

# Il cilindro circolare elastoplastico soggetto a pressione uniforme sulla superficie laterale

L. NUNZIANTE

**SOMMARIO:** La prova di resistenza triassiale, di uso tradizionale per i terreni può validamente essere adoperata per una classe di nuovi materiali (materie plastiche) aventi resistenze non elevatissime. Anche per questi materiali infatti, l'incremento della Tensione idrostatica migliora la resistenza ultima, come accade per le terre. In questo lavoro si svolge una trattazione completa del cilindro circolare di materiale elasto-plastico soggetto a pressione uniforme monotona crescente sulla superficie laterale e a diverse condizioni sulle sezioni di estremità. Si considerano sistematicamente le due classi di materiali plastici di Lévi-von Mises e di Stassi d'Alia che sembrano insieme ricoprire gran parte dei materiali strutturali.

## 1. Premesse

È di grande interesse, anche in relazione alle tradizionali tecniche di sperimentazione sui materiali (es. in Geotecnica), il problema del cilindro a sezione circolare di materiale elastoplastico soggetto a varie condizioni al contorno. Tale problema diventa di sempre maggiore attualità poiché si vanno affermando materiali costruttivi nuovi (materie plastiche, leghe etc.) con resistenze non elevatissime, per i quali, le prove in regime triassiale possono descrivere in modo adeguato e completo il comportamento al limite elastico.

Infatti è già stato assodato [ITO, 1971; NUNZIANTE, CUOMO, 1979] che per tali materiali (come accade per le terre), danno buoni risultati i criteri di resistenza del tipo Stassi-d'Alia che involgono, oltre al Deviatore dello Sforzo anche la Tensione idrostatica. È necessario pertanto alla luce di queste nuove esigenze riscoprire la trattazione del Cilindro soggetto a pressione uniforme monotona crescente sulla superficie laterale e a diverse condizioni sulle sezioni di estremità (spostamento assiale impedito, forza applicata in direzione assiale) e aggiornarne la trattazione partendo dal caso del materiale linearmente elastico e completando lo studio nel caso di materiale elasto-plastico al disopra del limite elastico.

Alcune soluzioni del problema elastico sono già note, ma il problema non è stato ancora risolto in modo completo nel caso del materiale elasto-plastico.

In questo lavoro si studia il problema sopra

enunciato con le seguenti condizioni al contorno:

1) Cilindro soggetto a pressione uniforme  $P$  sulla superficie laterale, con tensioni  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zr}$ ,  $\tau_{z\theta}$  nulle sulle due basi (per i simboli adoperati si veda la figura n. 1 e l'appendice III).

2) Cilindro soggetto a pressione uniforme sulla superficie laterale con spostamenti  $w$  impediti dalle due basi.

3) Cilindro soggetto a pressione uniforme sulla superficie laterale e a forza assiale  $F$  costante (in direzione  $z$ ).

Le soluzioni vengono determinate nell'ipotesi di comportamento elastico e perfettamente plastico per il materiale costituente. Si assumono sistematicamente i criteri di plasticizzazione di von Mises e di Stassi-d'Alia che sembrano, insieme, ricoprire una classe molto estesa di materiali elasto-plastici di interesse tecnico (metalli, terre, materiali polimerici, conglomerato cementizio etc.) determinando la soluzione elastica, i valori di collasso della pressione  $P$  ed il campo di incrementi delle deformazioni plastiche.

Vengono svolti inoltre alcuni esempi numerici relativi a materiali reali.

## 2. Caso 1 - Cilindro soggetto a pressione uniforme sulla superficie laterale

### 2-a) Materiale elastico

Lo stato tensionale è definito in generale dalle sei componenti speciali di tensione (fig. 1) ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{z\theta}$ ).

Siano ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) le componenti dello sposta-

\* Prof. Ing. Luciano NUNZIANTE, Professore stabilizzato di *Plasticità*. Istituto di Scienza delle Costruzioni. Facoltà di Ingegneria. Università di Napoli.

