

Influenza della viscosità nei problemi di interazione fondazione-terreno

G. GATTI *, I. IORI **

SOMMARIO: Nella nota presente viene analizzato il comportamento elasto-viscoso di una trave continua di fondazione in calcestruzzo poggiante su suolo alla Winkler e soggetta a funzioni di carico note.

Il comportamento viscoso del calcestruzzo è stato schematizzato secondo il modello di invecchiamento.

Le equazioni risolventi, sviluppate in serie di seni, hanno portato ad un sistema di equazioni differenziali in funzione del tempo, la cui integrazione è stata ottenuta mediante il metodo delle differenze finite.

Ai fini applicativi, per i valori più frequenti della rigidità relativa, si sono ricavate tabelle che contengono il calcolo degli spostamenti e delle azioni interne per travi caricate da forze concentrate.

È stato inoltre analizzato l'effetto della graduale applicazione del carico nel tempo. Tale effetto è risultato modesto per gli usuali tempi di costruzione.

1. Premessa

Nell'ambito dell'ingegneria strutturale assume un interesse particolare il problema della interazione sovrastruttura fondazione-terreno. Gli aspetti riguardanti l'interazione fondazione-struttura appaiono facilmente dominabili dal calcolo, sia esso condotto in campo elastico oppure elasto-plastico, se si limita lo studio agli effetti prodotti sulle sovrastrutture da spostamenti « noti » ad essi applicati.

Maggiori difficoltà presenta invece lo studio dell'interazione fondazione-terreno in quanto, pur considerando la fondazione caricata da carichi noti, le mutue azione fondazione-terreno dipendono da molteplici parametri geometrici e meccanici, non facilmente esplicitabili.

Nelle usuali applicazioni il terreno viene assimilato ad un mezzo elastico, indefinito o limitato da una base rigida, oppure schematizzato secondo il modello di Winkler.

Questo modello, di agevole impiego, può dar luogo a risultati accettabili per alcuni tipi di terreno, quali ad esempio quelli sabbiosi aventi modulo variabile linearmente con la profondità [CARRIER, CHRISTIAN, 1973; GIBSON, 1974; SCHULTZE, 1967].

La soluzione del problema precedente si presenta più laboriosa qualora si volesse mettere in conto i fenomeni legati alla variazione delle caratteristiche meccaniche dei materiali nel tempo. In tale ambito riveste particolare inte-

resse l'influenza della viscosità che comporta variazioni, a volte accentuate, dello stato di tensione e di deformazione.

Nella nota presente si affronta lo studio del comportamento elasto-viscoso di travi di fondazioni continue in calcestruzzo, ritenendo applicabile la teoria lineare e la sovrapponibilità degli effetti, dato il modesto stato tensionale esistente, e peraltro non considerando la presenza dell'armatura metallica. Per il terreno si è assunto il modello di Winkler trascurando i fenomeni viscosi come può farsi per i terreni non coesivi.

Con tali ipotesi, la soluzione presentata risulta applicabile a travi di fondazione di sovrastrutture a rigidità nulla o quasi e per terreni di tipo non coesivo schematizzabili alla Winkler, mettendo in conto gli effetti della viscosità del calcestruzzo nelle travi.

2. Risoluzione del problema

La trave continua lunga L (Fig. 1) ad asse rettilineo, avente rigidità flessionale EJ e sezione costante, è in calcestruzzo con nucleo viscoso $\Phi(t, \tau)$ anch'esso costante lungo l'intero asse della trave.

I carichi applicati ($\bar{q}(x, t)$, $Q_j(x_j, t)$ $j = 1, \dots, n$) sono ritenuti costanti nel tempo oppure variabili lentamente fino ad un valore finale finito, in modo continuo e derivabile insieme alle loro derivate (1).

* Prof. ing. Gianfelice GATTI, stabilizzato di *Tecnica delle Fondazioni* nel Politecnico di Milano.

** Dott. ing. I. IORI, tecnico laureato di ruolo nel Politecnico di Milano.

(1) Vengono così garantite le condizioni di convergenza, unicità, esistenza ed asintoticità della soluzione [MOLA, IORI, 1975]. Nell'ambito delle ipotesi assunte, tali funzioni di carico vengono considerate come assegnate.

L'equazione della deformata $y = y(x, t)$ al tempo t , ritenendo la generica forza $Q_j(x_j, t)$ distribuita uniformemente su di una lunghezza arbitraria c_j , assume l'espressione:

$$EJ \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = \bar{q}(x, t) - \bar{p}(x, t) + \sum_{j=1}^n \frac{Q_j(x_j, t)}{c_j} + \int_{t_0}^t \left[\bar{q}(x, t) - \bar{p}(x, t) + \sum_{j=1}^n \frac{Q_j(x_j, t)}{c_j} \right] \Phi(t, \tau) d\tau \quad (1)$$

$\bar{p} = kby(x, t)$ reazione del terreno per unità di lunghezza della trave;

k = coefficiente di reazione del terreno;

b = larghezza della trave;

t_0 = tempo di applicazione dei carichi.

Il termine $\frac{Q_j(x_j, t)}{c_j}$ è presente nei tratti c_j mentre risulta nullo altrove.

Il comportamento viscoso del calcestruzzo è stato schematizzato secondo il modello di invecchiamento per il quale $\Phi(t, \tau) = \Phi(\tau)$; allora derivando la (1) rispetto al tempo t risulta:

$$EJ \frac{\partial^5 y(x, t)}{\partial t \partial x^4} = \frac{\partial \bar{q}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \bar{p}(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_j} \frac{\partial Q_j(x_j, t)}{\partial t} + \left[\bar{q}(x, t) - \bar{p}(x, t) + \sum_{j=1}^n \frac{Q_j(x_j, t)}{c_j} \right] \cdot \Phi(t) \quad (2)$$

per la cui risoluzione conviene far ricorso a sviluppo in serie di seni e di coseni.

