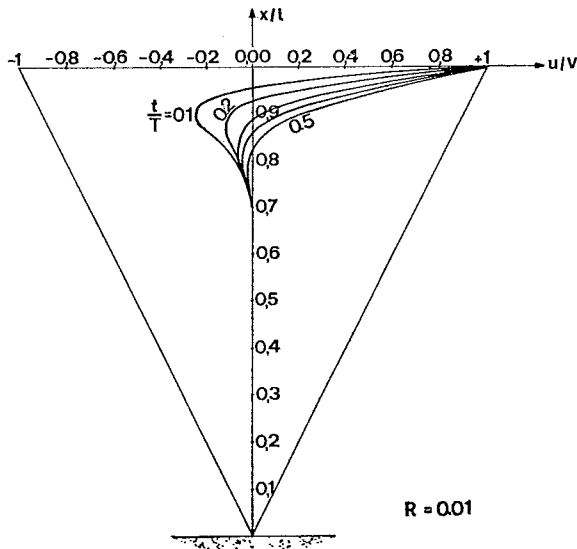


Fig. 3a.

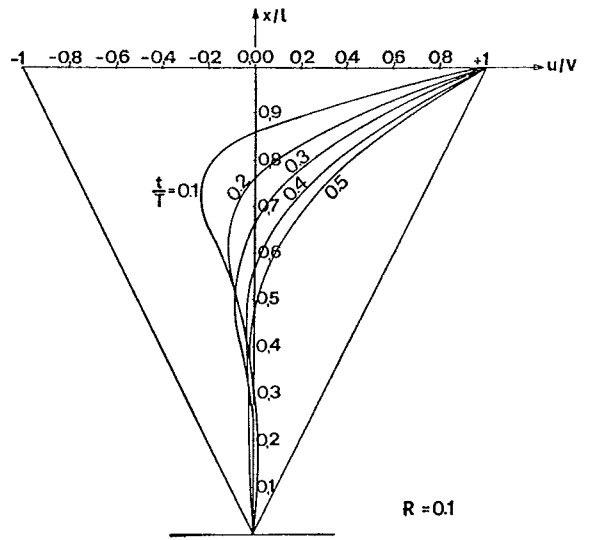


Fig. 3b.

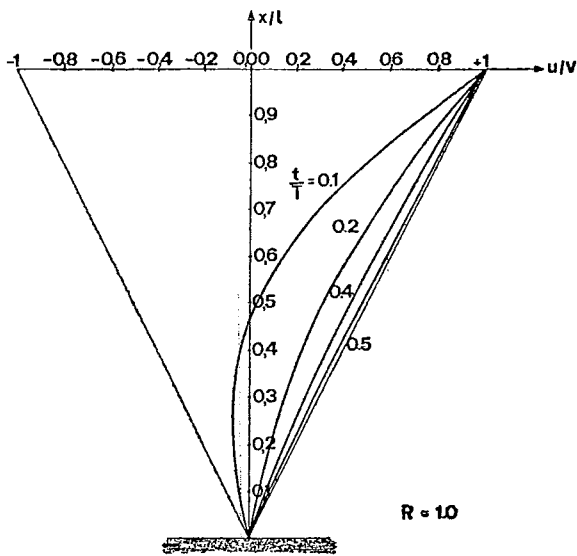


Fig. 3c.

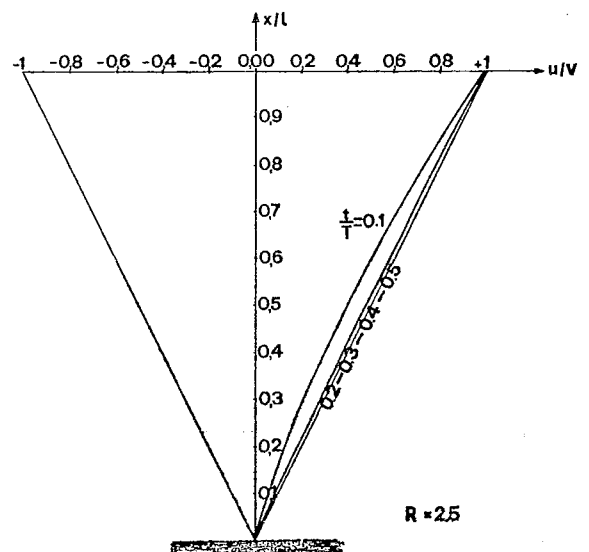


Fig. 3d.

Fig. 3. - Rappresentazione adimensionale delle isocrone relative alla consolidazione di uno strato limitato da due superfici permeabili, per variazione delle pressioni, su una delle due superfici, periodica quadra.

dove V_1 è la pressione in superficie e la costante $\frac{1}{2}$ è conseguenza della condizione $u = 0$ per $x = 0$.

La prima definizione esprime un confronto immediato tra la risposta del mezzo in un generico istante e la sollecitazione impressa nello stesso istante; è concettualmente più logica e permette di descrivere sinteticamente l'intero svolgimento del processo. La seconda, invece, è solo un confronto tra la stessa risposta e l'ampiezza massima della sollecitazione esterna, meno significativa sotto l'aspetto teorico, ma più direttamente utilizzabile in pratica. Il primo rapporto diventa inoltre infinito ad ogni inversione del valore di V_1 . Infatti per una variazione sinusoidale:

$$\bar{U} = \frac{\int_0^1 u(x, t) dx}{\frac{1}{2} \int_0^1 \sin \omega t dx}$$

e il denominatore si annulla per:

$$\omega t = n \pi \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

Nel caso di variazione quadra le due definizioni di \bar{U} coincidono: poiché

$$V_1(t) = V_1(\text{max.}) = V$$

per qualunque valore di t .

Nell'ambito di questo studio, si assumerà in generale la seconda definizione, valida per qualunque variazione di $V_1(t)$.

a) Variazione periodica sinusoidale.

Il grado di consolidazione medio diventa, secondo la definizione data:

$$\bar{U}^*(t) = \frac{\int_0^1 u(x, t) dx}{\frac{1}{2} \int_0^1 [\sin \omega t]_{\text{max}} dx} =$$

$$= \frac{2}{1} \int_0^1 u(x, t) dx$$

dove

$$\int_0^1 u(x, t) dx = \text{Im} \left\{ \int_0^1 w(x) e^{i\omega t} dx \right\}$$

$$\bar{U}^*(t) = \text{Im} \left\{ \frac{2 e^{i\omega t} [\cos h kl (1 + i) - 1]}{kl (1 + i) \sin h kl (1 + i)} \right\}$$

Ponendo $\bar{\alpha} = \omega t - \frac{\pi}{4}$ ed essendo: $(1 + i) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ si ottiene:

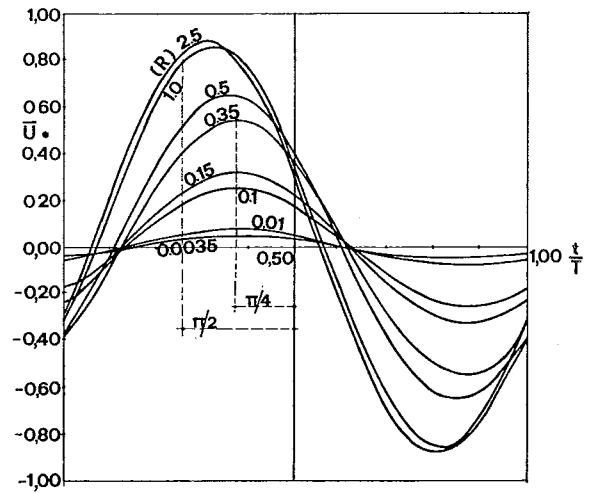


Fig. 4.

