

Determinazione delle caratteristiche di una roccia anisotropa***

G. CREA *, D. MARTINO *, R. RIBACCHI **

SOMMARIO: Misure di deformazione in prove di compressione uniassiale permettono di determinare le 21 costanti elastiche di una roccia anisotropa e di valutare se il comportamento della roccia, nell'ambito delle misure effettuate, è assimilabile a modelli più semplici, caratterizzati da elementi di simmetria e quindi da un numero minore di costanti elastiche indipendenti.

Le tecniche adottate sono illustrate mediante i risultati di misure effettuate su uno gneiss (« serizzo della Val d'Ossola »). Per carichi non molto elevati il comportamento della roccia è risultato ben assimilabile a quello di un materiale ortotropo che soddisfa inoltre l'ipotesi di Saint-Venant (isoG). Ciò può essere spiegato assumendo che in tali condizioni l'anisotropia della roccia sia essenzialmente dovuta a sistemi di microfessure aperte in essa presenti.

Le direzioni principali di elasticità non coincidono completamente con quelle ricavabili dalla tessitura macroscopica della roccia.

1. Premessa

Una generica roccia anisotropa è caratterizzata da 21 costanti elastiche che collegano lo stato di sollecitazione allo stato di deformazione. In un generico sistema di riferimento X Y Z si può scrivere:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ \text{simm.} & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

cioè sinteticamente:

$$\{\varepsilon\} = [a] \cdot \{\sigma\} \quad (2)$$

La matrice simmetrica a è detta matrice dei coefficienti di deformazione; essa, per una stessa roccia, dipende dalla orientazione della terna di riferimento.

In alcuni casi vengono utilizzati, anziché i coefficienti di deformazione, le cosiddette « costanti tecniche » e le relazioni sforzi-deformazioni possono essere scritte nel modo seguente [LEKHNITSKII, 1963]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu_{12} & \nu_{13} & \eta_{1,23} & \eta_{1,13} & \eta_{1,12} \\ E_1 & E_1 & E_1 & E_1 & E_1 & E_1 \\ \nu_{21} & 1 & \nu_{23} & \eta_{2,23} & \eta_{2,13} & \eta_{2,12} \\ E_2 & E_2 & E_2 & E_2 & E_2 & E_2 \\ \nu_{31} & \nu_{32} & 1 & \eta_{3,23} & \eta_{3,13} & \eta_{3,12} \\ E_3 & E_3 & E_3 & E_3 & E_3 & E_3 \\ \eta_{23,1} & \eta_{23,2} & \eta_{23,3} & 1 & \mu_{23,13} & \mu_{23,12} \\ G_{23} & G_{23} & G_{23} & G_{23} & G_{23} & G_{23} \\ \eta_{13,1} & \eta_{13,2} & \eta_{13,3} & \mu_{13,23} & 1 & \mu_{13,12} \\ G_{13} & G_{13} & G_{13} & G_{13} & G_{13} & G_{13} \\ \eta_{12,1} & \eta_{12,2} & \eta_{12,3} & \mu_{12,23} & \mu_{12,13} & 1 \\ G_{12} & G_{12} & G_{12} & G_{12} & G_{12} & G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

* Dott. ing. Giovanni CREA e Dott. ing. Domenico MARTINO, *Corpo delle Miniere*, Ufficio Nazionale Minerario Idrocarburi, Roma.

** Prof. ing. Renato RIBACCHI, incaricato di *Meccanica delle Rocce*, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma.

*** Ricerca svolta nel quadro del Contratto CRIS 18/1973 tra l'ENEL e l'Istituto di Arte Mineraria dell'Università di Roma.

in cui E_i sono i moduli di Young, ν_{ij} i coefficienti di Poisson, G_{ij} i moduli di taglio, $\mu_{ij,kl}$ i coefficienti di Chentsov, $\eta_{i,jk}$ e $\eta_{jk,i}$ i coefficienti di mutua influenza rispettivamente del 1° e del 2° ordine.

Si intende qui esporre un metodo per la determinazione completa delle caratteristiche elastiche di una roccia a partire da misure di deformazione effettuate in prove di compressione uniassiale. Nel corso di tale analisi si può accertare se il comportamento elastico della roccia può essere ricondotto a modelli più semplici, caratterizzati da vari tipi di simmetria e quindi da un numero minore di coefficienti di deformazione indipendenti.

Poiché le caratteristiche di anisotropia elastica di una roccia dipendono essenzialmente dalla distribuzione dell'orientazione dei reticoli delle specie mineralogiche che li costituiscono e dalla distribuzione dell'orientazione delle microfessure, si può dimostrare [CREA, MARTINO e RIBACCHI, 1976] che i più tipici modelli di anisotropia elastica, oltre a quello generico espresso dalla relazione (1), sono i seguenti: *Simmetria monoclina*: è caratterizzata da un piano di simmetria elastica; assumendo l'asse 2 diretto come la normale a tale piano si ha:

$$a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0 \quad (4)$$

ortotropia: è caratterizzata da tre piani di simmetria elastica le cui intersezioni individuano tre assi principali di elasticità.