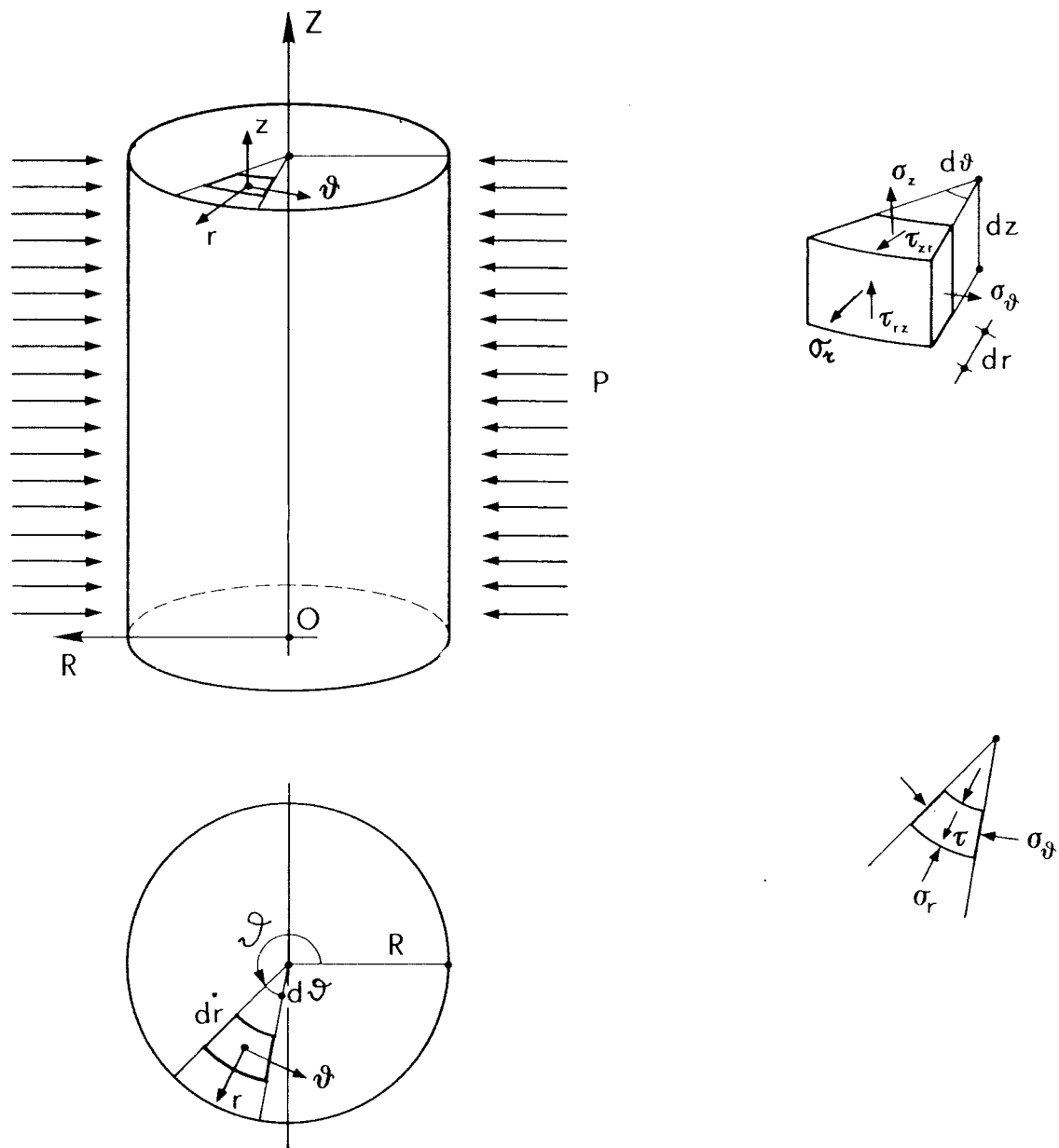


Fig. 1

mento rispetto alla terna  $(r, \theta, z)$ . Le nove funzioni incognite sono legate in generale dalle tre equazioni indefinite dell'equilibrio che sotto l'ipotesi di forze di massa nulle si scrivono:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

e dalle sei relazioni di Navier che si scrivono:

$$E \varepsilon_r = E \frac{\partial u}{\partial r} = \sigma_r - \nu (\sigma_\theta + \sigma_z)$$

$$E \varepsilon_\theta = E \frac{u}{r} = \sigma_\theta - \nu (\sigma_z + \sigma_r) \quad (2)$$

$$E \varepsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)$$

$$G \gamma_{ij} = \tau_{ij} \quad \forall i, j \in (r, \theta, z), i \neq j$$

Nel caso di pressione uniforme sulla superficie laterale la soluzione non dipende dall'anomalia  $\theta$ ; sarà pertanto:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0, \nu = 0. \quad (3)$$

Inoltre i campi di tensione e di deformazione possono supporre non dipendenti da  $z$  e pertanto costanti nella direzione  $z$ ; ciò implica:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Supponendo che le sezioni si mantengano piane si deve avere:

$$\gamma_{rz} = 0 \quad \text{e cioè} \quad \tau_{rz} = 0 \quad (5)$$

e la terza equazione indefinita dell'equilibrio è identicamente soddisfatta.