Posto $y(x, t)$ somma di uno spostamento rigido e di una deformazione elastica:

$$y(x, t) = y_0(t) - \frac{y_L(t) - y_0(t)}{L} \cdot x + y_e(x, t)$$

sviluppando in serie:

$$y(x, t) = \left\{ \sum_{m=1}^N \frac{2y_0(t)}{m\pi} C_m + \sum_{m=1}^N \frac{2(y_L(t) - y_0(t))}{m\pi} D_m + \sum_{m=1}^N y_m(t) \right\} \text{sen} \frac{m\pi x}{L} \quad (3)$$

dove:

$$C_m = 1 - (-1)^m \quad D_m = (-1)^{m+1}$$

Posto anche per il carico: $\bar{q}(x, t) = \sum_{m=1}^N \bar{q}_m(t) \text{sen} \frac{m\pi x}{L}$ (con c_j tendente a zero) si ottiene:

$$EJ \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \frac{dy_m(t)}{dt} = \frac{d\bar{q}_m(t)}{dt} - k \left[\frac{2(C_m - D_m)}{m\pi} \frac{dy_0(t)}{dt} + \frac{2D_m}{m\pi} \frac{dy_L(t)}{dt} + \frac{dy_m(t)}{dt} \right] - k \Phi(t) \left[\frac{2y_0(t)}{m\pi} (C_m - D_m) + \frac{2y_L(t)}{m\pi} D_m + y_m(t) \right] + \bar{q}_m(t) \Phi(t) + \frac{2}{L} \sum_{j=1}^n \left[Q_j(t) \Phi(t) + \frac{dQ_j(t)}{dt} \right] \text{sen} \frac{m\pi x_j}{L} \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

Nella (4) compaiono come incognite, oltre alle $y_m(t)$, le $y_0(t)$ e $y_L(t)$.

Imponendo le condizioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione (rispetto all'origine 0) si ha:

$$\sum_{j=1}^n Q_j(t) + \int_0^L \bar{q}(x, t) dx = \int_0^L \bar{p}(x, t) dx \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n Q_j(t) x_j + \int_0^L \bar{q}(x, t) x dx = \int_0^L \bar{p}(x, t) x dx \quad (6)$$

che associate alla (4) danno luogo ad un sistema lineare di N equazioni differenziali alle derivate totali, nelle N incognite $y_m(t)$.

Per le condizioni al contorno, che in questo caso si fanno coincidere con quelle della soluzione elastica al tempo t_0 si ha:

$$y_0(t_0) = y_0^{el}; \quad y_L(t_0) = y_L^{el}; \quad y_m(t_0) = y_m^{el}$$

(determinate con le (5) e (6) per $t = t_0$) e con la

$$EJ \frac{m^4 \pi^4}{L^4} y_m^{el} = \bar{q}_m + \sum_{j=1}^n \frac{2 Q_j}{L} \operatorname{sen} \frac{m \pi x_j}{L} - k b y_m^{el}$$

equazione della trave su letto elastico.

Convien operare il cambiamento di variabile:

$$d \varphi(t) = \Phi(t) dt$$

e passare ad un calcolo alle differenze finite.

La soluzione del sistema algebrico così ottenuto deve convergere, sia per quanto riguarda la variabile temporale t , sia per quanto riguarda il numero di armoniche N dello sviluppo in serie.

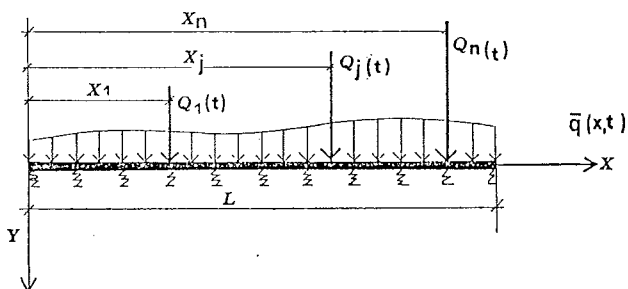


Fig. 1. - Schema statico della trave su suolo alla Winkler.

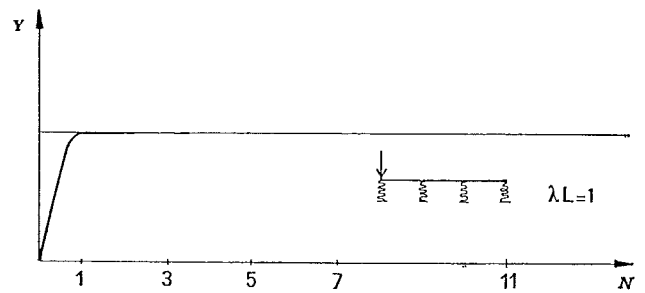


Fig. 2. - Analisi della convergenza.

Sul primo punto vedasi [MOLA, IORI, 1979]; sul secondo si trova che la stabilizzazione della soluzione viene raggiunta con un numero minore di armoniche quanto maggiore è la rigidità della trave.

Nella fig. 2 sono riportati i valori dello spostamento del punto di applicazione del carico all'estremità di una trave di rigidità relativa

$$\lambda L = 1 \text{ e } \lambda L = 10 \left[\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EJ}} \right]. \text{ Mentre}$$

nel primo caso con $N = 1$ la soluzione è accettabile, nel secondo sono richieste $8 \div 10$ armoniche.

Nella fig. 3 sono riportati i diagrammi della deformata per la trave ($\lambda L = 10$) soggetta ad una forza concentrata applicata ad un estremo, ottenuti con numero N di armoniche rispettivamente pari a 3, 5, 7 confrontati con la soluzione esatta (linea a tratto pieno).

3. Applicazione al caso di trave caricata da una forza concentrata

Nella pratica progettuale si presenta frequentemente il caso di trave di fondazione continua sottoposta a forze concentrate. Il comportamento di queste travi è fortemente condizio-

nato dalla sovrastruttura e dalla risposta del terreno.

L'influenza della sovrastruttura diventa trascurabile allorquando si sia in presenza di strutture isostatiche.

Per quanto concerne il terreno invece, come già detto, il suo comportamento può essere descritto adeguatamente dal modello di Winkler nel caso di terreni non coesivi.

In questo quadro acquista interesse lo studio

dell'influenza della viscosità del calcestruzzo nei riguardi della variazione dello stato tensionale e di deformazione della trave di fondazione, influenza messa in evidenza attraverso le tabelle 1 ÷ 4, formalmente analoghe a quelle già disponibili per il caso di travi elastiche [BOWLES, 1958], valide per un calcestruzzo a comportamento di tipo elasto-viscoso.