Assumendo questi come assi di riferimento, risultano nulli oltre quelli del caso precedente anche i coefficienti

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0 \quad (5)$$

In termini di costanti tecniche sono nulli, sempre rispetto agli assi principali, i coefficienti di Chentsov e i coefficienti di mutua influenza del 1° e del 2° ordine;

ortotropia isoG: in tale modello semplificato di comportamento ortotropo, già discusso da Saint Venant, i moduli di taglio non sono indipendenti dalle altre costanti elastiche ma sono legati ad essi tramite relazioni:

$$1/G_{ij} = 1/E_i + 1/E_j + 2\nu_{ij}/E_i \quad (6)$$

isotropia trasversale: è presente un asse di simmetria circolare, assunto il quale come asse 3 sussistono per le relazioni sforzi-deformazioni

le stesse condizioni del caso ortotropo con in più:

$$a_{11} = a_{22} \quad a_{13} = a_{23} \quad a_{44} = a_{55} \quad a_{66} = 2(a_{11} - a_{12}) \quad (7)$$

isotropia trasversale isoG: oltre alle condizioni del caso precedente si verifica inoltre:

$$a_{55} = a_{11} + a_{33} - 2a_{13} \quad (8)$$

isotropia: la roccia è caratterizzata da 2 sole costanti elastiche indipendenti poiché si ha:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = a_{33} \\ a_{12} &= a_{13} = a_{23} \\ a_{44} &= a_{55} = a_{66} = 2(a_{11} - a_{12}) \end{aligned} \quad (9)$$

e tutti gli altri coefficienti sono uguali a zero.

Nella tabella 1 sono riportati i parametri incogniti da determinare con le prove nei vari modelli di anisotropia.

TABELLA 1

Parametri da determinare in vari modelli di anisotropia elastica

Modello	Costanti elastiche	Orientazione direzioni principali	Totale
Generico	21	—	21
Simmetria monoclina	13	2	15
Ortotropia	9	3	12
Ortotropia isoG	6	3	9
Isotropia trasversale	5	2	7
Isotropia trasversale isoG	4	2	6
Isotropia	2	—	2

In generale occorrerà accertare quale è il modello più semplice al quale può essere ricondotto il comportamento della roccia e determinare sia le costanti elastiche, sia le (o la) direzioni principali incognite.

In taluni casi indicazioni sul tipo di modello di anisotropia e sulla plausibile orientazione delle direzioni principali sono già disponibili per altra via, per cui il numero dei parametri incogniti da determinare si riduce.

2. Determinazione dei coefficienti di deformazione nel caso generico

Sia X Y Z la terna di riferimento fondamentale rispetto alla quale si vogliono determinare le costanti elastiche della roccia. Supponiamo

che venga ricavato un provino con asse avente orientazione arbitraria e nel corso di una prova uniassiale venga rilevata la deformazione della roccia in un punto della superficie del provino; sia $X' Y' Z'$ una terna collegata al provino avente l'asse X' diretto secondo l'asse del provino e l'asse Y' passante per il punto di misura. Con ε_l e ε_t verranno indicate rispettivamente la deformazione longitudinale (secondo l'asse X')

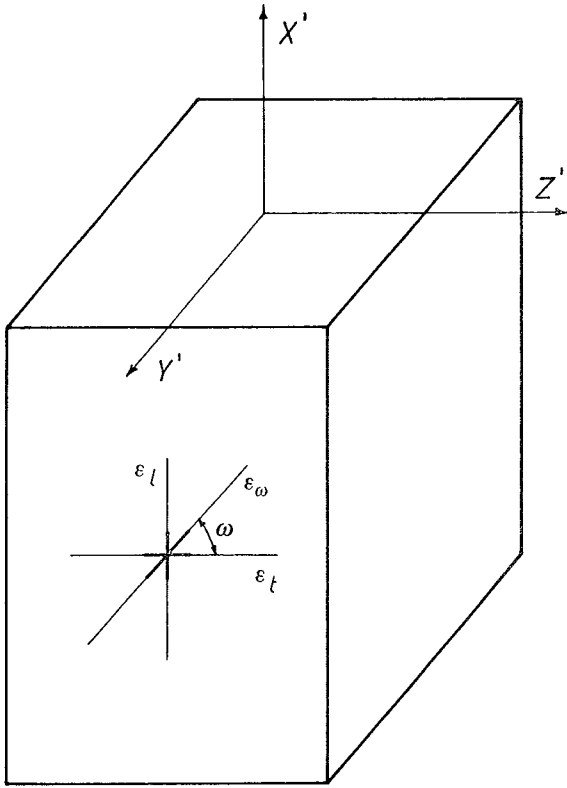


Fig. 1. - Orientazione del provino e delle basi di misura della deformazione.

e trasversale (secondo l'asse Z') e con ε_ω la deformazione in una direzione arbitraria formante un angolo ω con l'asse Z' (fig. 1).

Se \mathbf{a} ed \mathbf{a}' sono le matrici dei coefficienti di deformazione riferite rispettivamente alla terna fondamentale $X Y Z$ e alla terna $X' Y' Z'$, si ha:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{G}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{G}^T(\mathbf{H}) \quad (10)$$

in cui $\mathbf{G}(\mathbf{H})$ è una matrice 6×6 i cui termini sono funzione dei coseni direttori della terna $X' Y' Z'$ rispetto alla terna $X Y Z$ [MARTINO e RIBACCHI, 1971; MARTINETTI *et al.*, 1975] e in cui \mathbf{G}^T indica la matrice trasposta.

Indicando con a_{ij} e G_{ij} , i generici termini delle matrici \mathbf{a} e \mathbf{G} la relazione (10) è equivalente a:

$$a'_{ij} = \sum_{k=1}^6 \sum_{m=1}^6 G_{ik} G_{jm} a_{km} \quad (11)$$

A titolo di esempio, la terna fondamentale di riferimento può convenientemente essere assunta con l'asse X diretto verso Nord, l'asse Y diretto verso Est e l'asse Z diretto verso il basso. Si può giungere alla terna $X' Y' Z'$ con tre successive rotazioni [MARTINO e RIBACCHI, 1971], per cui indicando con ψ l'azimut dell'asse del provino (positivo in senso orario), con φ l'inclinazione sull'orizzontale (positiva verso il basso) e con ϑ l'angolo tra l'asse diametrale orizzontale del provino e l'asse Y' , la matrice \mathbf{H}' dei coseni direttori della terna $X' Y' Z'$ solidale al provino, rispetto alla terna fondamentale $X Y Z$, è data da (1):