Anche la seconda equazione indefinita dell'equilibrio è identicamente soddisfatta.

Nel caso in questione è inoltre  $\sigma_z = 0$ .

Il problema si presenta con le quattro funzioni incognite:

$$(\sigma_r, \sigma_\theta, u, w).$$

Le equazioni che reggono il problema sono la prima equazione indefinita dell'equilibrio che diventa:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (6)$$

e le tre relazioni di Navier:

$$\sigma_r - \nu \sigma_\theta = E \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\sigma_\theta - \nu \sigma_r = E \frac{u}{r} \quad (7)$$

$$-\nu (\sigma_r + \sigma_\theta) = E \frac{\partial w}{\partial z}$$

Le (6) e (7) costituiscono un sistema di quattro equazioni differenziali alle derivate parziali nelle incognite funzioni:

$$(\sigma_r, \sigma_\theta, u, w).$$

Il problema così impostato viene di norma risolto mediante la determinazione di una opportuna funzione  $\Phi$  potenziale dello stato tensionale che deve rispettare l'equazione di con-

gruenza, la quale si traduce nella condizione di biarmonicità per la funzione  $\Phi$ :

$$\Delta^4 \Phi = 0 \quad (8)$$

[FRANCIOSI, 1965], e le condizioni al contorno.

In questa sede è stata determinata la soluzione del problema elastico integrando per via diretta il sistema di equazioni differenziali (6), (7) con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} r = R & \quad \sigma_r = P \\ \sigma_z = 0 & \quad \forall z \end{aligned} \quad (9)$$

In appendice I sono consegnati i passaggi della risoluzione diretta del sistema la cui soluzione è:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= P \\ \sigma_\theta &= P \\ u &= \frac{P}{E} (1 - \nu) \cdot r \\ w &= - \frac{2\nu}{E} P \cdot z \end{aligned} \quad (10)$$

## 2-b) Caso 1 - Materiale plastico di Lévi-von Mises

Nella condizione di scorrimento plastico, deve continuare a valere la prima equazione indefinita dell'equilibrio (1).

Assumendo il criterio di plasticizzazione di von Mises:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_y^2 \quad (11)$$

si ha nel caso in questione:

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta = \sigma_y^2 \quad (12)$$

Inoltre avendo assunto un legame associato alla (11) per lo scorrimento plastico, debbono valere le relazioni di Lévi-von Mises che particolarizzate diventano:

$$d \varepsilon_r^p = \frac{\partial u}{\partial r} = \lambda (2 \sigma_r - \sigma_\theta)$$

$$d \varepsilon_\theta^p = \frac{u}{r} = \lambda (2 \sigma_\theta - \sigma_r) \quad (13)$$

$$d \varepsilon_z^p = \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda (-\sigma_r - \sigma_\theta)$$

Le (6), (11) e (13) costituiscono un sistema di 5 equazioni differenziali alle derivate parziali nelle 5 incognite:

$$(\sigma_r, \sigma_\theta, u, w, \lambda).$$

A tale sistema va associato il sistema di condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} r = 0 & & u = 0 \\ z = 0 & & w = 0 \\ r = 0 & & \sigma_r = \sigma_0 \\ r = R & & \sigma_r = P \end{aligned} \quad (14)$$

È stato dimostrato in generale che in questi casi in cui vi è simmetria assiale, il problema non è iperbolico [HILL, 1950; SYMONDS, 1949]. Le (6) e (11) possono essere disaccoppiate dal sistema con opportuni passaggi (consegnati nell'appendice II). Si giunge all'equazione differenziale delle tensioni:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_r}{dr} \right)^2 + \frac{\sigma_r}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} + \\ + \left( \frac{\sigma_r}{r} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_y}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

L'equazione (15) non è di immediata risoluzione, prestandosi peraltro all'integrazione numerica.