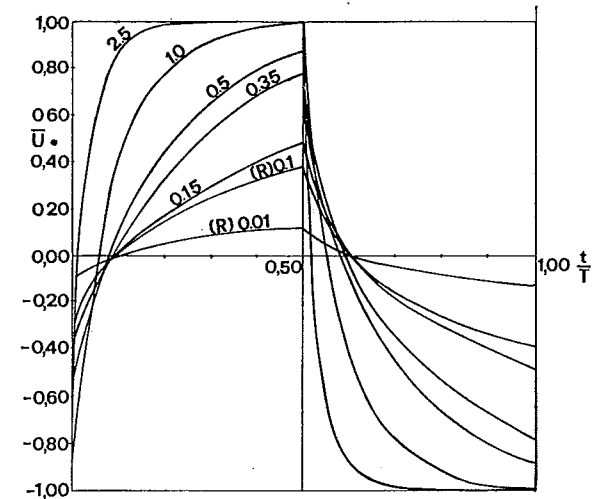


Fig. 5.

Fig. 4.5. - Grado di consolidazione medio, per uno strato limitato da due superfici permeabili e diversi valori di R : variazione delle pressioni, periodica sinusoidale (Fig. 4) e periodica quadra (Fig. 5).

si ottiene: $\bar{U}^* = \frac{2}{1} \text{Im} \{Z\}$; avendo posto: $Z = \frac{e^{i\omega t} [\cos h kl (1+i) - 1]}{\sqrt{2} kl e^{i\pi/4} \sin h kl (1+i)}$

semplificando si ricava:

$$\bar{U}^* \left[\frac{t}{T} \right] = \frac{2 (\cos \bar{\alpha} + i \sin \bar{\alpha}) [\sin h 2 kl - 2 \cos kl \sin h kl - i (\sin 2 kl - \sin kl \cos h kl)]}{\sqrt{2} kl (\cos h 2 kl - \cos 2 kl)}$$

È possibile a questo punto, separare in Z la parte immaginaria da quella reale, sviluppando semplicemente il prodotto indicato.

Si ottiene in definitiva:

$$\bar{U}^* \left[\frac{t}{T} \right] = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sin \bar{\alpha} (\sin h 2 kl - 2 \cos kl \sin h kl) + \cos \bar{\alpha} (2 \sin kl \cos h kl - \sin 2 kl)}{kl (\cos h 2 kl - \cos 2 kl)} \quad (5)$$

funzione di R e di $\frac{t}{T}$ (Fig. 4). È facilmente verificabile che per $R \rightarrow \infty$ si ha:

$$\lim_{kl \rightarrow 0} \bar{U}^* \left[\frac{t}{T} \right] = \sin \omega t$$

che mostra, come era da attendersi, che a un elevato valore di R o di T o a piccoli valori di H, corrisponde su tutta l'altezza dello strato una risposta immediata e completa, al limite uguale alla sollecitazione imposta al contorno.

b) Variazione periodica quadra.

Si ottiene in questo caso:

$$\bar{U}^* = \frac{\pm \int_0^1 V \frac{x}{1} dx \pm \int_0^1 4 V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \pi}{n \pi} f(e) \sin n \pi \frac{x}{1} dx}{\frac{1}{2} \int_0^1 |V| dx}$$

$$\bar{U}^* = \pm 1 \mp 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \pi}{(n \pi)^2} (\cos n \pi - 1) \frac{e^{-\alpha_n T (0.5+t/T)} - e^{-\alpha_n T t/T}}{e^{-\alpha_n T} - 1}$$

poiché: $\cos n \pi (\cos n \pi - 1) = \begin{cases} 2 & \text{per } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$

Si ha in definitiva (Fig. 5): per il periodo « negativo » ⁽¹⁾

$$\bar{U}^* \left[\frac{t}{T} \right] = + 1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{[(2n+1)\pi]^2} \frac{e^{-\alpha_n T (0.5+t/T)} - e^{-\alpha_n T t/T}}{e^{-\alpha_n T} - 1} \quad (6)$$

(1) Per semplicità, si sono scambiati i segni delle due soluzioni.

e per il periodo « positivo »:

$$\bar{U}^* \left(\frac{t}{T} \right) = -1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{[(2n+1)\pi]^2} \frac{e^{-\alpha_n T (0.5+t/T)} - e^{-\alpha_n T t/T}}{e^{-\alpha_n T} - 1} \quad (7)$$

Com'è naturale per $R \rightarrow \infty$ (e per $\alpha_n \rightarrow 0$) il grado di consolidazione coincide con i due valori limite $+1$ e -1 .

3.3. Osservazioni

Le proprietà del mezzo sollecitato e dell'impulso periodico, condizionano quantitativamente il processo di consolidazione, anche se è difficile distinguere il peso relativo delle grandezze in gioco.

Il periodo della sollecitazione, l'altezza dello strato, la permeabilità e la compressibilità del mezzo (implicite queste nel valore di c_v), pur assumendo valori diversi da una situazione all'altra, possono combinarsi in modo tale da portare agli stessi risultati. La particolarità del fenomeno si mostra essenzialmente in due fatti: smorzamento della risposta e sfasamento dei

valori massimi, variabili con R e con la sollecitazione imposta al contorno.

Per una variazione sinusoidale e per valori di $R < 0.1$ lo spessore dello strato interessato alla redistribuzione delle pressioni è notevolmente ridotto durante l'intero periodo; la risposta del mezzo è in opposizione di fase con

lo stimolo esterno per $\frac{1}{3}$ circa del periodo totale;

le isocrone sono molto ravvicinate.

Per $R > 0.1$ il fenomeno si propaga maggiormente in profondità, i ritardi diminuiscono e le isocrone si distanziano; per $R > 1$ il mezzo segue ormai rapidamente l'evolversi del processo.

Diventa inoltre evidente come le pressioni interstiziali assumono valori diversi da zero quando la sollecitazione tende invece ad annullarsi. Una rappresentazione diversa, come quella

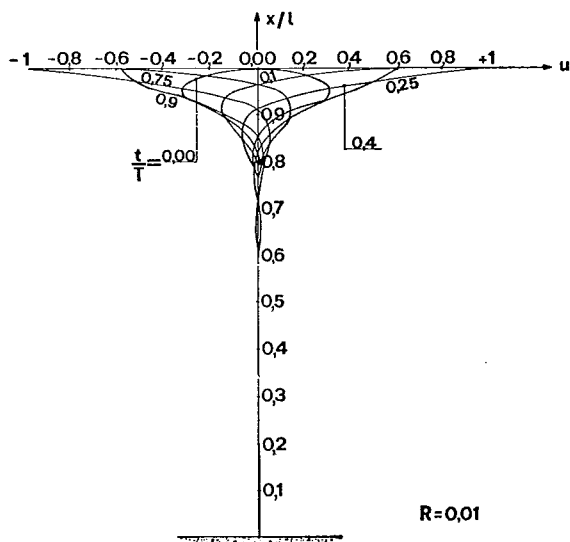


Fig. 6a.

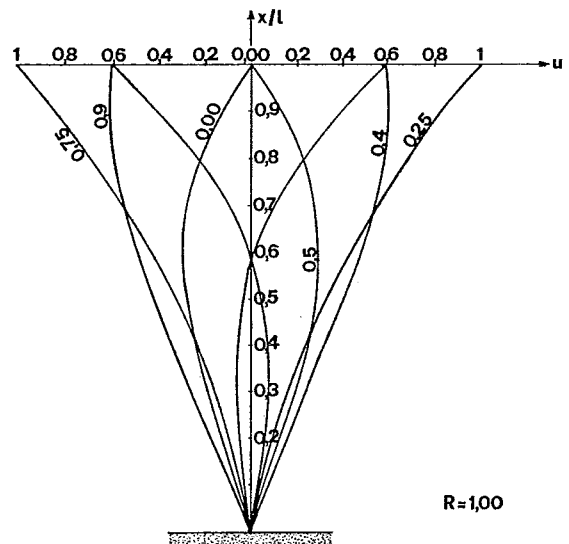


Fig. 6b.

Fig. 6. - Distribuzione delle pressioni $u = f\left(\frac{x}{l}, \frac{t}{T}\right)$, per uno strato limitato da due superfici permeabili, ed una variazione sinusoidale delle pressioni, con $R = 0.01$ e $R = 0.1$.

mostrata ad esempio per $R = 0.01$ e $R = 1$ in Fig. 6 visualizzerebbe meglio lo sfasamento, che nelle figg. 2b - 2d corrisponde a valori delle pressioni più grandi che in una variazione lineare in profondità.