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \\ \sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ \sin \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \quad (12)$$

In base alla (11) la deformazione assiale del provino sotto l'azione di un carico uniassiale σ , è legata linearmente ai 21 coefficienti di deformazione incogniti relativi alla terna fondamentale, tramite 21 coefficienti $b^{(1)}_{km}$ che dipendono dall'orientazione del provino:

$$\frac{\varepsilon'}{\sigma} = a'_{11} = b^{(1)}_{11}(\varphi, \psi) a_{11} + \dots + b^{(1)}_{12}(\varphi, \psi) a_{12} + \dots + b^{(1)}_{66}(\varphi, \psi) a_{66} \quad (13)$$

in cui:

$$b^{(1)}_{kk} = G^2_{1k} \quad b^{(1)}_{km} = 2 G_{1k} G_{1m} \quad (k \neq m) \quad (14)$$

analogamente per la deformazione trasversale si ha:

$$\frac{\varepsilon'}{\sigma} = a'_{13} = b^{(1)}_{11}(\varphi, \psi, \vartheta) a_{11} + \dots + b^{(1)}_{12}(\varphi, \psi, \vartheta) a_{12} + \dots + b^{(1)}_{66}(\varphi, \psi, \vartheta) a_{66} \quad (15)$$

e per la distorsione γ^{II} si ha:

$$\frac{\gamma^{II}}{\sigma} = a'_{15} = b^{(II)}_{11}(\varphi, \psi, \vartheta) a_{11} + \dots + b^{(II)}_{12}(\varphi, \psi, \vartheta) a_{12} + \dots + b^{(II)}_{66}(\varphi, \psi, \vartheta) a_{66} \quad (16)$$

(1) Se il provino è diretto come l'asse Z si può assumere $\psi = 0$ e indicare con ϑ l'angolo tra l'asse Y e l'asse Y' .

Poiché:

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon_t \cos^2 \omega + \varepsilon_l \sin^2 \omega + \gamma_{tl} \sin \omega \cos \omega \quad (17)$$

si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_\omega}{\sigma} &= b^{(\omega)_{11}}(\varphi, \psi, \vartheta, \omega) a_{11} + \dots + \\ &+ b^{(\omega)_{12}}(\varphi, \psi, \vartheta, \omega) a_{12} + \dots + \\ &+ b^{(\omega)_{66}}(\varphi, \psi, \vartheta, \omega) a_{66} \end{aligned} \quad (18)$$

in cui:

$$\begin{aligned} b^{(\omega)_{km}} &= b^{(t)_{km}} \cos^2 \omega + \\ &+ b^{(l)_{km}} \sin^2 \omega + b^{(tl)_{km}} \sin \omega \cos \omega \end{aligned} \quad (19)$$

La relazione (18) potrebbe essere utilizzata per determinare i 21 coefficienti di deformazione incogniti a_{ij} eseguendo 21 misure di deformazione indipendenti su provini diversi. In pratica risulta indispensabile eseguire un numero di misure molto più elevato e determinare i coefficienti di deformabilità con una analisi di regressione.

Nella scelta di orientazione dei provini e della direzione degli estensimetri occorre evitare che si verifichino condizioni di collinearità, cioè dipendenza lineare tra i parametri $b^{(\omega)_{km}}$. Condizioni di collinearità possono essere individuate mediante appositi test, ma più difficile risulta mettere in vista condizioni di quasi collinearità che portano a stime scadenti di alcuni dei coefficienti di deformabilità.

Un caso particolare che assume spesso importanza in pratica si verifica quando possono essere utilizzate solo misure di deformabilità assiale (cioè moduli di Young). Ciò accade ad esempio quando si hanno a disposizione provini ricavati da carote di sondaggi in direzioni diverse ma non orientate.

In questo caso si può evidentemente utilizzare solo la relazione (13) che, esplicitando i coefficienti $b^{(l)_{km}}(\varphi, \psi)$, si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{(l)}}{\sigma} &= a'_{11} = l_1^4 a_{11} + m_1^4 a_{22} + \\ &+ n_1^4 a_{33} + (2a_{12} + a_{66}) l_1^2 m_1^2 + \\ &+ (2a_{23} + a_{44}) m_1^2 n_1^2 + (2a_{13} + a_{55}) l_1^2 n_1^2 + \\ &+ 2a_{34} n_1^3 m_1 + \\ &+ 2a_{24} n_1 m_1^3 + 2a_{15} l_1^3 n_1 + 2a_{35} n_1^3 l_1 + 2a_{16} l_1^3 m_1 + \\ &+ 2a_{26} m_1^3 l_1 + 2(a_{14} + a_{56}) l_1^2 m_1 n_1 + 2(a_{25} + a_{46}) \cdot \\ &\cdot m_1^2 l_1 n_1 + 2(a_{36} + a_{45}) n_1^2 m_1 l_1 \end{aligned} \quad (20)$$

in cui l_1, m_1, n_1 sono i coseni direttori dell'asse del provino rispetto alla terna fondamentale.

Data la struttura della (20) risulta possibile eseguire soltanto 15 misure di deformazione assiale indipendenti, che consentono di determinare 9 delle 21 costanti elastiche della roccia riferite alla terna fondamentale X Y Z e 6 relazioni tra le rimanenti 12 costanti. Eseguendo soltanto misure di deformazione assiale non è possibile pertanto determinare tutte le costanti elastiche della roccia, ma i dati ricavati dall'analisi di regressione permettono di calcolare il modulo della roccia in qualsiasi direzione.