La difficoltà dell'integrazione diretta della (15) spinge ad utilizzare i teoremi di Estremo della teoria della plasticità (riportati in appendice III) mediante i quali si possono determinare maggioranti e minoranti della pressione  $P$  di crisi. Nel seguito si dimostra che la pressione  $P = -\sigma_y$  per un materiale di von Mises, è insieme una maggiorante ed un minorante della pressione di crisi ed allora è soluzione del problema; la soluzione è pertanto:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\sigma_y \\ \sigma_\theta &= -\sigma_y \\ u &= -\lambda r \sigma_y \\ w &= 2\lambda \sigma_y z \end{aligned} \quad (16)$$

$P = -\sigma_y$  come minorante della pressione di collasso

Il campo di tensioni  $\sigma_r = -\sigma_y$ ,  $\sigma_\theta = -\sigma_y$  è uno stato di tensioni staticamente ammissibili; infatti:

— soddisfa le equazioni indefinite dell'equilibrio;

— soddisfa inoltre le condizioni ai limiti sulla superficie laterale  $r = R$ ,  $\sigma_r = \sigma_y$ ;

— soddisfa infine l'equazione di compatibilità (III-5) con l'eguaglianza (12).

Pertanto per il *teorema del minorante* (Appendice III) la pressione  $P = -\sigma_y$  costituisce un minorante della pressione di plasticizzazione.

$P = -\sigma_y$  come maggiorante della pressione di collasso

Si consideri il campo di spostamenti

$$u = -Ar, v = 0, w = 2Az \quad (17)$$

ove  $A$  è una costante.

Le componenti degli incrementi della deformazione plastica si determinano dalle (III-2) che forniscono:

$$d\varepsilon_r = -A, d\varepsilon_\theta = -A, d\varepsilon_z = 2A \quad (18)$$

Tali componenti soddisfano le condizioni ai limiti e le condizioni di incompressibilità. Pertanto il campo considerato è un campo di spostamenti cinematicamente ammissibile.

Alle componenti della deformazione plastica sopra determinate si associa un campo tensionale (non necessariamente equilibrato)  $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z)$  che deve rispettare la legge dello scorrimento plastico di Lévi-von Mises che si esplicita:

$$\sigma_r - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3} = -\lambda A$$

$$\sigma_\theta - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3} = -\lambda A$$

$$\sigma_z - \frac{\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta}{3} = 2\lambda A$$

Dalla quale per  $\sigma_z = 0$  si ottiene:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -3\lambda A = -\sigma_y.$$

Questo campo tensionale fornisce attraverso l'equazione di equilibrio ai limiti sulla superficie laterale:

$$P = \sigma_r = -\sigma_y$$

–  $\sigma_y$  costituisce pertanto un maggiorante del carico di collasso.

Avendo trovato un maggiorante coincidente col minorante già determinato è completamente dimostrato che  $P = -\sigma_y$  costituisce il carico di collasso cercato.

### 2-c) Materiale plastico di Stassi-d'Alia

Per un materiale il cui limite di plasticizzazione sia retto dal criterio di Stassi-d'Alia esprimibile in termini di tensioni principali ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) nella forma:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 - \sigma''_y \left[ 1 + \frac{1}{\rho} \right] (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -\sigma''_y{}^2 \quad (19)$$

si può dimostrare che il campo di tensioni:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma''_y$$

è staticamente ammissibile in quanto soddisfa le condizioni indefinite dell'equilibrio, la condizione sul contorno:

$$r = R \quad \sigma_r = \sigma''_y$$

e l'equazione di compatibilità (III-5).

Pertanto la pressione  $P = \sigma''_y$  costituisce un minorante per la pressione di plasticizzazione. Un maggiorante si determina fissando il campo cinematicamente ammissibile di spostamenti:

$$u = -Ar, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (20)$$

dal quale consegue un campo di deformazioni

$$d\varepsilon_r^p = -A, \quad d\varepsilon_\theta^p = -A, \quad d\varepsilon_z^p = 0 \quad (21)$$

A questo campo corrispondono per il soddisfacimento della legge dello scorrimento plastico sulla superficie di plasticizzazione nel piano  $(\sigma_r, \sigma_\theta)$  sovrapposto a quello  $(d\varepsilon_r^p, d\varepsilon_\theta^p)$  i punti:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma''_y, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma'_y$$

Per la condizione al contorno si ha pertanto (nel caso di pressione esterna):

$$P = \sigma''_y$$

che costituisce un maggiorante del carico di collasso. Tale maggiorante coincide col minorante e costituisce pertanto la effettiva pressione di collasso.