La situazione si modifica per una variazione quadra in superficie. Per $R < 0.1$ lo smorzamento del fenomeno è infatti meno superficiale, ma brusco e irregolare.

Per $0.1 < R < 1$ si può solo osservare come, per questa soluzione, il processo di equalizzazione sia più veloce prima e più lento dopo $\frac{1}{4}$ del periodo, rispetto a quello dovuto ad una variazione sinusoidale, regolarizzandosi per $R = 1$ rispetto alla sollecitazione esterna.

Per $1 < R < 2.5$ la risposta è immediata su tutta l'altezza, le isocrone si avvicinano fino ad unificarsi, per $R = 2.5$, nella sola isocrona che coincide con una variazione lineare in profondità dei rapporti $\frac{u}{V}$.

Per quanto riguarda il grado medio di consolidazione le osservazioni più interessanti sono relative ai valori massimi.

Per una sollecitazione quadra al contorno questi si ottengono per qualunque valore di R solo alla fine di ogni semiperiodo; per una sollecitazione sinusoidale si ottengono invece per tempi minori, ma comunque in ritardo rispetto al massimo della sollecitazione.

Annullando la derivata rispetto al tempo di \bar{U}^* è possibile esprimere analiticamente e quindi rappresentare il ritardo Φ (Fig. 7).

La condizione $\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial (\omega t)} = 0$, si ottiene infatti

per:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} \omega t - \pi/4) &= \\ &= \frac{(e^{2kl} - e^{-2kl}) - 2 \cos kl (e^{kl} - e^{-kl})}{2 \sin kl (e^{kl} + e^{-kl}) - 2 \sin 2kl} \end{aligned}$$

da cui:

$$\Phi = \left[\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin h 2kl - 2 \cos kl \sin h kl}{2 \sin kl \cos h kl - \sin 2kl} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

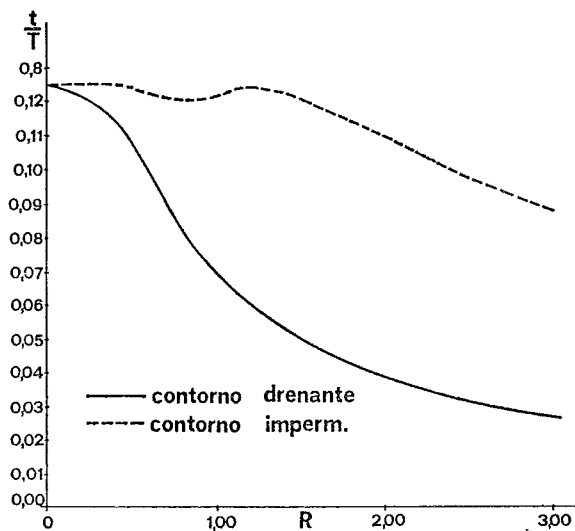


Fig. 7. - Sfasamento tra i valori massimi di $U^*(t)$ e $V_1(t)$ per una variazione periodica sinusoidale delle pressioni ad un contorno, come ritardo $\frac{t}{T}$ in funzione di R .

Si può controllare come

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Phi = 0$$

Derivando si ha:

$$\lim_{kl \rightarrow 0} \frac{\partial [\operatorname{tg}(\omega t - \pi/4)]}{\partial t} = 1$$

e quindi:

$$\operatorname{tg} \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$\Phi = 0$$

Per $R \rightarrow 0$, si ha invece:

$$\lim_{kl \rightarrow \infty} \operatorname{tg}(\omega t - \pi/4) =$$

$$\lim_{kl \rightarrow \infty} \frac{e^{2kl} - 2 e^{kl} \cos kl}{2 e^{kl} \sin kl - 2 \sin kl} = \infty$$

Da cui

$$\Phi = \pi/4$$

Un ultimo diagramma $\bar{U}_{max} = f(R)$ (Fig. 8), relativo alle due situazioni studiate, permette infine di confrontare la velocità di evoluzione e l'entità dei cedimenti che si possono ottenere nei rispettivi processi di equalizzazione.

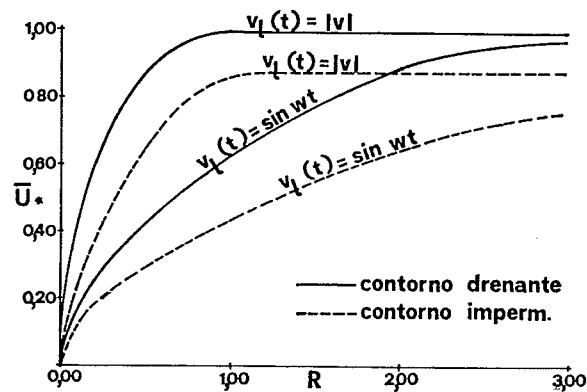


Fig. 8. - Valori massimi del grado di consolidazione in funzione di R.

4. Consolidazione di uno strato limitato da una superficie impermeabile per variazione delle pressioni sull'altra superficie

4.1. Distribuzione delle pressioni

a) Variazione periodica sinusoidale.

Per il piano $x = 0$, il valore delle pressioni non è più nullo; per il piano $x = 1$ la sollecitazione impressa segue ancora la legge:

$$V_1(t) = \sin \omega t$$

Gli sviluppi analitici sono simili a quelli precedenti per lo strato drenato ad ambedue i contorni, La soluzione stazionaria è infatti espressa nella forma:

$$u = A \sin(\omega t + \Phi) \quad (1')$$

con A e Φ , definiti come segue:

$$A = \left| \frac{\cos h kx (1 + i)}{\cos h kl (1 + i)} \right| \quad \Phi = \arg \left\{ \frac{\cos h kx (1 + i)}{\cos h kl (1 + i)} \right\}$$

rispettivamente modulo e argomento del numero complesso W. Si ha:

$$u = \text{Im} \left\{ (\cos \omega t + i \sin \omega t) \frac{e^{k(1+i)(x-1)} - e^{-k(1+i)(x-1)}}{1 + e^{-(1+i)2kl}} \right\}$$

e:

$$\bar{u} = \frac{u}{V_1} = \frac{e^\alpha \sin(\omega t + \alpha) + e^{-\beta} \sin(\omega t - \beta) + e^{\alpha - 2kl} \sin[\omega t + \alpha + 2kl]}{\sin \omega t (1 + 2e^{-2kl} \cos 2kl + e^{-4kl})} + \frac{e^{-(\beta + 2kl)} \sin[\omega t - (\beta - 2kl)]}{\sin \omega t (1 + 2e^{-2kl} \cos 2kl + e^{-4kl})} \quad (2')$$

con: $\alpha, \beta, kl, \omega t, \bar{u}$ definiti come nel paragrafo 3.1 a). Le isocrone \bar{u} per alcuni valori di R sono diagrammate in Figg. 9a - 9d.

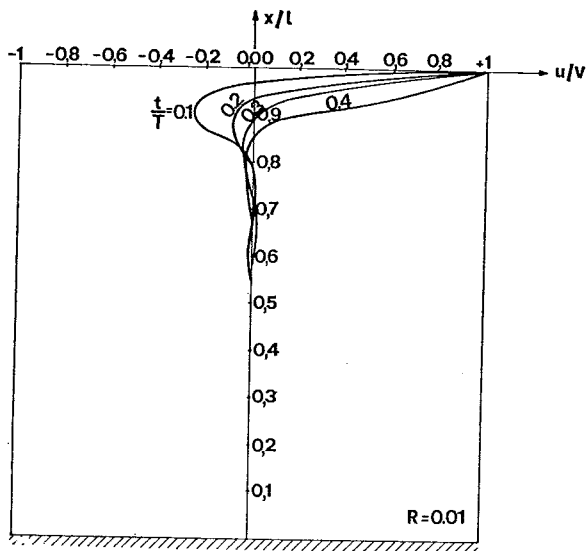


Fig. 9a.