3. Ricerca di modelli semplificati di anisotropia della roccia

Il problema consiste nel valutare se il comportamento della roccia è assimilabile a modelli più semplici (dotati cioè di più elevato grado di simmetria) e, in caso positivo, nel determinare la direzione degli assi principali e i nuovi valori delle costanti elastiche conformi a tale assunzione.

Qualora si siano determinate le costanti elastiche rispetto al sistema fondamentale, la procedura più conveniente per tale analisi consiste nel calcolare i coefficienti S_i che esprimono le deformabilità della roccia sotto l'azione di una pressione idrostatica p .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} \cdot p \quad (21)$$

dalla (1) si ha che:

$$S_i = a_{1i} + a_{2i} + a_{3i} \quad (22)$$

Se si costruisce la matrice [S] eguale a:

$$\begin{aligned} [S] &= \begin{bmatrix} S_1 & S_6/2 & S_5/2 \\ & S_2 & S_4/2 \\ & & S_3 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{p} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ & \varepsilon_2 & \gamma_{23}/2 \\ & & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

è evidente che essa si trasforma in funzione dell'orientazione degli assi coordinati con le stesse leggi della matrice di deformazione e pertanto essa avrà tre direzioni principali corrispondenti agli autovettori della [S].

Per motivi di simmetria le direzioni principali di elasticità della roccia, se esistono, devono coincidere con una delle direzioni principali della [S] (nel caso di simmetria monoclina) o con le tre direzioni principali della [S] (nel caso di roccia ortotropa).

Si possono quindi assumere come assi di riferimento, che verranno indicati con X_e , Y_e e Z_e , le direzioni principali della matrice [S]. In tal caso, indicando con H_e la matrice dei coseni direttori della terna X_e , Y_e , Z_e rispetto alla X , Y , Z , la matrice H'' della terna X' , Y' , Z' collegata al provino e al punto di misura rispetto alla terna X_e , Y_e , Z_e diviene:

$$H'' = H' \cdot H_e^T \quad (24)$$

e quindi si può scrivere:

$$a' = G(H'') \cdot a^{(e)} \cdot G^T(H'') \quad (25)$$

$a^{(e)}$ è la matrice dei coefficienti di deformazione rispetto alla terna X_e , Y_e , Z_e , presunta terna principale di elasticità, i cui termini possono ora essere ricavati mediante un'analisi di regressione, analoga a quella svolta sulla base della (11).

La ricerca del più semplice modello di anisotropia per la roccia in esame risulta a questo punto agevole, in quanto ciascuno di tali modelli corrisponde analiticamente al fatto che tra i vari coefficienti di deformabilità sussistono una o più relazioni lineari; la validità delle varie ipotesi può pertanto essere verificata, ad un prefissato limite di fiducia, con gli usuali metodi dell'analisi di regressione [DRAPER, 1966].

A titolo di esempio, l'ipotesi di ortotropia della roccia può essere verificata controllando che l'eliminazione dalla regressione dei 12 regressori corrispondenti ai coefficienti di Chentsov e ai coefficienti di mutua influenza di 1° e 2° ordine non riduca significativamente la varianza residua delle osservazioni. Come è noto, si utilizza a tale scopo il test di Fisher; indicando con $SSR(m)$ la somma dei quadrati delle deviazioni dei valori osservati dai valori stimati con una regressione a m variabili e con n il numero totale di misure di deformazione, il valore F calcolato come:

$$F = \frac{\frac{SSR(21) - SSR(9)}{21 - 9}}{\frac{SSR(21)}{n - 21}} \quad (26)$$

viene confrontato con il valore F_0 (12, $n - 21$) ad un prefissato livello di probabilità.

Se in base a tale test viene accettato il modello semplificato di anisotropia ipotizzato si ricalcolano i valori corretti delle costanti elastiche.

I limiti di fiducia delle orientazioni degli assi principali possono essere determinati con una tecnica del tutto analoga a quella adottata in MARTINETTI e RIBACCHI [1970] per valutare i limiti di fiducia delle direzioni principali dello stato di sollecitazione originario sulla base di misure di deformazione in situ.

Nel caso in cui le misure sperimentali siano limitate alla determinazione della sola deformabilità assiale, il procedimento qui sopra illustrato non è applicabile, in quanto non si possono calcolare i coefficienti S_i tramite la (22). Con i parametri ricavati dalla regressione corrispondente alla (20) è però possibile determinare l'andamento stimato del modulo elastico nelle diverse direzioni e rappresentarlo ad esempio mediante curve di livello su una proiezione stereografica. Tale rappresentazione mette in vista se sono presenti elementi di simmetria (almeno approssimata). In caso positivo è possibile assumere assi di riferimento concordanti con le direzioni principali presunte ricavate da tali elementi di simmetria e procedere in modo analogo al caso precedente.

A titolo di esempio l'ipotesi di ortotropia può essere verificata mediante test di significatività degli ultimi 9 regressori della (20). Se il valore di F calcolato come

$$F = \frac{\frac{SSR(15) - SSR(6)}{15 - 6}}{\frac{SSR(15)}{n - 15}} \quad (27)$$

risulta significativo al livello di probabilità prescelto, l'ipotesi di ortotropia deve essere respinta. In caso contrario non si può invece raggiungere una conclusione sicura, in quanto non si hanno elementi su alcuni singoli valori dei coefficienti di deformazione (ad esempio a_{14} e a_{56}) che compaiono accoppiati nella (20).

In alcuni casi, indicazioni sulla presenza di elementi di simmetria sono disponibili prima dell'esecuzione delle prove e permettono quindi di individuare preliminarmente una o tutte le direzioni principali di elasticità. Tali direzioni possono ad esempio essere fornite dall'aspetto macroscopico della roccia (come si verifica per

le rocce scistose) o dall'andamento della velocità e dell'attenuazione di onde elastiche in funzione dell'orientazione del percorso.