Dal sistema risolutivo delle (4), (5), (6) con $Q_j = Q_1 = \text{cost}$ e $q(x, t) = 0$ si ha:

$$EJ \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \frac{d y_m(t)}{d \varphi} = -k \left[\frac{2(C_m - D_m)}{m \pi} \frac{d y_0(t)}{d \varphi} + \frac{2 D_m}{m \pi} \frac{d y_L(t)}{d \varphi} + \frac{d y_m(t)}{d \varphi} \right]$$

$$-k \left[\frac{2 y_0(t)}{m \pi} (C_m - D_m) + \frac{2 y_L(t)}{m \pi} D_m + y_m \right] + \frac{2 Q_1}{L} \text{sen} \frac{m \pi x_1}{L} \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

$$y_0(t) = -\frac{6}{kL^2} \left[Q_1 x_1 - \frac{2 Q_1 L}{3} + \frac{2 kL^2}{3} \sum_{m=1}^N \frac{y_m(t)}{m \pi} (1 - \cos m \tau) + kL^2 \sum_{m=1}^N \frac{y_m(t)}{m \pi} \cos m \pi \right]$$

$$y_L(t) = \frac{2 Q_1}{kL} - y_0(t) - 2 \sum_{m=1}^N \frac{y_m(t)}{m \pi} - (1 - \cos m \pi)$$

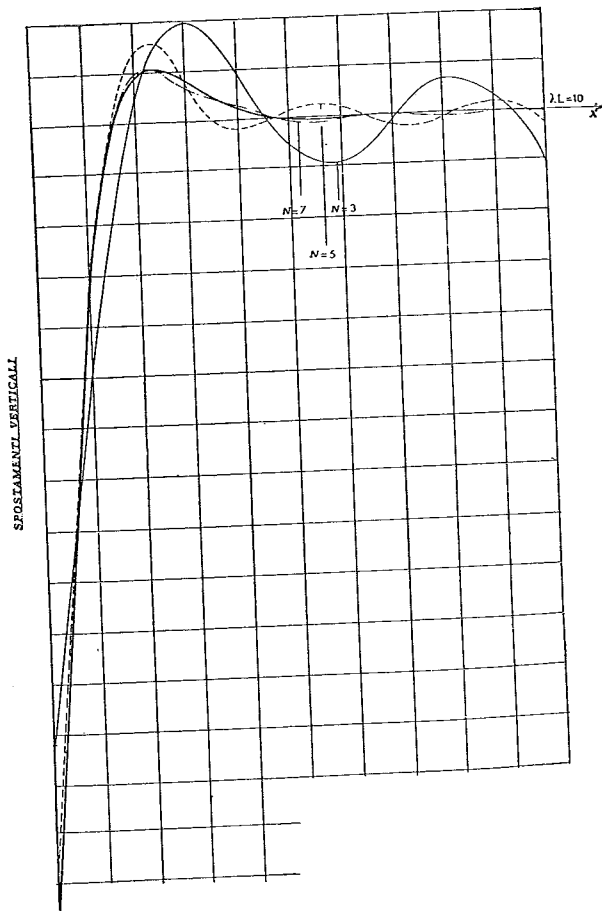


Fig. 3. - Influenza del numero di armoniche sulla precisione dei risultati.

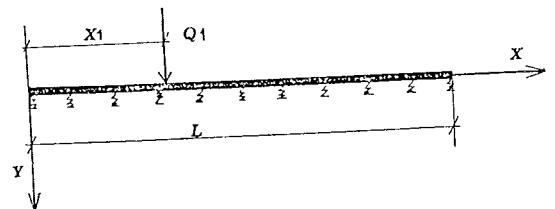


Fig. 4. - Schema adottato per la compilazione delle tabelle.

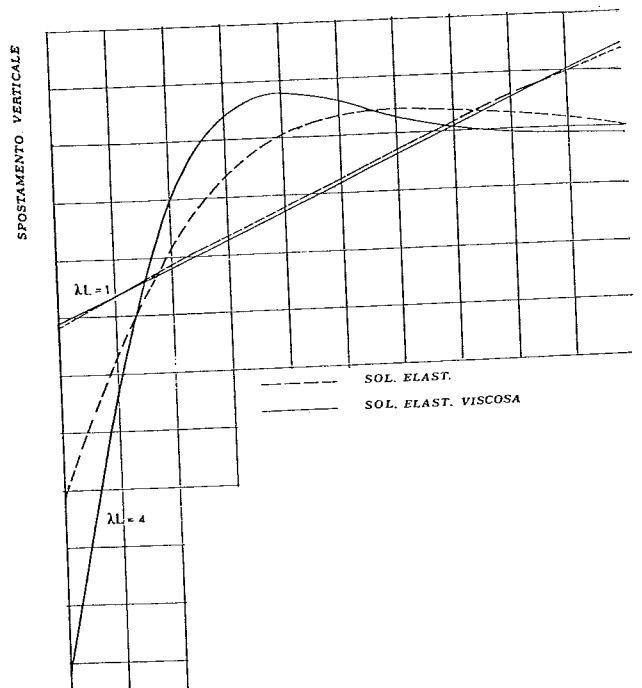


Fig. 5. - Spostamenti verticali di travi con rigidità relativa $\lambda L = 1$, e 4 , caricate ad un estremo in fase elastica ed elasto-viscosa.

TABELLA 1
 $\lambda L = 1.0$

x/L	α	β	γ	x/L	α	β	γ
carico in 0.0L				carico in 0.1L			
0.0	4.1494	0.0000	0.0000	0.0	3.4694	0.0000	0.0000
0.0	4.1494	0.0000	-1.0000	0.1	2.9576	.0329	.3213
0.1	3.4694	-.1607	-.6191	.1	2.9576	.0329	-.6786
0.2	2.8018	-.2521	-.3057	.2	2.4454	-.0748	-.4085
0.3	2.1541	-.2874	-.0580	.3	1.9389	-.1338	-.1839
0.4	1.5292	-.2796	.1258	.4	1.4429	-.1539	-.0203
0.5	.9267	-.2411	.2485	.5	0.9592	-.1452	.0996
0.6	.3436	-.1841	.3118	.6	.4870	-.1173	.1718
0.7	-.2246	-.1202	.3177	.7	.0243	-.0796	.1973
0.8	-.7831	-.0608	.2672	.8	-.4319	-.0414	.1769
0.9	-1.3366	-.0170	.1612	.9	-.8848	-.0118	.1110
1.0	-1.8885	0.0000	0.0000	1.0	-1.3366	.0000	.0000

x/L	α	β	γ	x/L	α	β	γ
carico in 0.2L				carico in 0.3L			
0.0	2.8018	0.0000	0.0000	0.0	2.1541	0.0000	0.0000
.1	2.4454	.0268	.2623	.1	1.9389	.0208	.2046
.2	2.0865	.1025	.4890	.2	1.7218	.0804	.3877
.2	2.0865	.1025	-.5109	.3	1.4979	.1744	.5487
.3	1.7218	.0200	-.3205	.3	1.4979	.1744	-.4512
.4	1.3552	-.0280	-.1667	.4	1.2626	.0984	-.3131
.5	.9907	-.0491	-.0494	.5	1.0107	.0476	-.1989
.6	.6301	-.0502	.0315	.6	.7716	.0171	-.1094
.7	.2734	-.0388	.0767	.7	.5227	.0021	-.0446
.8	-.0801	-.0219	.0863	.8	.2734	-.0023	-.0048
.9	-.4319	-.0066	.0607	.9	.0243	-.0014	.0100
1.0	-.7831	0.0000	0.0000	1.0	-.2246	0.0000	0.0000