Il vettore incremento della deformazione plastica è fornito dalla (III-2) che si scrive:

$$d\varepsilon_r^p = \frac{\lambda}{\rho} \sigma''_y, \quad d\varepsilon_\theta^p = \frac{\lambda}{\rho} \sigma''_y, \\ d\varepsilon_z^p = -\lambda \left[ 3 + \frac{1}{\rho} \right] \sigma''_y \quad (22)$$

### 3) Caso 2 - Cilindro soggetto a pressione uniforme sulla superficie laterale con spostamento assiale impedito.

#### 3-a) - Materiale elastico

Nel caso di spostamento assiale impedito è  $w = 0$  e il sistema di equazioni (1) e (2) si scrive:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ E \varepsilon_r = E \frac{\partial u}{\partial r} = \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) \quad (23)$$

$$E \varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)$$

$$E \varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

La soluzione elastica può ottenersi mediante la sovrapposizione degli effetti e cioè sommando alla soluzione (10) del cilindro libero assialmente quella del cilindro soggetto ad una forza assiale  $F$  che induce una  $\sigma_z$  costante.

La condizione di congruenza impone ovviamente essere

$$w = 0, \quad \varepsilon_z = 0$$

Dalla (10) si aveva

$$w = -\frac{2\nu}{E} P z, \quad E \varepsilon_z = -2\nu P$$

La soluzione del cilindro caricato assialmente fornisce:

$$\sigma_z = \frac{F}{\pi R^2}, \quad \varepsilon_z = \frac{F}{\pi R^2 E} \quad (24)$$

La condizione di congruenza si scrive pertanto:

$$\sigma_z = \frac{F}{\pi R^2} = 2 \nu P \rightarrow F = 2 \nu \pi R^2 P \quad (25)$$

In definitiva lo stato di tensione e di deformazione è il seguente:

$$\sigma_r = P, \sigma_\theta = P, \sigma_z = 2 \nu P \quad (26)$$

$$E \varepsilon_r = P [1 - \nu (1 + 2 \nu)]$$

$$E \varepsilon_\theta = P [1 - \nu (1 + 2 \nu)] \quad (27)$$

$$E \varepsilon_z = 0$$

3-b) Collasso plastico per il materiale di Lévi-von Mises.

La condizione di plasticizzazione di von Mises (11) si particolarizza nel caso in questione nella

$$(P - 2 \nu P)^2 = \sigma_y^2$$

che fornisce al collasso

$$P = \frac{\pm \sigma_y}{1 - 2 \nu} \quad (28)$$

nella quale, considerando il segno  $-$  si ha la pressione di collasso ricercata (per carico proporzionale).

Lo stato tensionale al collasso vale pertanto:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{-\sigma_y}{1 - 2 \nu}, \sigma_z = \frac{-2 \nu \sigma_y}{1 - 2 \nu} \quad (29)$$

$$P = \sigma'_y \left[ \frac{(\rho + 1)(1 + \nu) \pm \sqrt{(\rho + 1)^2(1 + \nu)^2 - \rho(1 + 4\nu^2 - 4\nu)}}{1 + 4\nu^2 - 4\nu} \right] \quad (32)$$

o nella forma equivalente:

$$P = \sigma''_y \left[ \frac{\left[ \left( 1 + \frac{1}{\rho} \right) (1 + \nu) \pm \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{\rho} \right)^2 (1 + \nu)^2 - (1 - 4\nu + 4\nu^2)} \right]}{1 + 4\nu^2 - 4\nu} \right] \quad (33)$$

Ponendo

$$A^\pm = \frac{\left[ \left( 1 + \frac{1}{\rho} \right) (1 + \nu) \pm \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{\rho} \right)^2 (1 + \nu)^2 - (1 - 4\nu + 4\nu^2)} \right]}{1 - 4\nu + 4\nu^2} \quad (34)$$

Al collasso il deviatore di sforzo assume la forma:

$$D_\sigma = [S_{ij}] = \frac{P}{3} (1 - 2 \nu) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Le componenti del vettore incremento della deformazione plastica forniti dalla (III-2) sono all'inizio dello scorrimento plastico:

$$\begin{aligned} d \varepsilon^p_\theta &= d \varepsilon^p_r = -2 \lambda \sigma_y \\ d \varepsilon^p_z &= 4 \lambda \sigma_y \end{aligned} \quad (31)$$