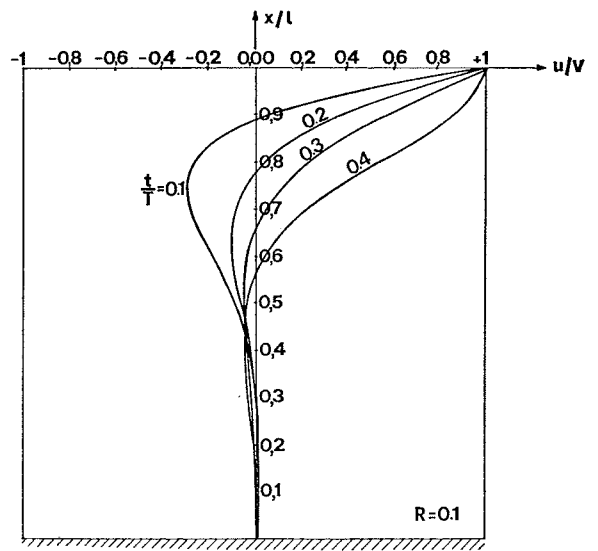


Fig. 9b.

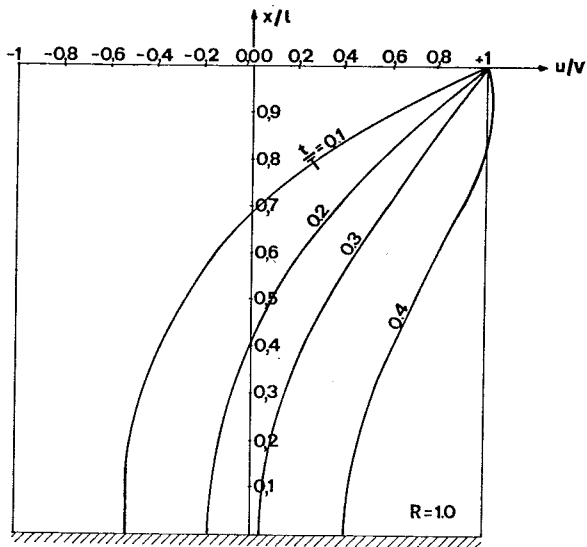


Fig. 9c.

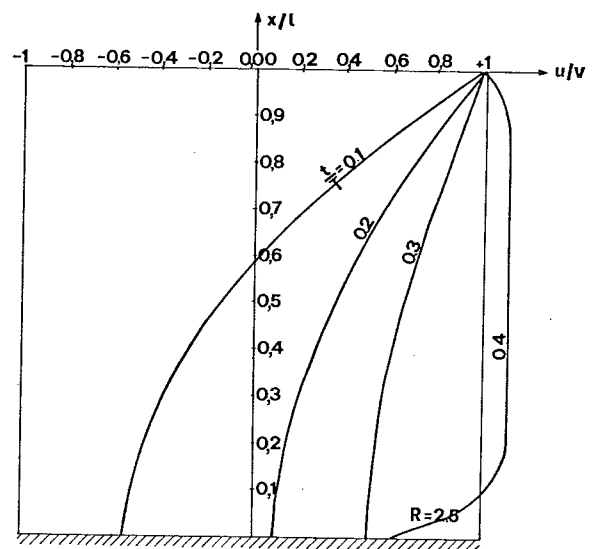


Fig. 9d.

Fig. 9-10. - Rappresentazione adimensionale delle isocrone relative alla consolidazione di uno strato limitato da una superficie impermeabile, per variazione delle pressioni sull'altra superficie, periodica sinusoidale (Figg. 9a-9d), e periodica quadra (Figg. 10a-10d).

b) Variazione periodica quadra.

Sviluppando la soluzione originaria di Carslaw e Jaeger, si ottiene:

— per il periodo « positivo »:

$$\frac{u}{|V|} = 1 - 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \pi}{\pi (2n + 1)} \cos (2n + 1) \frac{\pi x}{l} \frac{e^{-\beta_n T (0.5+t/T)} - e^{-\beta_n T t/T}}{e^{-\beta_n T} - 1} \quad (3')$$

— per il periodo « negativo »:

$$\frac{u}{|V|} = 1 - 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \pi}{\pi (2n + 1)} \cos (2n + 1) \frac{\pi x}{l} \frac{e^{-\beta_n T (0.5 + t/T)} - e^{-\beta_n T t/T}}{e^{-\beta_n T} - 1} \quad (4')$$

uguale e opposta alla espr. (3'), per la simmetria della sollecitazione (Figg. 10a - 10d).

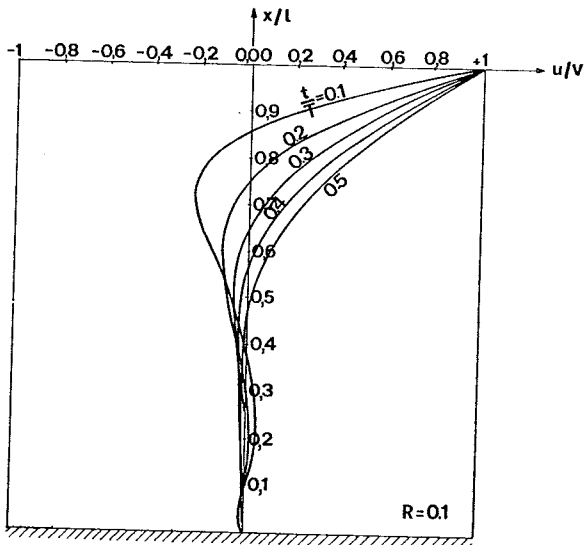


Fig. 10a.

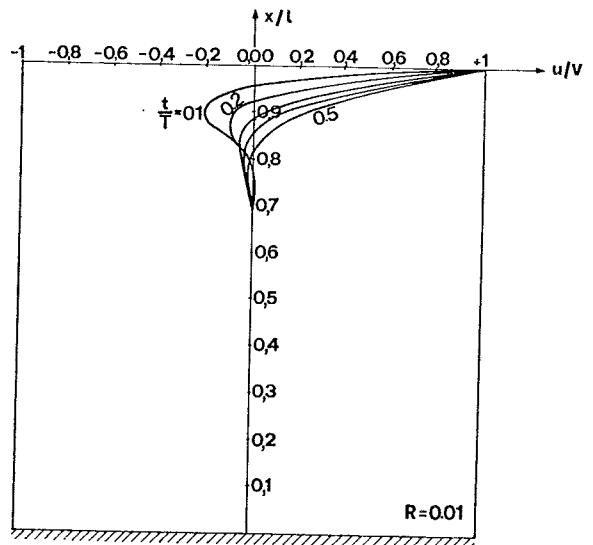


Fig. 10b.

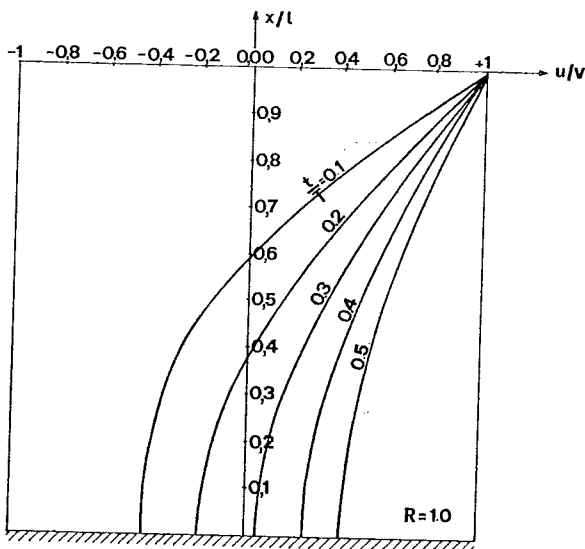


Fig. 10c.