Se tali indicazioni potessero essere considerate del tutto attendibili, il problema della determinazione delle costanti elastiche della roccia si semplificherebbe notevolmente e potrebbe essere risolto eseguendo poche prove su campioni orientati secondo alcune direzioni ben definite rispetto agli assi principali. In linea generale è però da tenere presente da un lato che gli elementi forniti dall'aspetto macroscopico della roccia, in alcune rocce da noi investigate, sono risultati del tutto ingannevoli, dall'altro che la simmetria rilevabile in base a misure di propagazione di onde elastiche è collegata solo in modo indiretto alla simmetria della deformabilità elastica.

Per tali motivi è consigliabile assumere le indicazioni fornite da questi metodi solo come ipotesi di partenza e verificarne possibilmente la validità con test statistici analoghi a quelli indicati nella (26) e (27).

Sulla base dello schema indicato nei precedenti paragrafi è stato preparato un programma di calcolo in FORTRAN con il quale si può ottenere la stima dei coefficienti di deformazione e dei loro limiti di fiducia e si possono individuare gli elementi di simmetria elastica eventualmente presenti.

4. Risultati sperimentali

Le prove sono state eseguite su uno gneiss proveniente dal Val d'Ossola (Alpi Occidentali) noto con il nome di « serizzo » ed estesamente coltivato come pietra ornamentale. Esso è costituito per circa il 10% da biotite, per il 75% da feldspati e per circa il 15% da quarzo. La roccia presenta una evidente struttura planare (in senso statistico) messa in evidenza da letti ondulati di mica che avvolgono individui cristallini di feldspato appiattiti (figg. 2 e 3).

Poiché il blocco di « serizzo » fornito da una delle cave della regione non era orientato è stata assunta una terna di riferimento avente l'asse Z normale alla struttura planare presente nella roccia e gli altri due assi in posizione arbitraria.

Dal blocco sono stati ricavati 27 provini cilindrici con diametro 62 mm ed altezza circa doppia, la cui orientazione è sinteticamente riportata nella figura 4. Ciascun provino è stato sottoposto a compressione uniassiale e ne sono

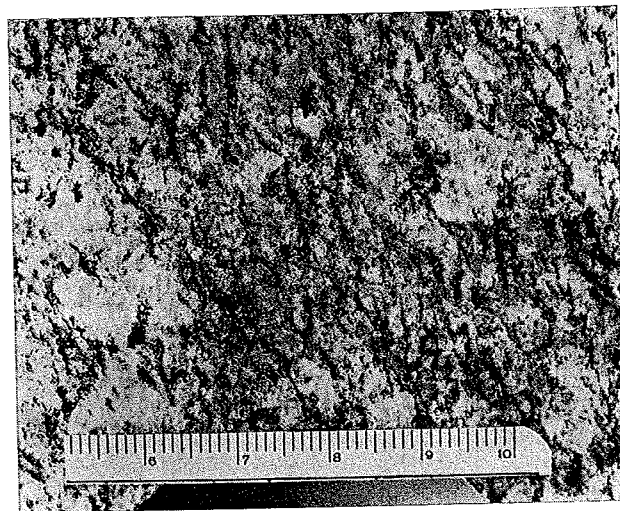


Fig. 2. - Macrofotografia di un campione di serizzo, tagliato perpendicolarmente all'orientazione dei letti di biotite, che mostra la tessitura orientata della roccia. I porfiroblasti di ortoclasio conferiscono alla roccia una tessitura occhiadina.



Fig. 3. - Sezione sottile del serizzo ($\times 20$). Una fascia di individui cristallini a grana fine costituita da quarzo, feldspato e biotite è compresa tra due porfiroblasti di ortoclasio. A scala microscopica la tessitura orientata della roccia risulta meno evidente. Non tutte le lamine di biotite sono rigorosamente orientate.

state rilevate le deformazioni secondo tre direzioni, una assiale e due trasversali. In tutti i provini una deformazione trasversale è stata rilevata in direzione parallela al piano XY (che individua la struttura planare presente nella roccia) la seconda in direzione normale alla prima. Le deformazioni sono state determinate come media dei valori indicati da una coppia di estensimetri a resistenza disposti in corrispondenza di due generatrici opposte del provino.

È interessante rilevare che con tale disposizione degli estensimetri nascerebbero condizioni di collinearità se dal blocco si prelevassero solo provini con assi giacenti su tre piani ortogonali. È infatti agevole verificare che assu-

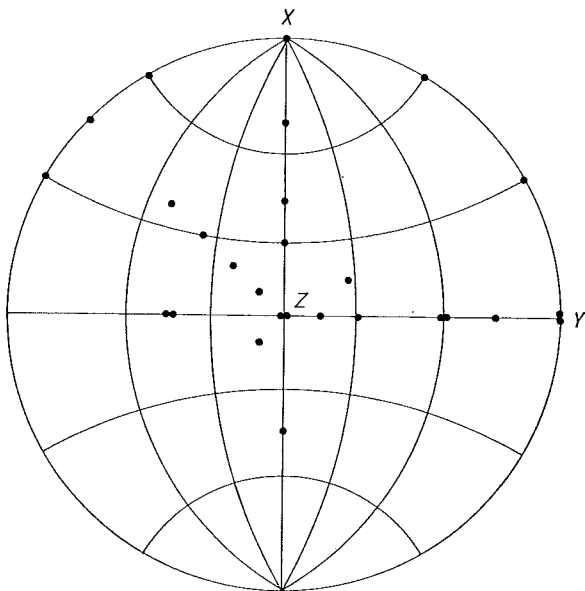


Fig. 4. - Orientazione dei provini su cui sono state eseguite le misure di deformabilità (proiezione di Wulff, emisfero inferiore).

mendo come terna di riferimento quella individuata da tali piani, risultano sempre identicamente nulli i coefficienti $b^{(1)}_{45}$, $b^{(1)}_{46}$, $b^{(1)}_{56}$.