*Esempi*

Per un materiale (acciaio) caratterizzato da  $\nu = 0,25$ ;  $\sigma_y = 3800 \text{ kg cm}^{-2}$  si ha un carico di collasso di valore

$$P = -7600 \text{ kg cm}^{-2}.$$

Per un materiale (es. P.V.C.) avente  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y = 500 \text{ kg cm}^{-2}$ , si ha:

$$P = -1250 \text{ kg cm}^{-2}.$$

3-c) Materiale plastico di Stassi-d'Alia

Per un materiale avente criterio di plasticizzazione alla Stassi-d'Alia la condizione di plasticizzazione per carico proporzionale si scrive sostituendo le (26) nelle (III-4). Si ottiene con qualche passaggio il carico di collasso nella forma:

lo stato tensionale al collasso si scrive:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = A^\pm \sigma''_y, \quad \sigma_z = 2\nu A^\pm \sigma''_y \quad (35)$$

e il vettore incremento della deformazione plastica ha le componenti ottenibili dalla (III-2):

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r^p &= d\varepsilon_\theta^p = \lambda \sigma''_y \left[ A^\pm (1 - 2\nu) - \left( 1 + \frac{1}{\rho} \right) \right] \\ d\varepsilon_z^p &= \lambda \sigma''_y \left[ 2A^\pm - (2\nu - 1) - \left( 1 + \frac{1}{\rho} \right) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

### Esempi

Per un materiale definito da (conglomerato cementizio):

$$\sigma''_y = -300 \text{ kg cm}^{-2}, \quad \rho = -10, \quad \nu = 0,1$$

si ottiene:

$$P = \begin{cases} + 60 \\ - 988 \end{cases} \text{ kg cm}^{-2}.$$

Per un materiale (P.V.C.) definito da

$$\begin{aligned} \sigma'_y &= 500 \text{ kg cm}^{-2} \\ \rho &= -1,3, \quad \nu = 0,30 \end{aligned}$$

si ottiene:

$$P = \begin{cases} + 656 \\ - 3093 \end{cases} \text{ kg cm}^{-2}.$$

4) Caso 3 - **Cilindro soggetto a pressione uniforme sulla superficie laterale e a carico assiale F costante.**

4-a) Materiale elastico.

Il sistema di equazioni risolventi si scrive in questo caso:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ E\varepsilon_r &= \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) = E \frac{\partial u}{\partial r} \\ E\varepsilon_\theta &= \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z) \\ E\varepsilon_z &= \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = E \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (37)$$

La soluzione si determina utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti. Si somma la soluzione trovata in (2-a) a quella del cilindro soggetto a carico assiale che fornisce:

$$E\varepsilon_z = \sigma_z, \quad w = \frac{kz}{E}, \quad \sigma_z = k = \frac{4F}{\pi D^2}$$

$$E\varepsilon_r = -\nu\sigma_z$$

$$E\varepsilon_\theta = -\nu\sigma_z$$

La soluzione del problema, associando la condizione al contorno

$$r = R \quad \sigma_z = P$$

si scrive:

$$\begin{aligned} Ew &= \left[ \frac{k}{E} - 2\nu P \right] z, \\ \sigma_r = \sigma_\theta &= P, \quad \sigma_z = k. \end{aligned} \quad (38)$$

4-b) Materiale plastico di von Mises.

La soluzione (38) ponendo  $k = c\sigma_y$ ,  $c \in (-1,1)$  si scrive

$$\sigma_r = P, \quad \sigma_\theta = P, \quad \sigma_z = c\sigma_y$$

Lo stato tensionale testé determinato, sostituito nella (III-1), condizione di plasticizzazione, fornisce il carico di collasso

$$P = \sigma_y (c \pm 1)$$

Per la condizione di compressione sulla superficie laterale si ha

$$P = \sigma_y (c - 1) \quad (39)$$

e lo stato tensionale è:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_y (c - 1), \quad \sigma_z = c\sigma_y.$$

Si noti che nel caso  $c = 0$  si ha  $P = 0$  (ricadendo nel caso 1); per  $c = -1$  si ottiene  $P = -2\sigma_y$ .