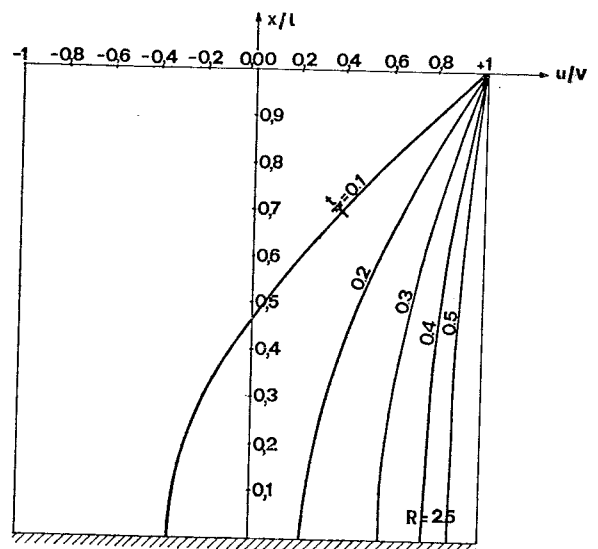


Fig. 10d.

Il coefficiente $\beta_n T$ analogo ad $\alpha_n T$ del problema precedente, è espresso nella forma:

$$\beta_n T = \frac{c_v (2n + 1)^2 \pi^2 T}{4 l^2} = \left[(2n + 1) \frac{\pi}{2} \right]^2 R$$

4.2. Grado di consolidazione medio

Anche in questo caso è opportuno assumere la seconda delle due definizioni del grado di consolidazione \bar{U}^* .

Si ha dunque in generale:

$$\bar{U}^*(t) = \frac{\int_0^l u(x, t) dx}{\int_0^l |V_1(\max.)| dx}$$

a) Variazione periodica sinusoidale.

$$\begin{aligned} \bar{U}^*(t) &= \frac{\int_0^l u(x, t) dx}{\int_0^l [\sin \omega t]_{\max.} dx} = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l u(x, t) dx \end{aligned}$$

con:

$$\int_0^l u(x, t) dx = \text{Im} \left\{ \int_0^l w(x) e^{i\omega t} dx \right\}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{U}^* &= \text{Im} \left\{ \frac{e^{i\omega t} \sinh [kl(1+i)]}{k(1+i) \cosh [kl(1+i)]} \right\} = \\ &= \text{Im} \{Z\} \end{aligned}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2} kl} (\cos \bar{\alpha} + i \sin \bar{\alpha}) \frac{\sinh 2kl + i \sin 2kl}{\cosh 2kl + \cos 2kl}$$

Risulta quindi:

$$\bar{U}^* \left(\frac{t}{T} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \bar{\alpha} \sinh 2kl + \cos \bar{\alpha} \sin 2kl}{\cosh 2kl + \cos 2kl} \quad (5')$$

funzione di R e $\frac{t}{T}$ (Fig. 11).

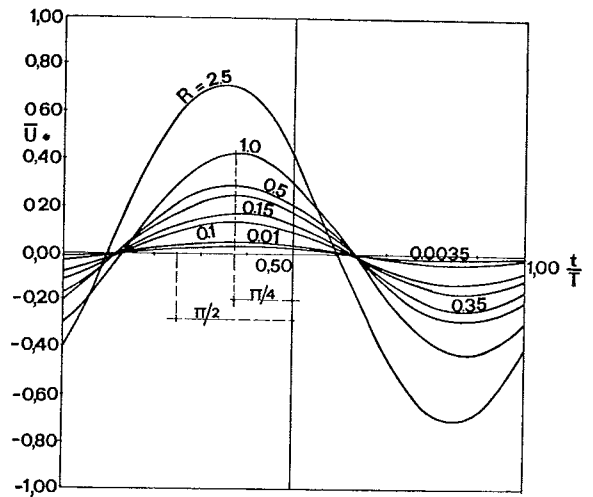


Fig. 11.

Fig. 11-12. - Grado di consolidazione medio per uno strato limitato da una superficie impermeabile e diversi valori di R: variazione delle pressioni periodica sinusoidale (Fig. 11), e periodica quadra (Fig. 12).

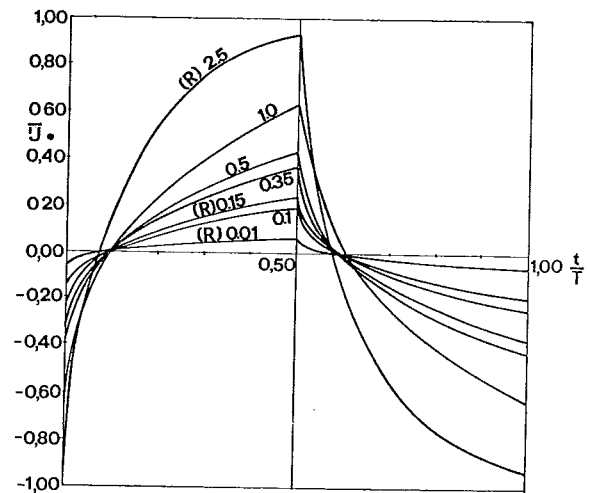


Fig. 12.

Controllando l'espressione di \bar{U}^* per $R \rightarrow \infty$ si trova: $\lim_{kl \rightarrow 0} \bar{U}^* = \sin \omega t$ come già ottenuto precedentemente.

b) Variazione periodica quadra.

Si ha:

$$\bar{U}^* \left(\frac{t}{T} \right) = \frac{\pm \int_0^l V dx \pm \int_0^l 8 V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \pi}{\pi (2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} f(e)}{\int_0^l |V| dx}$$

e quindi:

$$\bar{U}^* \left(\frac{t}{T} \right) = \pm 1 \mp 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \pi}{[(2n+1)\pi]^2} \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\beta_n T (0.5+t/T)} - e^{-\beta_n T t/T}}{e^{-\beta_n T} - 1}$$

poiché:

$$\cos n \pi \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} = 1 \text{ per qualunque valore di } n \text{ si ottiene:}$$

— per il periodo « negativo »:

$$\bar{U}^* = +1 - 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{[(2n+1)\pi]^2} \frac{e^{-\beta_n T} - 1}{e^{-\beta_n T (0.5+t/T)} - e^{-\beta_n T t/T}} \quad (6')$$

— per il periodo « positivo »:

$$\bar{U}^* = -1 + 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{[(2n+1)\pi]^2} \frac{e^{-\beta_n T (0.5+t/T)} - e^{-\beta_n T t/T}}{e^{-\beta_n T} - 1} \quad (7')$$

Le due espressioni (Fig. 12) coincidono dunque con quelle trovate nel caso di due contorni drenati: l'unica differenza è data dal coefficiente β_n al posto di α_n .

4.3. Osservazioni

Per quanto riguarda l'andamento delle curve

$$\frac{u}{V} = f\left(\frac{t}{T}\right) \text{ al variare di } R \text{ e della sollecitazione}$$

impressa, valgono considerazioni analoghe a quelle già svolte per lo strato drenato ad ambedue i contorni. Si può osservare infatti come, per $R < 0.1$, la distribuzione delle pressioni sia

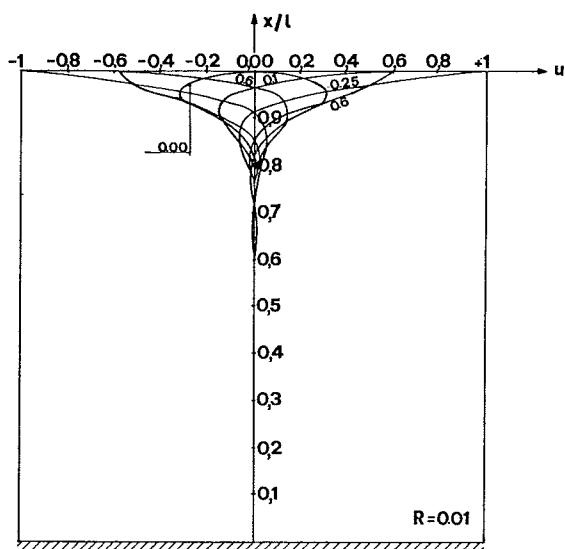


Fig. 13a.