x/L	α	β	γ	x/L	α	β	γ
carico in 0.4L				carico in 0.5L			
0.0	1.5292	0.0000	0.0000	0.0	.9267	0.0000	0.0000
.1	1.4429	.0150	.1486	.1	.9592	.0093	.0943
.2	1.3552	.0588	.2885	.2	.9907	.0379	.1918
.3	1.2626	.1298	.4195	.3	1.0191	.0863	.2923
.4	1.1593	.2260	.5407	.4	1.0404	.1550	.3954
.4	1.1593	.2260	-.4592	.5	1.0489	.2445	.4999
.5	1.0404	.1453	-.3491	.5	1.0489	.2445	-.4999
.6	.9095	.0855	-.2516	.6	1.0404	.1550	-.3954
.7	.7716	.0438	-.1675	.7	1.0191	.0863	-.2923
.8	.6301	.0175	-.0974	.8	.9907	.0379	-.1918
.9	.4870	.0039	-.0415	.9	.9592	.0093	-.0943
1.0	.3436	0.0000	0.0000	1.0	.9267	0.0000	0.0000

Il sistema (8) è stato integrato ponendo $\Phi(\infty) = 3$ e supponendo che il carico Q_1 agisse a partire dal tempo t_0 di maturazione del calcestruzzo (assunto come origine dei tempi).

Si sono considerate travi di diversa rigidità ($\lambda L = 1, 2, 3, 4$) caricate dalla forza Q_1 posta successivamente ad ascisse crescenti da 0 a $0,5 L$ ⁽²⁾ (fig. 4), nelle quali sono stati valutati i valori delle grandezze che interessano.

⁽²⁾ Con incrementi di $0.1 L$.

I valori della deformata, del momento e del taglio sono stati posti nella forma:

$$y = \frac{Q_1 \lambda}{k b} \alpha; \quad M = \frac{Q_1}{2 \lambda} \beta; \quad T = Q_1 \gamma$$

i cui coefficienti α, β, γ sono riportati nelle tabelle 1 ÷ 4.

I dati delle tabelle servono soprattutto ai fini

TABELLA 2
 $\lambda L = 2.0$

x/L	α	β	γ	x/L	α	β	γ
carico in 0.0L				carico in 0.1L			
0.0	2.9276	0.0000	0.0000	0.0	2.1135	0.0000	0.0000
0.0	2.9276	0.0000	-1.0000	0.1	1.6848	.0788	.3799
0.1	2.1135	-.2939	-.4967	0.1	1.6848	.0788	-.6200
.2	1.3916	-.4181	-.1483	.2	1.2499	-.1076	-.3267
.3	.8080	-.4300	.0691	.3	.8503	-.1938	-.1176
.4	.3728	-.3763	.1848	.4	.5173	-.2115	.0178
.5	.0727	-.2919	.2273	.5	.2590	-.1873	.0943
.6	-.1179	-.2009	.2212	.6	.0689	-.1420	.1261
.7	-.2299	-.1188	.1854	.7	-.0679	-.0908	.1254
.8	-.2931	-.0548	.1325	.8	-.1699	-.0447	.1012
.9	-.3323	-.0141	.0697	.9	-.2539	-.0122	.0586
1.0	-.3645	0.0000	.0000	1.	-.3323	0.0000	0.0000

x/L	α	β	γ	x/L	α	β	γ
carico in 0.2L				carico in 0.3L			
0.0	1.3916	0.0000	0.0000	0.0	.8080	0.0000	0.0000
.1	1.2499	.0537	.2642	.1	.8503	.0328	.1659
.2	1.0882	.2074	.4987	.2	.8794	.1337	.3393
.2	1.0882	.2074	-.5012	.3	.8614	.3046	.5146
.3	.8794	.0478	-.3038	.3	.8614	.3046	-.4853
.4	.6541	-.0415	-.1505	.4	.7617	.1438	-.3218
.5	.4419	-.0785	-.0413	.5	.6098	.0436	-.1841
.6	.2555	-.0799	.0279	.6	.4383	-.0078	-.0781
.7	.0959	-.0607	.0626	.7	.2647	-.0242	-.0089
.8	-.0428	-.0337	.0677	.8	.0959	-.0195	.0270
.9	-.1699	-.0100	.0463	.9	-.0679	-.0070	.0298
1.0	-.2931	0.0000	0.0000	1.0	-.2299	0.0000	0.0000

x/L	α	β	γ	x/L	α	β	γ
carico in 0.4L				carico in 0.5L			
0.0	.3727	0.0000	0.0000	0.0	-.0727	0.0000	0.0000
.1	.5173	.0168	.0890	.1	.2590	.0053	.0331
.2	.6541	.0750	.2064	.2	.4419	.0314	.1034
.3	.7617	.1853	.3487	.3	.6098	.0928	.2089
.4	.8021	.3561	.5067	.4	.7400	.2027	.3448
.4	.8021	.3561	-.4932	.5	.7945	.3713	.4999
.5	.7400	.1904	-.3374	.5	.7945	.3713	-.4999
.6	.6068	.0834	-.2019	.6	.7400	.2027	-.3448
.7	.4383	.0247	-.0970	.7	.6098	.0928	-.2089
.8	.2555	.0010	-.0275	.8	.4419	.0314	-.1034
.9	.0689	.0022	-.0048	.9	.2590	.0053	-.0331
1.0	-.1179	0.0000	0.0000	1.0	.0727	0.0000	0.0000

progettuali⁽³⁾ e portano, con eventuali opportune interpolazioni, a risultati accettabili anche nel caso di rigidzze e posizioni dei carichi intermedie tra quelle considerate.

Per confrontare la soluzione elasto-viscosa con quella elastica, nelle figg. 5, 6, 7 sono riportati i diagrammi della deformata e dei mo-

(3) Nell'ambito delle ipotesi fatte, si può applicare il principio di sovrapposibilità degli effetti.

menti per il caso di travi aventi rigidzza relativa $\lambda L = 1$ e $\lambda L = 4$, caricate ad un estremo.

L'effetto viscoso che è poco influente per travi molto rigide, diventa rilevante nel caso di travi deformabili.