Il vettore incremento della deformazione plastica ha componenti (indipendenti da  $c$ )

$$d\varepsilon_r = d\varepsilon_\theta = -2\lambda\sigma_y, \quad d\varepsilon_z = 4\lambda\sigma_y. \quad (40)$$

$$P = \frac{2k + \sigma'_y(\rho + 1) \pm \sqrt{[2k + \sigma'_y(\rho + 1)]^2 - 4[k^2 - \sigma'_y(\rho + 1 - \rho\sigma'_y)]}}{2} \quad (41)$$

*Esempio*

Per un conglomerato cementizio avente

$$\sigma'_y = 30 \text{ kg cm}^{-2}, \quad k = -50 \text{ kg cm}^{-2}, \quad \rho = -10$$

si ottiene:

$$P = \left\langle \begin{array}{l} + 18 \\ - 352 \end{array} \right\rangle \text{ kg cm}^{-2}.$$

### Appendice I

Le prime tre equazioni del sistema (6) (7) con le posizioni

$$\sigma_r = y_1, \quad \sigma_\theta = y_2, \quad u = y_3, \quad r = x$$

diventano

$$y'_1 + \frac{y_1 - y_2}{x} = 0 \quad (I-1)$$

$$E y'_3 = y_1 - \nu y_2 \quad (I-2)$$

$$E \frac{y_3}{x} = y_2 - \nu y_1 \quad (I-3)$$

Sottraendo la (I-3) dalla (I-2) si ottiene:

$$(y_1 - y_2) = \frac{E}{1 + \nu} \left[ y'_3 - \frac{y_3}{x} \right]$$

sostituendo nella (I-1)

$$y'_1 + \frac{E}{1 + \nu} \frac{y'_3 - \frac{y_3}{x}}{x} = 0$$

e cioè

$$y'_1 = -\frac{E}{1 + \nu} D \left[ \frac{y_3}{x} \right]$$

### 4-d) Materiale plastico di Stassi d'Alia.

Per questo materiale, si ottiene la condizione di crisi in carico proporzionale, sostituendo lo stato tensionale (38) nella (III-4).

Si ottiene la seguente espressione per il carico di collasso:

dalla quale integrando:

$$y_1 = -\frac{E}{1 + \nu} \frac{y_3}{x} + c \quad (I-4)$$

Dividendo la (I-2) per  $\nu$  e sommando alla (I-3) si ottiene

$$\frac{E}{\nu} y'_3 + E \frac{y_3}{\nu} = \left[ \frac{1}{\nu} - \nu \right] y_1$$

e sostituendo a secondo membro l'espressione (I-4) trovata per  $y_1$  si ottiene con qualche passaggio

$$y'_3 + \frac{y_3}{x} = \frac{C}{E} (1 - \nu^2) \quad (I-5)$$

L'omogenea associata della (I-5) ha integrale generale

$$y_{03} = \frac{k}{x}.$$

Un integrale particolare  $\bar{y}_3$  della (I-5) si determina col procedimento di Lagrange nella forma:

$$\bar{y}_3 = \frac{C}{2E} (1 - \nu^2) x \quad (I-6)$$

L'integrale particolare (I-6) sopra determina soddisfa la condizione nell'origine

$$x = 0 \quad \bar{y}_3 = 0$$

e pertanto è l'integrale cercato.

Sostituendo l'integrale (I-6) nella (I-4) si determina

$$y_1 = \frac{C}{2} (1 + \nu) \quad (I-7)$$



e della (I-3) si ottiene

$$y_2 = \frac{C}{2} (1 + \nu) \quad (\text{I-8})$$

Le (I-6), (I-7), (I-8) sono la soluzione del sistema formato dalle equazioni (I-1), (I-2), (I-3).

Imponendo la condizione al contorno sulla superficie laterale

$$x = R \quad y_1 = P$$

si ottiene

$$\begin{aligned} y_1 &= P \\ y_2 &= P \\ y_3 &= \frac{P}{E} (1 - \nu) x \end{aligned}$$

Dalla (I-3) si ottiene inoltre

$$w = - \frac{2 \nu}{E} P z$$

Pertanto la soluzione del problema è:

$$\begin{aligned} \sigma_r = P, \quad \sigma_\theta = P, \quad u &= \frac{P}{E} (1 - \nu) r, \\ w &= - \frac{2 \nu}{E} P z. \end{aligned}$$

## Appendice II

$$\frac{d \sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} = \frac{\sigma_\theta}{r} \quad (\text{II-1})$$

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta = \sigma_y^2. \quad (\text{II-2})$$

La (II-1) può scriversi

$$r \frac{d \sigma_r}{dr} + \sigma_r = \sigma_\theta$$

sostituendo nella (II-2) si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{d \sigma_r}{dr} \right)^2 + \frac{\sigma_r}{r} \frac{d \sigma_r}{dr} + \left( \frac{\sigma_r}{r} \right)^2 &= \\ &= \left( \frac{\sigma_y}{r} \right)^2 \end{aligned}$$

che è l'equazione differenziale risolvibile.