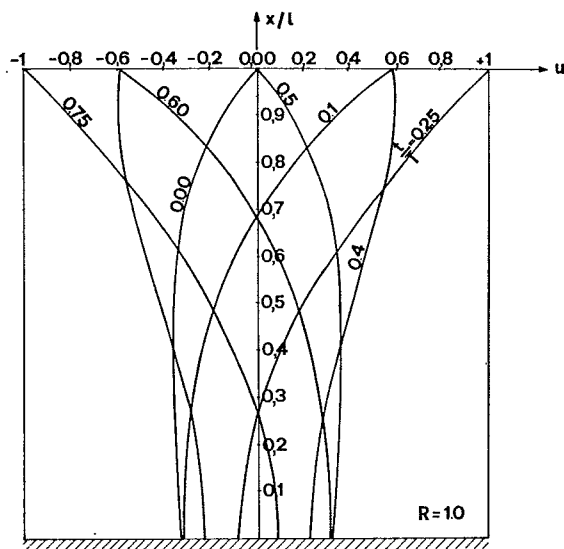


Fig. 13b.

Fig. 13. - Distribuzione delle pressioni $u = f\left(\frac{x}{l}, \frac{t}{T}\right)$ per uno strato limitato da una superficie impermeabile ed una variazione sinusoidale delle pressioni, con $R = 0.01$ e $R = 0.1$.

caratterizzata da uno smorzamento molto rapido in profondità. Gli spessori di terreno interessati al processo di equalizzazione sono anche

in questo caso uguali a circa $\frac{1}{3}$ dello spessore

totale, sia con una sollecitazione quadra che con una sollecitazione sinusoidale. Ancora si può osservare come con una variazione quadra impressa al contorno e per qualunque valore di R , la velocità di evoluzione sia prima maggiore e poi minore di quella relativa ad una variazione sinusoidale, con una distribuzione delle isocrone in funzione di R del tutto simile a quella rilevata precedentemente.

Diventa invece possibile qualche osservazione relativa all'andamento delle isocrone $\frac{u}{V}$, al variare della condizione al contorno.

È interessante notare come per $R \leq 1$ la presenza di una superficie permeabile o impermeabile, ad uno dei due estremi, non comporti in realtà nessuna differenza sensibile nello svolgimento del fenomeno. Solo per $R = 1$ diventa effettivamente possibile riconoscere nel primo caso una maggiore velocità di equalizzazione;

per $\frac{t}{T} < 0.3$ la differenza è evidente per ognuna

delle due sollecitazioni esaminate; per $\frac{t}{T} > 0.3$ e per una variazione quadra delle pressioni,

l'addensarsi delle isocrone presso la retta che coincide con una variazione lineare delle u , mostra inoltre quanto più completo possa essere in questo caso il processo di equalizzazione.

A causa della distorsione che l'annullarsi di V comporta nei valori del rapporto $\frac{u}{V}$, questo stesso fatto compare con meno evidenza per una variazione sinusoidale: bisogna quindi ricorrere ad una diversa rappresentazione (come illustrato per $R = 0.01$ e $R = 1$ in Fig. 13) per distinguere le differenze che si hanno nei due casi.

Per quanto riguarda il grado di consolidazione medio, le curve $\bar{U}^* = f\left(\frac{t}{T}\right)$ sintetizzano in funzione di R le osservazioni relative ai valori massimi di \bar{U}^* , per oscillazioni sinusoidale e quadra delle pressioni al contorno.

Annullando infine la funzione $\bar{U}^* = f(\omega t)$, o la derivata $\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial(\omega t)}$ nel caso di variazione periodica sinusoidale, si trova che le condizioni:

$$\bar{U}^* = 0 \quad \frac{\partial \bar{U}^*}{\partial(\omega t)} = 0$$

sono verificate quando

$$\operatorname{tg} \left[\omega t - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\sinh 2kl}{\sin 2kl}$$

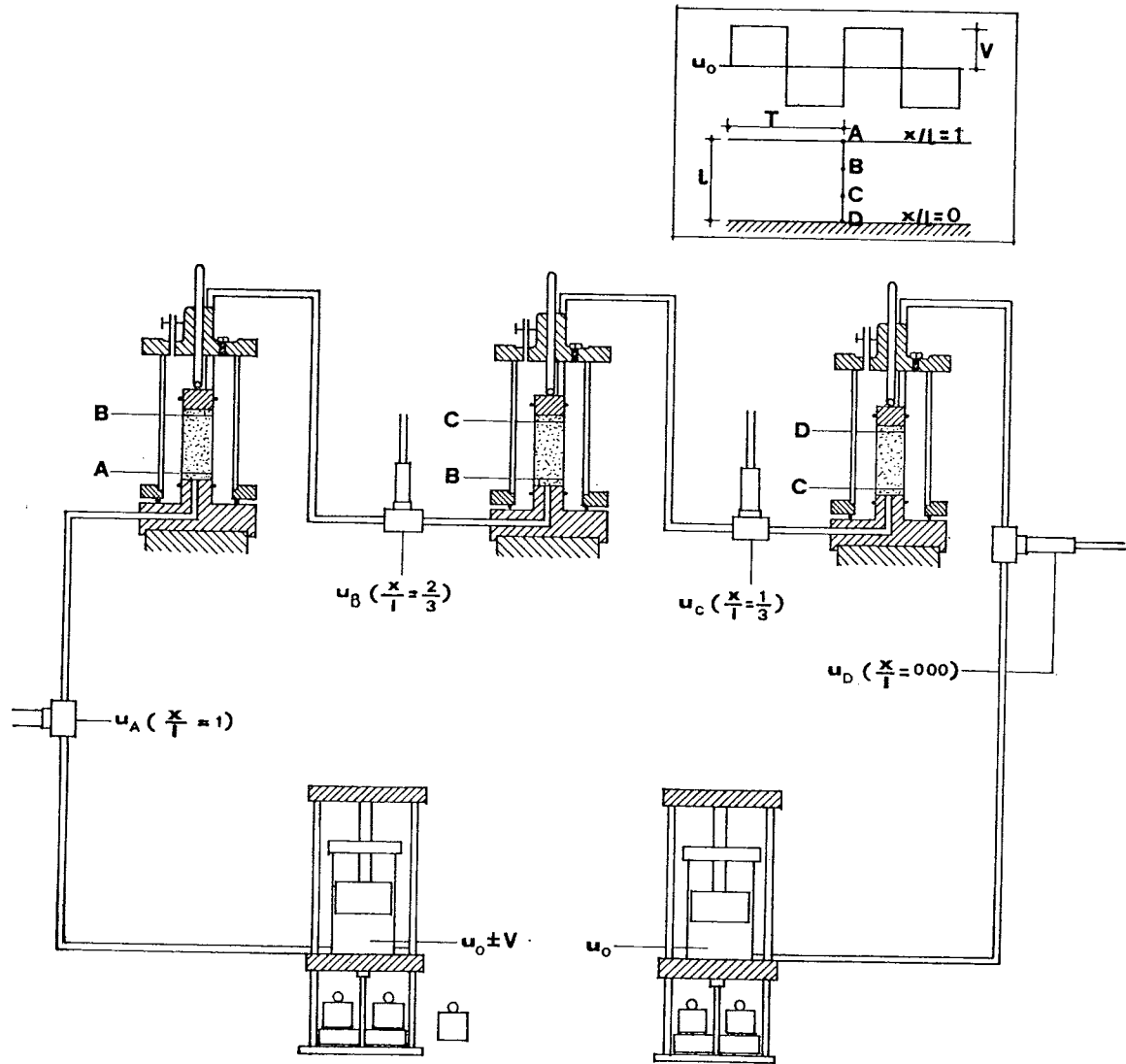


Fig. 14. - Rappresentazione schematica dell'apparecchiatura sperimentale.

da cui si ottiene per il ritardo Φ l'espressione: ⁽²⁾

$$\Phi = \left[\left(\arctan \frac{\sin h 2 kl}{\sin 2 kl} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

Per:

$$\lim_{kl \rightarrow 0} \operatorname{tg} \left[\omega t - \frac{\pi}{4} \right] = 1$$

e quindi:

$$\omega t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi = 0$$

per:

$$R \rightarrow 0$$

$$\lim_{kl \rightarrow 0} \operatorname{tg} \left[\omega t - \frac{\pi}{4} \right] = +\infty$$

$$\omega t = \frac{3}{4} \pi$$

$$\Phi = \frac{\pi}{4}$$

L'andamento della funzione $\Phi = f(R)$ è riportato per confronto in Fig. 7 insieme alla funzione che esprime lo stesso ritardo nel caso dello strato compreso tra due superfici drenate.