Nella trave di fig. 8, con due carichi simmetrici Q e rigidzze $\lambda L = 2$ e $\lambda L = 4$ rispettivamente, si trova conferma della maggior influenza della viscosità sulle travi più deformabili. Si noti anche la diminuzione, con la viscosità,

TABELLA 3

 $\lambda L = 3.0$

x/L	α	β	γ	x/L	α	β	γ
carico in 0.0L				carico in 0.1L			
0.0	2.9802	0.0000	0.0000	0.0	1.7581	0.0000	0.0000
0.0	2.9802	0.0000	-1.0000	.1	1.3225	.1453	.4628
.1	1.7581	-.3696	-.2934	.1	1.3225	.1453	-.5371
.2	.7999	-.4186	.0819	.2	.8454	-.0721	-.2117
.3	.1794	-.3186	.2206	.3	.4320	-.1362	-.0227
.4	-.1449	-.1817	.2194	.4	.1429	-.1206	.0601
.5	-.2577	-.0677	.1548	.5	-.0203	-.0774	.0757
.6	-.2436	.0016	.0773	.6	-.0861	-.0363	.0577
.7	-.1671	.0281	.0148	.7	-.0889	-.0099	.0303
.8	-.0682	.0248	-.0207	.8	-.0580	.0010	.0077
.9	.0347	.0093	-.0257	.9	-.0133	.0016	.0031
1.0	.1372	.0000	0.0000	1.0	.0347	.0000	.0000
carico in 0.2L				carico in 0.3L			
0.0	.7999	0.0000	0.0000	0.0	.1794	0.0000	0.0000
.1	.8464	.0735	.2473	.1	.4320	.0237	.0918
.2	.8289	.2984	.5018	.2	.6565	.1249	.2566
.2	.8289	.2984	-.4981	.3	.7672	.3426	.4747
.3	.6565	.0700	-.2721	.3	.7672	.3426	-.5252
.4	.4255	-.0410	-.1097	.4	.6708	.0949	-.3051
.5	.2233	-.0750	-.0137	.5	.4733	-.0333	-.1326
.6	.0817	-.0679	.0303	.6	.2745	-.0765	-.0211
.7	-.0007	-.0452	.0412	.7	.1153	-.0696	.0361
.8	-.0407	-.0220	.0341	.8	-.0007	-.0413	.0524
.9	-.0580	-.0058	.0190	.9	-.0889	-.0127	.0384
1.0	-.0682	0.0000	0.0000	1.0	-.1671	0.0000	0.0000
carico in 0.4L				carico in 0.5L			
0.0	-.1449	0.0000	0.0000	0.0	-.2577	0.0000	0.0000
.1	.1429	-.0044	-.0002	.1	-.0203	-.0160	-.0417
.2	.4255	.0168	.0853	.2	.2233	-.0357	-.0115
.3	.5708	.1141	.2514	.3	.4733	-.0150	.0929
.4	.7922	.3304	.4757	.4	.6973	.0904	.2700
.4	.7922	.3304	-.5242	.5	.8049	.3197	.4999
.5	.6973	.0857	-.2962	.5	.8049	.3197	-.4999
.6	.4921	-.0349	-.1166	.6	.6973	.0904	-.2700
.7	.2745	-.0672	-.0020	.7	.4733	-.0150	-.0929
.8	.0817	-.0498	.0506	.8	.2233	-.0357	.0115
.9	-.0861	-.0172	.0495	.9	-.0203	-.0160	.0417
1.0	-.2435	0.0000	0.0000	1.0	-.2577	0.0000	0.0000

del momento massimo in mezzera della trave e l'aumento delle deformazioni in corrispondenza del punto di applicazione del carico.

4. Carichi applicati variabili nel tempo

Nella pratica costruttiva l'entità del carico cresce nel tempo con gradualità secondo l'evolversi della sovrastruttura⁽⁴⁾. Per studiare l'ef-

fetto della variabilità del carico sulla trave di fondazione, il sistema generale (4), (5), (6) è stato integrato nell'ipotesi di $Q_j(t) = Q_{\infty} (1 - e^{-\omega t})$ assumendo per ω i valori di 0,01 e 0,005 corrispondenti ad un tempo di carico du-

(4) Nella maggior parte dei casi ad un aumento del carico corrisponde un incremento della rigidità della sovrastruttura, il che rende complesso lo studio dell'interazione [CHAMECKI S., 1969; HEIL, 1969].

TABELLA 4
 $\lambda L = 4.0$

x/L	α	β	γ	x/L	α	β	γ
carico in 0.0L				carico in 0.1L			
0.0	2.9752	0.0000	0.0000	0.0	1.4044	0.0000	0.0000
0.0	2.9752	0.0000	-1.0000	.1	1.0764	.2081	.4988
.1	1.4044	-.4123	-.1362	.1	1.0764	.2081	-.5011
.2	.3587	-.3605	.1960	.2	.6267	-.0436	-.1587
.3	-.1304	-.1788	.2257	.3	.2429	-.0927	.0102
.4	-.2477	-.0289	.1413	.4	.0225	-.0596	.0579
.5	-.1909	.0461	.0505	.5	-.0602	-.0155	.0467
.6	-.0936	.0612	-.0063	.6	-.0643	.0113	.0201
.7	-.0188	.0456	-.0276	.7	-.0387	.0183	-.0008
.8	.0201	.0230	-.0262	.8	-.0100	.0130	-.0104
.9	.0342	.0062	-.0148	.9	.0136	.0044	-.0096
1.0	.0394	0.0000	0.0000	1.0	.0342	.0000	0.0000
carico in 0.2L				carico in 0.3L			
0.0	0.3587	0.0000	0.0000	0.0	-.1304	0.0000	0.0000
.1	.6267	.0720	.1981	.1	.2429	-.0009	.0226
.2	.7676	.3416	.4856	.2	.5905	.0753	.1914
.2	.7676	.3416	-.5143	.3	.7731	.3365	.4740
.3	.5905	.0470	-.2344	.3	.7731	.3365	-.5259
.4	.3118	-.0609	-.0544	.4	.6069	.0344	-.2408
.5	.0993	-.0673	.0244	.5	.3240	-.0761	-.0548
.6	-.0122	-.0391	.0386	.6	.1045	-.0813	.0274
.7	-.0459	-.0127	.0250	.7	-.0110	-.0501	.0428
.8	-.0364	0.0000	.0075	.8	-.0459	-.0203	.0293
.9	-.0100	.0015	-.0020	.9	-.0387	-.0041	.0116
1.0	.0201	0.0000	0.0000	1.0	-.0188	0.0000	0.0000
carico in 0.4L				carico in 0.5L			
0.0	-.2477	0.0000	0.0000	0.0	-.1909	0.0000	0.0000
.1	.0225	-.0253	-.0453	.1	-.0602	-.0236	-.0505
.2	.3118	-.0428	.0206	.2	.0993	-.0659	-.0444
.3	.6069	.0396	.2055	.3	.3240	-.0745	.0377
.4	.7656	.3131	.4891	.4	.5949	.0218	.2215
.4	.7656	.3131	-.5108	.5	.7548	.3060	.4999
.5	.5949	.0214	-.2301	.5	.7548	.3060	-.4999
.6	.3175	-.0824	-.0481	.6	.5949	.0218	-.2215
.7	.1045	-.0827	.0330	.7	.3240	-.0745	-.0377
.8	-.0122	-.0470	.0485	.8	.0993	-.0659	.0444
.9	-.0643	-.0135	.0318	.9	-.0602	-.0236	.0505
1.0	-.0936	0.0000	0.0000	1.0	-.1909	0.0000	0.0000