## Appendice III

Richiami della teoria della Plasticità [KACHANOV, 1971].

Criterio di plasticizzazione secondo von Mises con  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  tensioni principali e  $\sigma_y$  modulo della tensione di plasticizzazione in prova monoassiale per materiale isoeresistente: (equazione della superficie di plasticizzazione)

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \\ &+ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2 \sigma_y^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-1})$$

Legame associato dello scorrimento plastico (in generale)

$$d \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \lambda \geq 0 \quad (\text{III-2})$$

Legame associato dello scorrimento plastico secondo Lévi-von Mises

$$d \varepsilon_{ij}^p = \frac{H}{2 \tau_y} s_{ij} \quad (\text{III-3})$$

dove

$$H = \left[ 2 d \varepsilon_{ij} \cdot d \varepsilon_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

con  $s_{ij}$  componente del deviatore di sforzo

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

Criterio di plasticizzazione secondo Stassi d'Alia per materiali eteroresistenti con  $\sigma'_y, \sigma''_y$  rispettivamente tensioni limite a trazione e a compressione e

$$\rho = \frac{\sigma''_y}{\sigma'_y}$$

(equazione della superficie di plasticizzazione)

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 - \\ &- \sigma''_y \left[ 1 + \frac{1}{\rho} \right] (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \\ &+ \sigma''_y{}^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-4})$$

## Teoremi di estremo per il corpo plastico

### Teorema statico

Uno stato tensionale  $\sigma_{ij}$  soddisfacente le equazioni indefinite dell'equilibrio e le condizioni di equilibrio ai limiti con assegnate forze superficiali  $F_i$ , per il quale risulta

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (\text{III-5})$$

si chiama *staticamente ammissibile*.

Il carico esterno  $F'$  in equilibrio con le  $\sigma_{ij}$  costituisce un minorante dell'effettivo carico di collasso  $F$ .

$$F' \leq F$$

### Teorema cinematico

Un campo di spostamenti  $v_i$  continuo e differenziabile, e di incrementi della deformazione plastica  $d\varepsilon_{ij}^p$  soddisfacenti le equazioni di compatibilità

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

che soddisfa la legge dello scorrimento plastico (III-1) si chiama un campo *cinematicamente ammissibile*. Il carico esterno  $F''$  in equilibrio mediante le equazioni ai limiti con lo stato tensionale prodotto mediante la compatibilità plastica del campo cinematicamente ammissibile, costituisce un maggiorante del carico di collasso

$$F'' \geq F$$

## Lo stato plastico effettivo:

$$v_i, \quad d\varepsilon_{ij}^p, \quad \sigma_{ij}$$

corrispondente al carico di collasso effettivo  $F$  è contemporaneamente un campo staticamente ammissibile e cinematicamente ammissibile.

### SUMMARY

#### The circular elastic-plastic cylinder under uniform pressure on the lateral surface.

The traditional test on the soils, the triaxial test, can be applicate to a class of new materials (the plastics) having not very large strenght. The Hidrostatic pressure increases the Yield point of these materials as well as the soils.

In this work the complete outline of the cyrcular elastic-plastic cylinder under uniform pressure on lateral surface is done.

The Lévi-von Mises and Stassi d'Alia plastic materials are systematicalli examined, because they together cover a very large class of structural materials.

### BIBLIOGRAFIA

- FRANCIOSI V. (1965) - *Scienza delle costruzioni*. Ed. Liguori, Napoli.
- HILL R. (1950) - *Mathematical theory of plasticity*. Oxford.
- ITO K. (1971) - *Mechanics of upper and lower yield points of amorphus polymer solids*. Transac. Soc. Rheology. 15,3 (389-413).
- KACHANOV L. M. (1971) - *Foundation of the theory of plasticity*. North Holland, PC.
- NUNZIANTE L., CUOMO M. (1979) - *Individuazione di un criterio di plasticizzazione valido per i materiali polimerici. Discussione teorica e risultati sperimentali*. Quaderno n. 130. Fond. Politecnica per il Mezzogiorno. Ed. Giannini. Napoli.
- SYMONDS P. S. (1949) - *Quart. Journ. Appl. Mathem.* 6. 448.