Poiché le curve sforzi-deformazione presentavano un andamento decisamente non lineare (fig. 5), le analisi sono state effettuate sui valori tangenti delle deformazioni ($d\varepsilon/d\sigma$) con lo scopo di determinare i valori tangenti delle costanti elastiche in funzione del carico uniaassiale applicato σ (2).

A partire dai dati rilevati (81 per ciascun

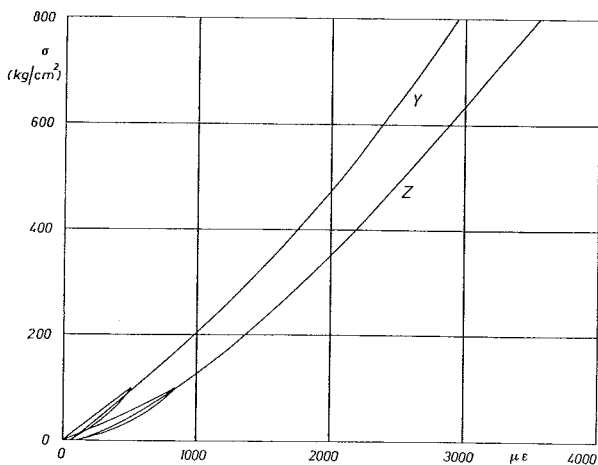


Fig. 5. - Curve sforzi-deformazioni longitudinali due provini di serizzo.

(2) E da tener presente che in tali condizioni tutte le considerazioni svolte risultano soltanto approssimate. In particolare poi le costanti elastiche dipendono da tutte le componenti dello stato di sollecitazione applicato.

livello di carico), un'analisi di regressione sulla base della (18) ha consentito il calcolo delle 21 costanti elastiche della roccia rispetto alla terna X Y Z collegata al blocco. A titolo di esempio i valori di tali costanti e delle relative deviazioni standard al carico di 100 kg/cm^2 sono riportati nella tab. 2.

TABELLA 2

Coefficienti di deformazione tangenti a_{ij} ($10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$) per un carico uniaassiale di 100 kg/cm^2 e relative deviazioni standard (tra parentesi). Il valore t di Student al livello 95% è pari a 2

4.575 (.224)	-.547 (.120)	-.663 (.114)	.000 (.294)	-.597 (.378)	-.061 (.325)
	5.065 (.173)	-.660 (.107)	-.344 (.271)	.136 (.363)	-.315 (.325)
		5.790 (.147)	-.664 (.253)	-.914 (.310)	.091 (.246)
			13.717 (.470)	.514 (.776)	.490 (1.004)
				12.178 (.581)	.094 (1.068)
					10.768 (.540)

Si è poi indagato se il piano XY, di simmetria evidente nella tessitura macroscopica della roccia, si comportasse come tale anche nei riguardi delle caratteristiche elastiche. L'analisi di varianza riportata in tab. 3 mostra che tale ipotesi, equivalente ad assumere per la roccia una simmetria di tipo almeno monoclino con l'asse Z

TABELLA 3

Analisi statistica per valutare se l'asse normale alla struttura planare della tessitura macroscopica della roccia coincide con una direzione principale di elasticità

Carico applicato (kg/cm^2)	Regress. a 21 variabili		Regr. a 13 var.	F
	SSR	V (e)	SSR	
25	$.10614 \cdot 10^{-8}$	$.2966 \cdot 10^{-12}$	$.10577 \cdot 10^{-8}$	1.56
50	$.10038 \cdot 10^{-8}$	$.2175 \cdot 10^{-12}$	$.10033 \cdot 10^{-8}$	2.04
100	$.78365 \cdot 10^{-9}$	$.1154 \cdot 10^{-12}$	$.77994 \cdot 10^{-9}$	4.02
200	$.57349 \cdot 10^{-9}$	$.8818 \cdot 10^{-13}$	$.57115 \cdot 10^{-9}$	3.30
300	$.48950 \cdot 10^{-9}$	$.9804 \cdot 10^{-13}$	$.48708 \cdot 10^{-9}$	3.08
400	$.44428 \cdot 10^{-9}$	$.1219 \cdot 10^{-12}$	$.44157 \cdot 10^{-9}$	2.78

F (8, 60, 95%) = 2.10

coincidente con un'asse principale di elasticità, non può in genere essere accettata salvo che per i livelli di carico bassi.

Si sono pertanto calcolate le direzioni degli assi principali X_e Y_e Z_e della matrice $[S]$ (fig. 6).

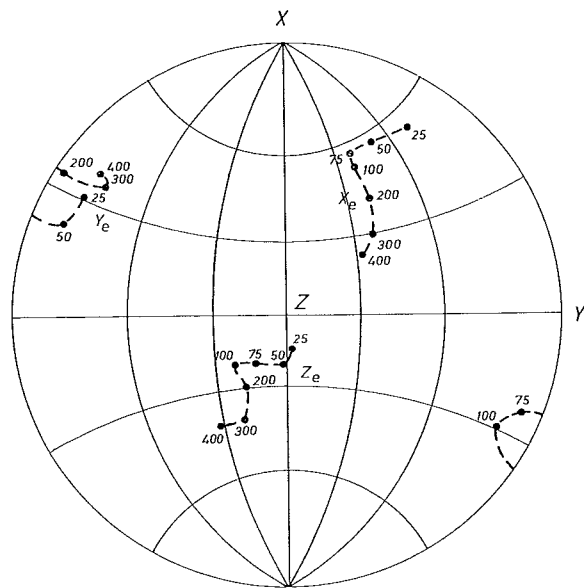


Fig. 6. - Orientazione degli assi principali di elasticità (sotto un carico isotropo) in funzione del carico uniaassiale applicato.