Le funzioni $\bar{U}_{\max} = f(R)$ per un'oscillazione quadra e un'oscillazione sinusoidale sono riportate in Fig. 8.

(2) È da notare che la funzione $\frac{\sin h 2 kl}{\sin 2 kl}$ ha dei punti singolari per valori di $R = \frac{4}{\pi n^2}$ ($n = 1, 2, 3 \dots$).

TABELLA I
Caratteristiche dei materiali

	γ (g/cm ³)	W (%)	W _L (%)	I _p (%)	OCR	E (kg/cm ²)	c _v (cm ² /sec)	K (cm/sec)
Argilla di Todi	2.03	21.3	44.9	23.3	1.75	172	2 · 10 ⁻³	1.2 · 10 ⁻⁸
Argilla di Trebisacce	2.06	20.4	36.8	18.8	3	150	1 · 10 ⁻³	0.7 · 10 ⁻⁸

5. Risultati sperimentali

Per il controllo sperimentale si utilizza la soluzione relativa ad una variazione quadra delle pressioni interstiziali, che può essere più semplicemente realizzata in laboratorio.

Con una serie di prove, svolte in due cicli, si è esaminato il comportamento di due terre argillose sovraconsolidate; la prima, proveniente da Todi e prelevata a 12 m di profondità, è costituita in gran parte da argilla grigia con intercalazioni limo-sabbiose; la seconda, proveniente da Trebisacce e prelevata a 13,50 m di profondità, è anch'essa costituita da argilla grigia sovraconsolidata ma con inclusioni diffuse di materiale organico nerastro. Le caratteristiche principali dei materiali sono riportate in Tab. I.

Allo scopo di simulare uno spessore significativo dello strato in consolidazione e di misurare la pressione in più punti intermedi fra le superfici di contorno, si è disposto un collega-

mento in serie fra tre celle triassiali (Fig. 14).

L'oscillazione quadra si è sempre ottenuta mantenendo un estremo del collegamento ad un valore costante della pressione interstiziale e sollecitando l'altro con una diminuzione e un aumento di 0.5 kg/cm², rispetto all'estremo fisso, per un periodo T di 48 ore.

La serie di prove condotta sull'argilla di Todi si è svolta per una prima parte con due contorni drenati e successivamente con un contorno impermeabile e uno drenato.

La serie condotta sull'argilla di Trebisacce si è invece svolta in tre fasi, a contorno inferiore drenato, impermeabile e ancora drenato.

I valori medi delle pressioni interstiziali sono stati rispettivamente di 4 kg/cm² per la prima serie di prove e di 5 kg/cm² per la seconda.

I risultati sperimentali più significativi, espressi nella forma $\frac{u}{V} = f\left(\frac{t}{T}\right)$, per i rapporti

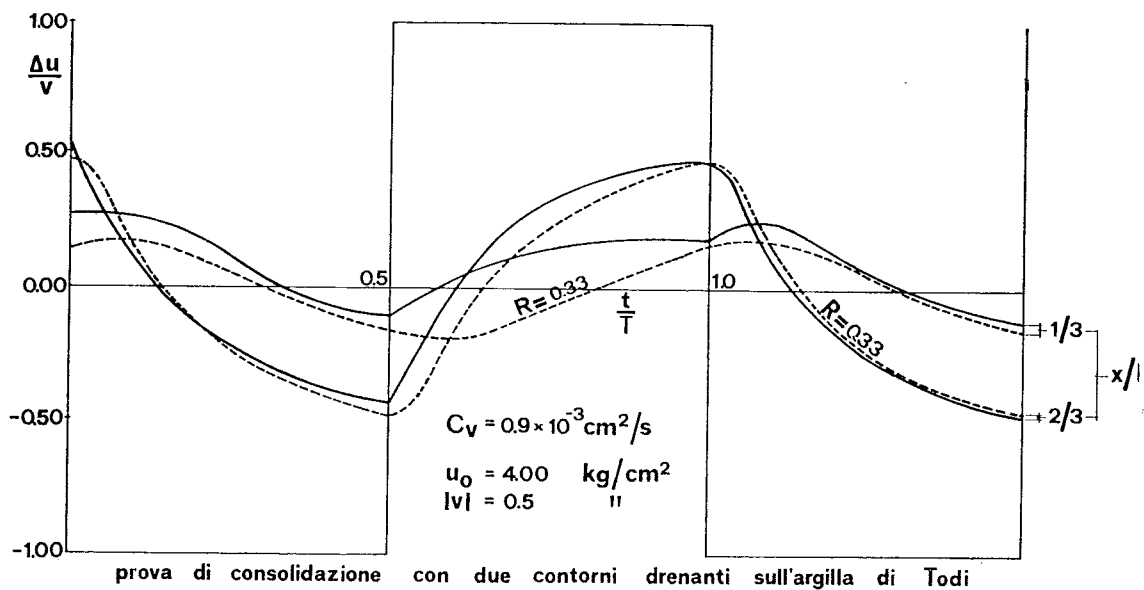


Fig. 15a.

Fig. 15. - Confronto tra le curve sperimentali (a tratto continuo) $\frac{u}{V} = f\left(\frac{t}{T}\right)$ dedotte dalle prove in laboratorio e le curve teoriche (tratteggiate) corrispondenti ai più opportuni valori di R.

$\frac{x}{l} = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0.00$ e per la variazione superficiale

$|V| = 0.5 \text{ kg/cm}^2$, sono riportati nelle figg. 15a, 15b, 15c insieme alle curve teoriche corrispondenti a valori di R che meglio li approssimano; si può rilevare come l'andamento delle curve teoriche e delle curve sperimentali sia molto simile a gli scostamenti praticamente irrilevanti. I coefficienti di consolidazione ricavati da questo confronto (le grandezze $H = 21.6 \text{ cm}$ e $T = 48 \text{ ore}$ sono costanti) differiscono invece da quelli

ottenuti con le normali prove edometriche e riportati in Tab. I, in particolare per l'argilla di Todì. È d'altra parte ben noto che la determinazione di c_v è sensibilmente influenzata dalle modalità di prova.

L'ipotesi di comportamento elastico dello scheletro solido appare comunque valida per oscillazioni non troppo grandi delle pressioni e per spessori limitati dello strato in consolidazione: entro questi limiti è perciò giustificato utilizzare una teoria lineare come quella precedentemente sviluppata.

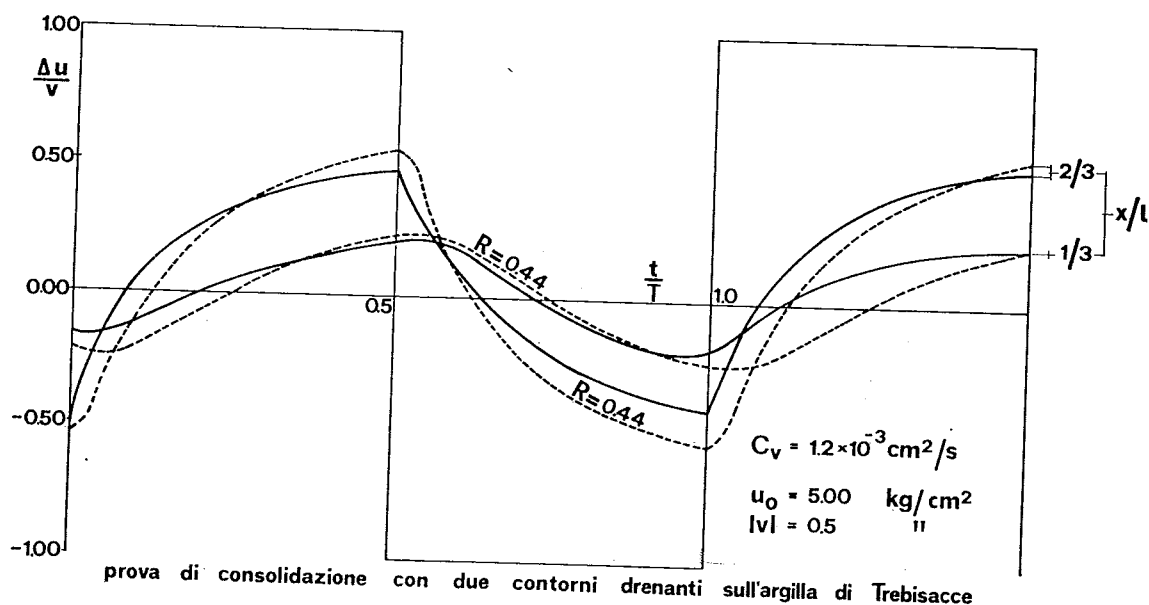


Fig. 15b.