rante il quale viene raggiunto il 90% del carico finale rispettivamente in sei mesi ed in un anno circa a partire dall'istante t_0 .

Nelle figg. 9 e 10 sono rappresentati i risultati significativi per un caso particolare di trave con $\lambda L = 2$ e $\lambda L = 4$ soggetta a tre forze uguali poste alle estremità ed al centro.

Dal confronto delle soluzioni trovate, di quella elastica e di quella viscosa con $Q=Q_\infty = \text{cost}$ ($\omega = \infty$) si rileva che le differenze tra la solu-

zione elasto-viscosa, per i diversi ω considerati, sono limitate se comparate con la soluzione elastica: pertanto l'uso delle tabelle allegate si può ritenere valido (con buona approssimazione) anche per valori di $\omega \neq \infty$ quando i carichi vengono applicati nei tempi richiesti dalla usuale pratica costruttiva⁽⁵⁾.

(5) Ovviamente le due situazioni limite, di carico globale istantaneo e di carico applicato a tempo infinito, sono rappresentate dalla soluzione elasto-viscosa con $\omega \neq \infty$ e da quella elastica classica.

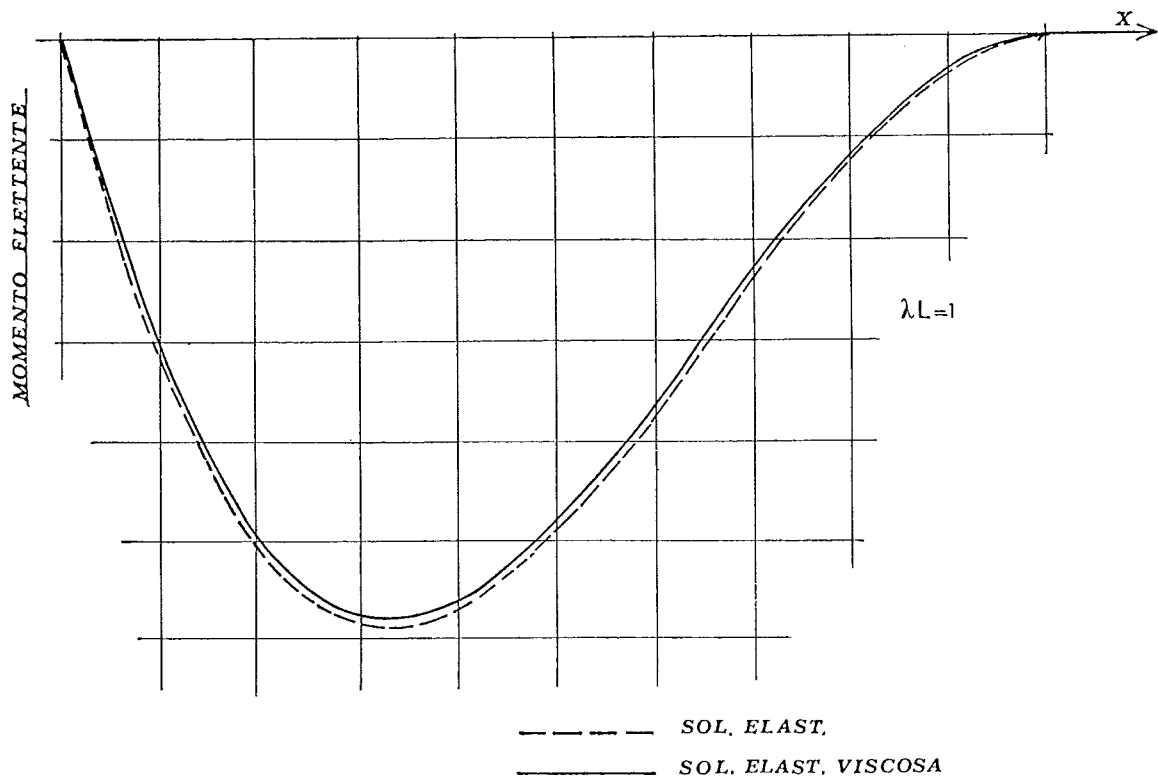


Fig. 6. - Momento flettente di travi con rigidezza relativa $\lambda L = 1$ in fase elastica ed elasto-viscosa.