Si rileva che l'asse principale Z_e , inizialmente prossimo all'asse Z del blocco ai bassi livelli di carico tende ad allontanarsene all'aumentare del carico applicato.

Si è successivamente accertato (tab. 4) che la terna X_e Y_e Z_e per tutti i livelli di carico inferiori a 250 kg/cm^2 è una terna di assi principali di elasticità della roccia, che pertanto si comporta come ortotropa. Infatti l'eliminazione

TABELLA 4

Analisi statistica per valutare se il comportamento della roccia è significativamente diverso da quello di un materiale ortotropa

Carico applicato (kg/cm^2)	Regress. a 21 variabili		Regr. a 9 var.	F
	SSR	V (e)	SSR	
25	$.10614 \cdot 10^{-8}$	$.2966 \cdot 10^{-12}$	$.10603 \cdot 10^{-8}$	0.30
50	$.10038 \cdot 10^{-8}$	$.2175 \cdot 10^{-12}$	$.10030 \cdot 10^{-8}$	0.31
100	$.78365 \cdot 10^{-9}$	$.1154 \cdot 10^{-12}$	$.78276 \cdot 10^{-9}$	0.64
200	$.57349 \cdot 10^{-9}$	$.8818 \cdot 10^{-13}$	$.57197 \cdot 10^{-9}$	1.43
300	$.48950 \cdot 10^{-9}$	$.9804 \cdot 10^{-13}$	$.48708 \cdot 10^{-9}$	2.05
400	$.44428 \cdot 10^{-9}$	$.1219 \cdot 10^{-12}$	$.43954 \cdot 10^{-9}$	3.24

$$F(12, 60, 95\%) = 1,92$$

dalla regressione degli 11 coefficienti di deformazione corrispondenti ai coefficienti di Chentsov e di mutua influenza non accresce in modo significativo la varianza dell'errore residuo. Avendo accettato l'ipotesi di ortotropia sono state valutate le costanti elastiche della roccia compatibili con tale modello e i loro limiti di fiducia (tab. 5). L'andamento delle costanti tecniche in funzione del carico è riportato nella fig. 7.

TABELLA 5

Coefficienti di deformazione tangenti a_{ij} ($10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$) nel modello ortotropa per un carico uniaassiale di 100 kg/cm^2 e relativa deviazione standard (tra parentesi). Il valore t di Student al livello 95% è pari a 2

4.307 (.284)	-.440 (.187)	-.896 (.187)			
	5.108 (.212)	-.825 (.153)			
		6.603 (.239)			
			13.394 (.612)		
				11.400 (.480)	
					10.545 (.502)

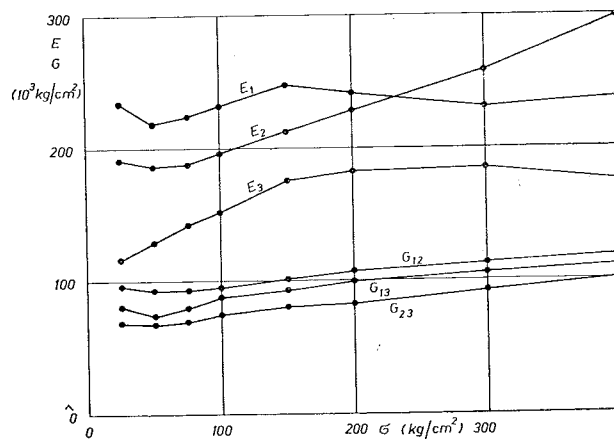
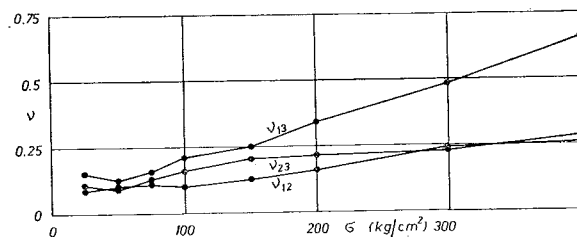


Fig. 7. - Costanti tecniche del serizzo in funzione del carico applicato (assumendo l'ipotesi ortotropa, che risulta statisticamente accettabile solo fino ad un carico uniaassiale di 250 kg/cm^2).

Si è infine verificato se per i livelli di carico in cui la roccia si comportava come ortotropa ($\sigma < 250 \text{ kg/cm}^2$), potesse essere adottato un modello di ortotropia isoG, con solo 6 costanti elastiche. L'analisi statistica mostra che ciò è accettabile fino a livelli di carico di circa 200 kg/cm^2 .

La ricerca di modelli elastici ancora più semplici, quali l'isotropia trasversale con asse corrispondente all'asse Z_e , ha invece portato a risultati negativi.

5. Conclusioni

Il metodo proposto ha consentito di valutare le caratteristiche elastiche di una roccia anisotropa con risultati nel complesso soddisfacenti. L'esame delle tabelle mostra che i moduli elastici sono stati stimati con sufficiente precisione (deviazione standard dell'ordine del 5% del valore stimato), mentre l'incertezza è maggiore per i coefficienti di Poisson e ancora più elevata per i coefficienti di Chentsov e di mutua influenza.

È possibile studiare diverse disposizioni delle basi di misura che consentirebbero di correggere tale situazione, ma è da rilevare che in pratica interessa in primo luogo la conoscenza accurata dei moduli elastici e solo subordinatamente quella delle altre costanti elastiche.