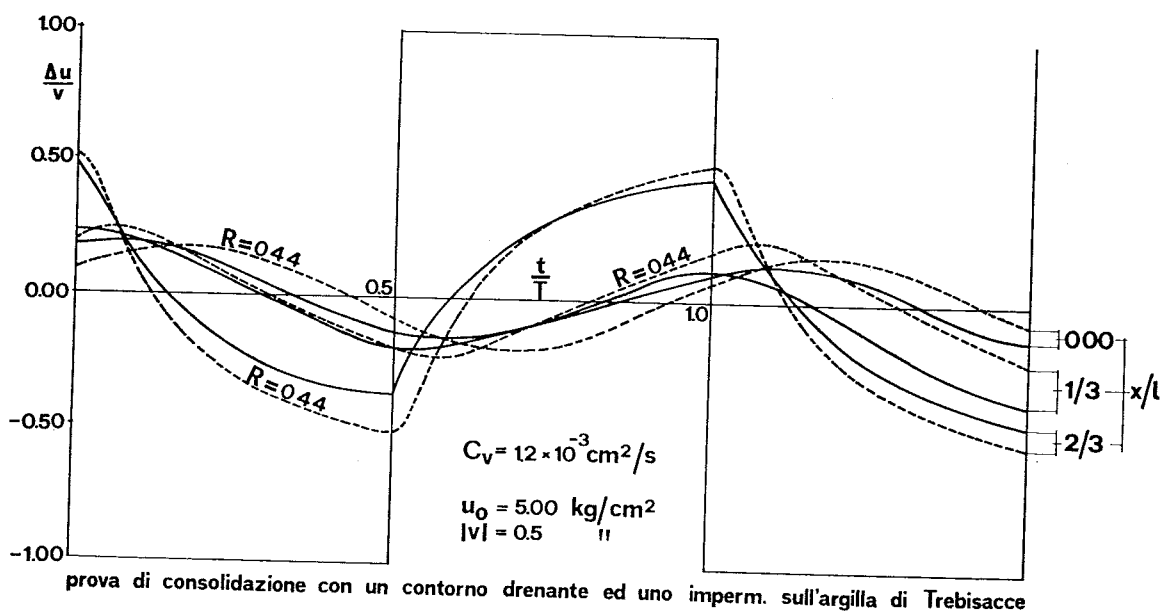


Fig. 15c.

6. Conclusioni

Controllata sperimentalmente l'ipotesi di comportamento elastico dello scheletro solido, gli sviluppi teorici finora seguiti si prestano ad alcune applicazioni in problemi che riguardano soprattutto i terreni stratificati. È noto, ad esempio, come in pendii naturali, con stratificazioni eterogenee, i fenomeni viscosi che interessano i terreni plastici possano provocare una concentrazione di sforzi sfavorevoli fino a produrre condizioni di rottura progressiva [BJERRUM, 1967]. I ritardi che si verificano nel raggiungimento della rottura sono attribuiti al comportamento viscoso del terreno. Alla luce di quanto studiato è però possibile che oltre ai fenomeni viscosi, abbiano una significativa influenza sul comportamento nel tempo dei pendii le variazioni periodiche delle condizioni idrologiche. Si è visto, infatti, come per i più comuni valori del parametro R la risposta del mezzo, in termini di pressione interstiziale massima u , sia sempre in ritardo rispetto alla sollecitazione applicata al contorno; anzi, per valori molto piccoli di R , ad una distanza limitata dal contorno, le pressioni sono in opposizione di fase con la variazione imposta. Si dovrebbe pertanto concludere che le condizioni più sfavorevoli per la stabilità di un pendio, a una determinata profondità, possono verificarsi con notevole ritardo rispetto alla variazione delle condizioni idrauliche al contorno.

In base ai dati disponibili, si è poi spesso osservato come frane di pendii naturali in argille sovraconsolidate, siano quasi sempre dovute a scorrimenti che interessano solo uno spessore limitato di terreno, con stratificazioni più permeabili o con giunti e piani di discontinuità: i movimenti franosi hanno inoltre carattere stagionale.

In queste condizioni è possibile spiegare lo spessore limitato coinvolto nel fenomeno di instabilità (generalmente attribuito al cambiamento improvviso dei parametri di resistenza) con il forte smorzamento osservato, per i più frequenti valori di R , nel processo di equalizzazione delle pressioni indotte da una variazione alternata delle pressioni interstiziali al contorno.

Le soluzioni esaminate trovano una possibilità di applicazione anche in quei fenomeni di subsidenza che dipendono da variazioni periodiche della superficie piezometrica, interpretando in funzione di R il grado di consolidazione medio e il ritardo con cui si manifesta,

rispetto alla sollecitazione applicata, il valor massimo dei cedimenti.

Per le situazioni in cui esistono difficoltà nel definire alcune posizioni del problema, come le condizioni di drenaggio o le caratteristiche di consolidazione dei terreni, la teoria sviluppata permette comunque un confronto degli effetti prodotti dai diversi parametri in gioco e la ricerca quindi di eventuali interventi risolutivi.

RINGRAZIAMENTI

L'A. esprime la sua gratitudine al Prof. F. Aluffi Pentini, per i suggerimenti ricevuti nel superamento delle difficoltà analitiche del problema, e al Sig. F. Brogi per la collaborazione prestata nell'esecuzione delle prove sperimentali.

BIBLIOGRAFIA

- BJERRUM L. (1967) - *Progressive failure in slopes of over-consolidated plastic clay and clay shales*. Proc. ASCE, Vol. 93, no. SM5, p. 5, Settembre.
- CARSLAW H. S., JAEGER J. C. (1958) - *Conduction of heat in solids*. Oxford, Clarendon Press.
- TER-MARTIROSYAN (1973) - Proc. of the VIII Int. Conf. on Soil Mech. And Found. Eng., Mosca, pag. 169.
- VIGGIANI C. (1972) - *Contributo allo studio della consolidazione monodimensionale delle argille*. RIG, no. 4.

SUMMARY

Consolidation under cyclic variations of boundary pore pressure

The paper presents a theoretical study and an experimental research on the consolidation induced by pore pressure periodic fluctuations.

The theoretical studies refer to the theory of conduction of heat in solids. Such a theory is based on hypotheses similar to those of Terzaghi's linear consolidation and it allows the development of some solutions presented here. Thus, the results can be adapted to geotechnical problems in order to describe the most frequent and interesting phenomena occurring in practical cases.

The consolidation of a clay layer drained at one or both boundaries are respectively examined for a sinusoidal and a square oscillation of the surface pore pressure.

Firstly, the theoretical results have been elaborated and then presented as dimensionless quantities depending on a dimensionless parameter that synthesizes the main features of the problem.

Secondly, the same results have been experimentally verified. Since the theory is based on a linear stress-strain constitutive law, it is interesting to control the validity limits of the established relations.

To this purpose, a series of laboratory tests have been carried out on two overconsolidated clays; the experimental data confirm the above-mentioned hypothesis so as to allow the use of theoretical solutions especially for stratified soil studies.

Some phenomena, which are frequent in stability or subsidence problems relative to periodic variations of the hydrologic system, could be possibly justified by the final conclusions of the presented study.