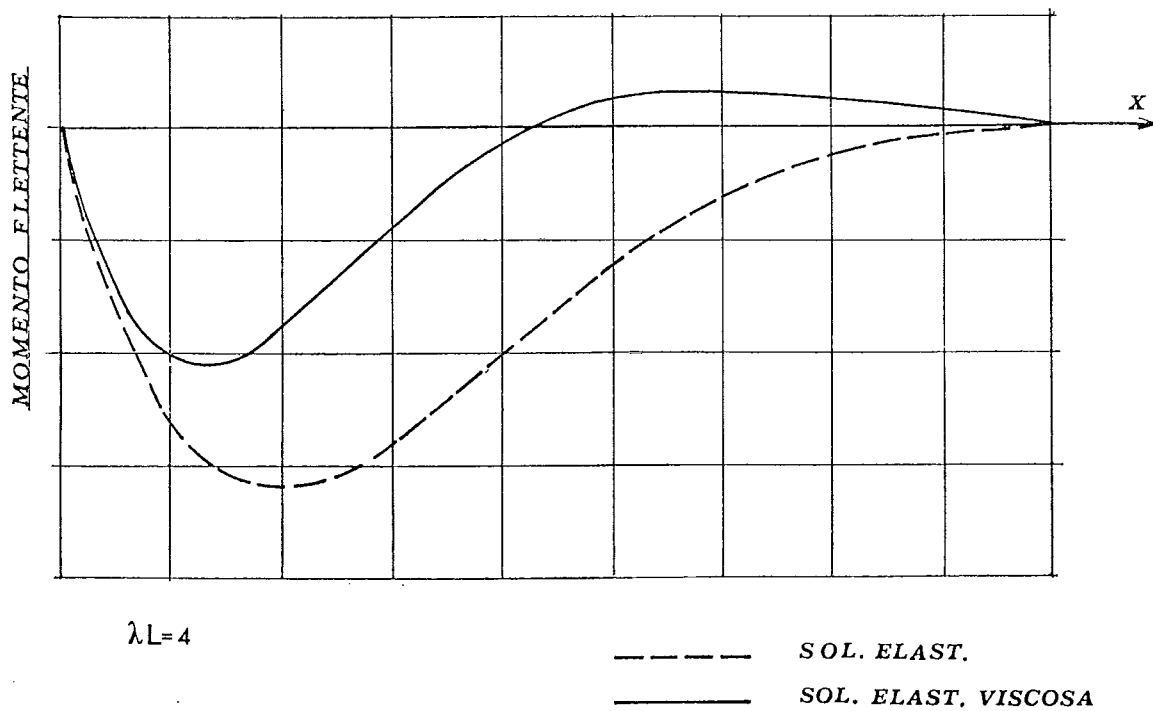


Fig. 7. - Momento flettente di travi con rigidezza relativa $\lambda L = 4$ in fase elastica ed elasto-viscosa.

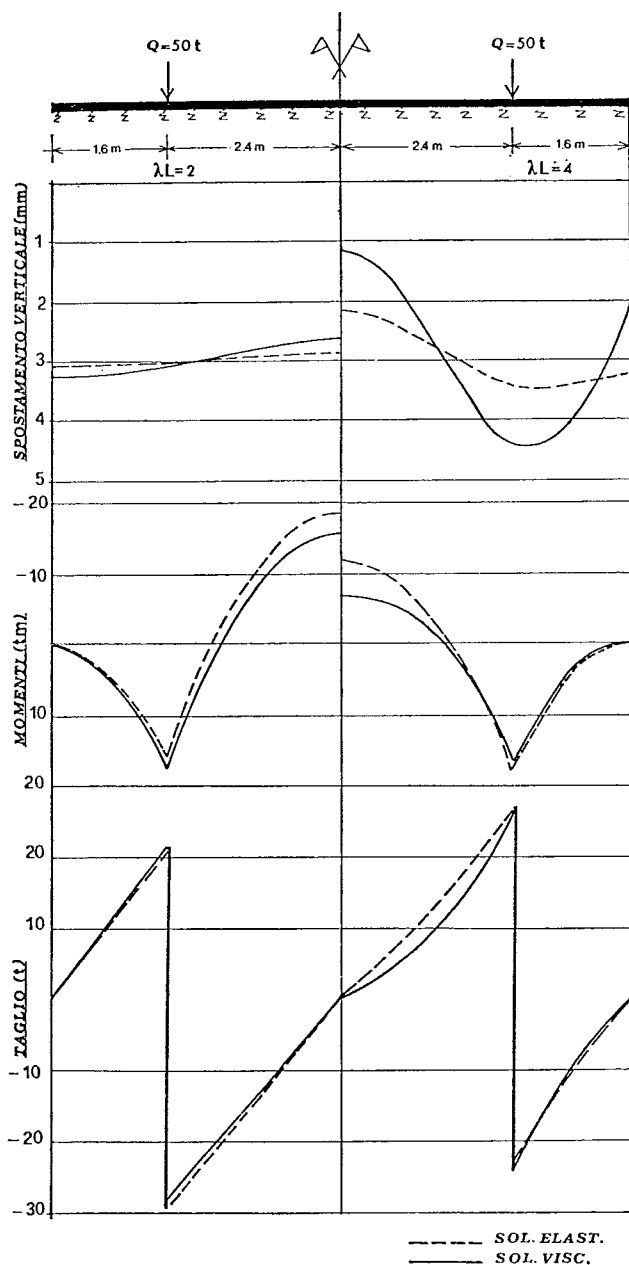


Fig. 8. - Spostamenti verticali, momento flettente e taglio relativi a travi con rigidità relativa $\lambda L = 2$ e $\lambda L = 4$, in fase elastica ed elasto-viscosa.

Degno di nota, in corrispondenza del carico centrale, l'elevato valore del momento nel caso elasto-viscoso mentre esso nella soluzione elastica è pressoché nullo.

5. Conclusioni

Come si è già indicato nelle premesse, la soluzione è applicabile a travi di fondazione su terreni non coesivi modellabili alla Winkler sotto l'azione di funzioni di carico assegnate e tenendo conto della viscosità del calcestruzzo delle travi.

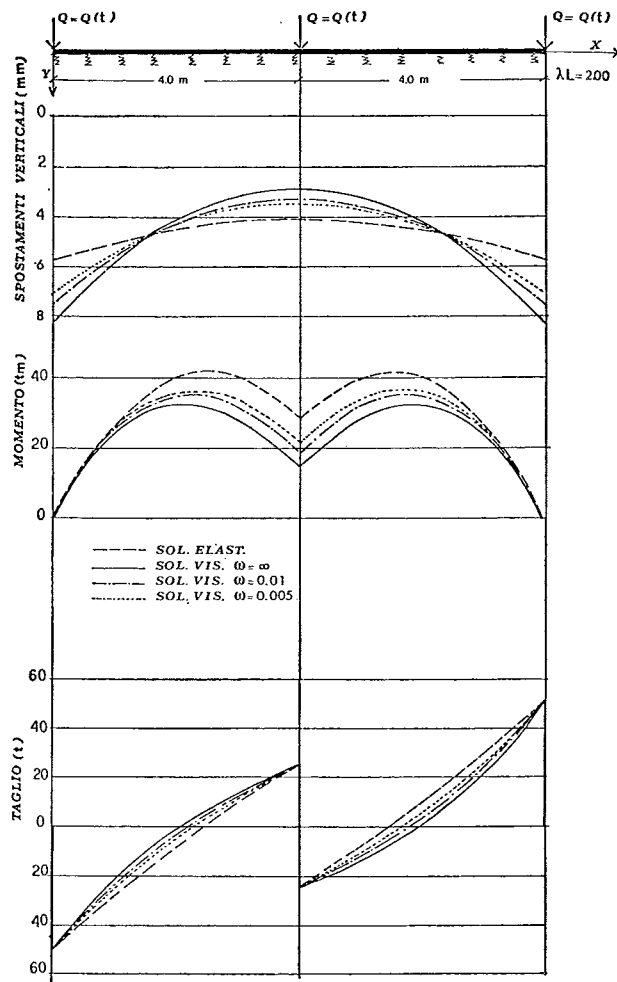


Fig. 9. - Spostamento verticale, momento flettente e taglio relativi a trave con rigidità relativa $\lambda L = 200$, caricata da tre forze variabili nel tempo.