Per quanto riguarda le proprietà del « serizzo » l'analisi ha messo in vista che l'associazione tra la simmetria elastica e quella individuata nella tessitura « orientata » della roccia non risulta molto stretta. Ciò non deve essere considerato un fatto anomalo, in quanto è da tener presente che le caratteristiche elastiche di una roccia, nel campo di sollecitazioni qui investigato, dipendono non solo dalle caratteristiche delle specie mineralogiche presenti, ma in larga misura dalle caratteristiche dei sistemi di microfessure, sia aperte che chiuse, che interessano la roccia stessa [BERRY *et al.*, 1974]. A conferma di ciò si può rilevare che i moduli elastici del serizzo, all'inizio della curva, sono dell'ordine del 20% di quello medio corrispondente alla matrice solida non fessurata; è quindi evidente che in questa roccia i sistemi di microfessure hanno una influenza essenziale nel determinare le caratteristiche di deformabilità, ivi comprese quelle di anisotropia elastica.

Un comportamento analogo è stato da noi riscontrato in prove effettuate in altre rocce

anisotrope. Si può ricordare, ad esempio, il comportamento di un'altra roccia della Val d'Ossola, la « beola », un gneiss che presenta una tessitura orientata con decisa simmetria planare e una fissilità ancora più pronunciata del « serizzo ». Le misure hanno però mostrato che il piano di simmetria della tessitura della roccia non corrispondeva ad un piano di isotropia trasversale elastica, in quanto in tale piano il modulo iniziale variava da 300.000 kg/cm^2 a 140.000 kg/cm^2 ; secondo l'asse apparente di simmetria, il modulo era invece pari a 85.000 kg/cm^2 .

L'andamento dei moduli del « serizzo » in funzione del carico presenta alcune tendenze caratteristiche che appaiono comuni a molte rocce anisotrope. Lontano dalle condizioni di rottura il modulo minimo aumenta regolarmente con il carico, mentre il modulo maggiore e l'intermedio inizialmente diminuiscono per poi tornare a crescere. Questo comportamento deriva dalla sovrapposizione dell'azione delle microfessure chiuse e di quelle aperte [BERRY *et al.*, 1974]; le fessure inizialmente aperte, in particolare quelle orientate pressoché normalmente all'asse del provino, si chiudono progressivamente con l'aumentare del carico applicato e non contribuiscono più, o solo in misura minore, alla deformabilità della roccia, il che spiega la generale tendenza all'aumento del modulo. L'iniziale decremento che si osserva per i moduli rispettivamente maggiore ed intermedio è da attribuire al fatto che con l'aumentare del carico vengono mobilizzate alcune microfessure chiuse, i cui labbri sono inizialmente bloccati o dalla resistenza di attrito dovuta a sollecitazioni residue irregolarmente presenti nella roccia a livello microscopico o da veri legami coesivi.

A carichi molto elevati tutti i moduli tornano poi a diminuire a causa della propagazione e neoformazione di fratture che precludono alla rottura del provino.

I coefficienti di Poisson, inizialmente bassi e prossimi tra loro, tendono a crescere, in modo diverso, con l'aumentare del carico applicato.

Per spiegare infine il fatto che il « serizzo » ai bassi valori della sollecitazione si comporta secondo un modello di anisotropia relativamente semplice, caratterizzato da solo 6 costanti elastiche (ortotropia isoG), mentre tende a distaccarsene con l'aumentare del carico, occorre tenere presente che l'anisotropia indotta da sistemi di microfessure aperte, comunque orientati gli uni rispetto agli altri, risulta sem-

pre di tipo ortotropo e isoG [CREA *et al.*, 1976]. È da ritenere pertanto che ai bassi livelli di carico le caratteristiche di anisotropia del serizzo dipendono essenzialmente da sistemi di microfessure aperte, la cui influenza tende a ridursi all'aumentare del carico a causa della loro chiusura progressiva.

BIBLIOGRAFIA

- BERRY P., CREA G., MARTINO D., RIBACCHI R. (1974) - *The influence of fabric on the deformability of anisotropic rocks*. Proc. III Congr. Int. Soc. Rock Mech., Denver, Vol. I B.
- CREA G., MARTINO D., RIBACCHI I. R. (1976) - *Influenza dei sistemi di microfessure sulle caratteristiche di anisotropia delle rocce*. Istituto d'Arte Mineraria, Rapporto di Ricerca eseguita per conto dell'ENEL, IAM 03/76.
- DRAPER N. R. (1966) - *Applied regression analysis*, New York.
- LEKHNITSKII S. G. (1963) - *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden Day Inc. S. Francisco.
- MARTINETTI S., RIBACCHI R. (1970) - *Un criterio statistico per l'interpretazione dei risultati di misure dello stato di sollecitazione negli ammassi rocciosi*. Rivista Italiana di Geotecnica, 4, pp. 21-32.
- MARTINETTI S., MARTINO D., RIBACCHI R. (1975) - *Determinazione dello stato di sollecitazione originario in un am-*

masso roccioso anisotropo. Rivista Italiana di Geotecnica, 9, pp. 84-98.

MARTINO D., RIBACCHI R. (1971) - *Programma ANISI per la trasformazione delle costanti elastiche di una roccia anisotropa*. ENEL, DSR, Raccolta delle Ricerche eseguite dall'ENEL presso Istituti Universitari, Vol. XVII, Roma.

SUMMARY

Experimental determination of the elastic properties of an anisotropic rock by means of uniaxial compression tests

Strain measurements of rock samples in uniaxial compression tests can be analyzed to evaluate the elastic coefficients of an anisotropic rock (21 in the general case); it is also possible to test if the assumptions of simple anisotropy models, characterized by elastic symmetry elements, can be accepted for the investigated rock.

Experimental determinations were carried out in a gneiss (« serizzo » della Valdossola). At low load levels the gneiss behaves as an orthotropic material in which the shear moduli depend on the other elastic constants (Saint Venant model).

The validity of such a simple model (which is characterized by only 6 independent elastic coefficients) can be explained assuming that the anisotropy of the gneiss is essentially due the open microcrack systems.