I risultati sono anche applicabili al caso di carichi la cui entità sia gradualmente crescente nel tempo.

Le indicazioni più significative sono le seguenti:

— l'andamento dei diagrammi dei momenti flettenti subisce una sensibile redistribuzione, consigliando l'uso di armature pressoché simmetriche ai due lembi della sezione, come giustamente vien fatto nella buona pratica costruttiva;

— a tale redistribuzione dei momenti fa riscontro una applicazione degli spostamenti verticali nelle zone di applicazione del carico.

Ovviamente, nell'ambito di una certa approssimazione, la soluzione può essere applicata anche nel caso che la sovrastruttura abbia una rigidità non del tutto trascurabile.

Infine, avvalendosi dei risultati ottenuti, in-

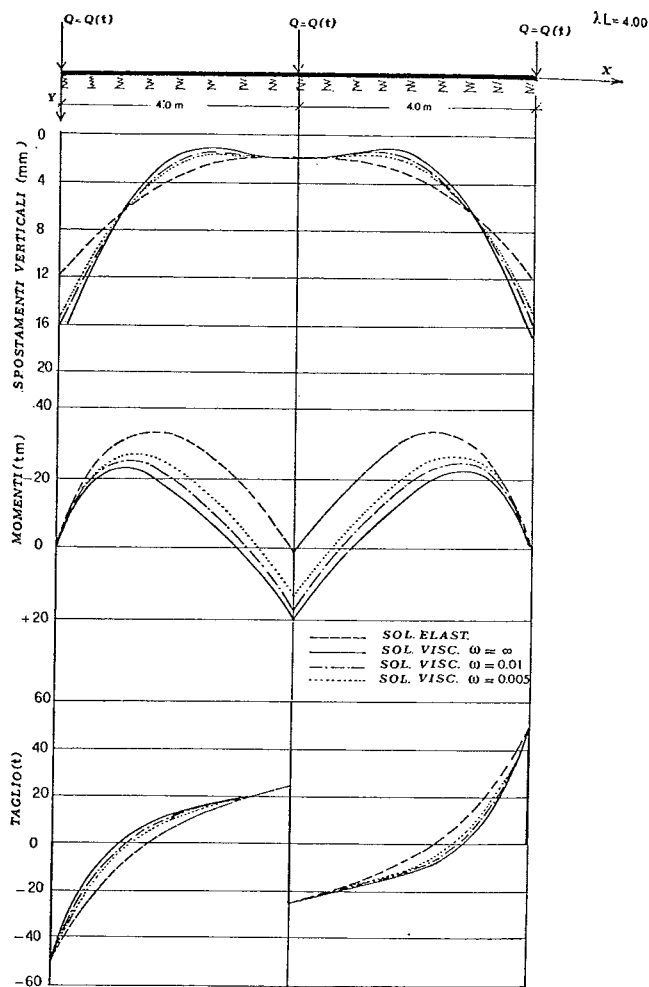


Fig. 10. - Spostamento verticale, momento flettente e taglio relativi a trave con rigidezza relativa $\lambda L = 4$, caricata da tre forze variabili nel tempo.

dicazioni circa l'andamento dei cedimenti si possono trarre schematizzando la fondazione e la sovrastruttura come trave equivalente [MEYERHOF, 1955; MAZZOLANI, 1967; SHERIF, KONIG, 1975].

BIBLIOGRAFIA

- BOWLES J. E. (1968) - *Foundation Analysis and design*.
 CARRIER D. W., CHRISTIAN J. T. (1973) - *Rigid circular plate*

- resting on a non homogeneous elast. half-space. *Geotechnique* 23, 1, pp. 67-84.
 CHAMECKI S. (1969) - *Calcul des tassements progressifs des fondations, en tenant compte de l'interaction des structures et du sol*. Annales ITBTP, 73.
 GIBSON R. E. (1974) - *The analytical method in Soil Mechanics*. Geotechnique, vol. 24, pp. 115-139.
 HEIL H. (1969) - *Studies on the structural rigidity of reinforced concrete building frames on clay*. proc. VII I.C. SMFE Mexico.
 MAZZOLANI F. M. (1967) - *La progettazione delle travi di fondazioni su suolo di Winkler*. R.I.G., vol. 1, pp. 262-278.
 MEYERHOF G. G. (1955) - *Discussion of a paper by Skempton et al.* I.C.E., vol. 5, n. 1, p. 170.
 MOLA F., IORI I. (1979) - *Influenza della viscosità sulla deformabilità di sezioni in cemento armato soggette a pressoflessione*. Politecnico di Milano. Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato. Fratelli Pesenti. Studi e Ricerche vol. 1.
 MOLA F., IORI I. (1980) - *Diagrammi momento-curvatura-tempo per sezioni in cemento armato in presenza di forza normale*. In corso di pubblicazione.
 SCHULTZE E. (1967) - *Bettungszahl oder Steifenzahl*. Festschrift Hirschfeld, Konstruktiver Ingenieurbau, Düsseldorf.
 SHERIF G., KÖNIG G. (1975) - *Platten und Bolken auf nachgiebigem Baugrund*. Springer Verlag.

SUMMARY

The influence of concrete viscosity in soil-foundation interaction

The viscous-elastic behaviour of a reinforced concrete beam on elastic foundation is analysed on the ground of the Krall-Witney's model, assuming a Winkler-type soil.

The three governing differential equations are expanded into sine series so that a system of differential equations with total derivatives with respect to time is obtained.

The integration of these equations is performed by finite differences.

For various values of the relative rigidity (which is related to the ratio between the modulus of subgrade reaction and the beam inertia), the evaluation of both the displacements and the internal forces, due to a concentrated load, is made possible through some suitable tables, which are included in the paper.

Also the effects of gradual loading are analysed, but they turn out to be negligible, if the length of time required by gradual loading and that required by construction are alike.

The results apply to any foundation beam supporting structural elements with zero or negligible stiffness, and resting on a cohesionless soil, whose viscous behaviour is negligible.