

Il metodo degli elementi finiti nello studio e progetto delle dighe

Finite Element Methods in Analysis and Design of Dams. Commission Internationale des Grands Barrages, Parigi, gennaio, 1970.

La Commissione per l'analisi ed il progetto delle dighe, del Comitato Internazionale Grandi Dighe, ha pubblicato un importante rapporto di 95 pp. (Bulletin 30), dal titolo sopra indicato, con stesura bilingue (inglese e francese).

Tale rapporto riassume, può dirsi, lo « stato dell'arte », al momento attuale, circa l'applicazione del metodo degli elementi finiti alla progettazione ed allo studio delle grandi dighe. Per questo si è pensato di recensirlo.

Con la presente recensione non si intende presentare un accurato ed esauriente riassunto, ma solo accennare ad argomenti di particolare rilievo, trattati nel rapporto, in modo da porre il lettore in grado di farsi un'idea del contenuto e della importanza di esso.

Pertanto, anziché procedere ad una pedissequa indicazione di paragrafi, si adotterà una trattazione antologica concernente vari argomenti di più spiccato interesse, o non richiedente sviluppi matematici, troppo specialistici, pur mantenendo un riferimento alle grandi divisioni, A, B, C, D, del rapporto.

Parte A

Il metodo degli elementi finiti può considerarsi derivato da quello denominato « delle funzioni di saggio » o di prova (trial functions; fonctions d'essai), le quali vengono definite localmente, all'interno di ciascun elemento della scomposizione, mentre certi parametri discreti sono legati al valore delle incognite in punti particolari, o « nodi ». In modo più intuitivo, può dirsi che il solido elastico da studiare si pensa scomposto in porzioni di forma semplice, il comportamento delle quali sia facile da determinare, in funzione della posizione dei nodi. Si cercano poi i valori delle coordinate dei nodi, i quali siano compatibili con l'esigenza di coincidenza dei nodi degli elementi adiacenti, e con i carichi agenti. Ricavate così le deformazioni, si risale alla co-

noscenza delle tensioni interne (approssimate) entro ciascun elemento.

Il metodo in parola ha trovato nella progettazione delle dighe uno dei campi di sua peculiare applicazione, resa però piuttosto onerosa per le circostanze cui adesso si accenna.

Nella maggior parte dei casi, la scomposizione ideale del corpo della diga, e di parte delle masse rocciose, va fatta in elementi tridimensionali. È inoltre necessario che gran parte degli elementi siano « piccoli », al fine di ottenere accettabile precisione dei risultati nelle parti critiche della struttura. Con elementi tridimensionali, ridurre a metà le dimensioni lineari dell'elemento, corrisponde, grosso modo, a moltiplicare per otto il numero degli elementi e dei nodi.

Occorrono pertanto, nella pratica, scomposizioni con gran numero di elementi e di nodi. È dato che a ciascun nodo corrispondono parecchi gradi di libertà, e a ciascuno di questi una incognita, si scorge come si arrivi a dover risolvere, per determinare le deformazioni, sistemi di equazioni lineari di grosse dimensioni (varie migliaia di equazioni).

Se gli elementi finiti sono di forma semplice, e di comportamento semplificato, i calcoli sono per ognuno più brevi, ma la scomposizione deve essere minuta e fitta. Possono invece adottarsi elementi di forma e comportamento più complessi, ed allora ne bastano di meno, ma i computi sono più complicati, e così pure la programmazione.

La scelta del tipo di elemento è pertanto cruciale, e va fatta come prima cosa.

Oggi si usano spesso, anziché elementi tetraedrici od esaedrici (non regolari), configurazioni elementari più complesse, con nodi aggiuntivi negli spigoli. L'impiego di elementi del genere permette di solito di ridurre il numero e di aumentare le dimensioni, rendendo meno minuta la scomposizione; la programmazione è però più complicata.

Un tipo particolarmente interessante di elementi è quello denominato « blocco parabolico isoparametrico » (parabolic isoparametric brick), il quale consente non di rado una soddisfacente accuratezza dei risultati, pur con una notevole riduzione del numero degli

elementi ed anche dei gradi di libertà, purché però si riesca a realizzare una scomposizione nella quale siano evitati elementi aventi forme troppo allungate. Questi vantaggi si conseguono perché entro simili elementi si rinuncia ad imporre la condizione che tre punti allineati, comunque scelti restino tali dopo la deformazione, e si ammette una legge meno semplificata.

È ben nota la convenienza di impiegare elementi più piccoli nelle zone del solido elastico ove si prevede che le derivate spaziali delle tensioni risulteranno più forti, e di passare con gradualità ad elementi più grandi man mano che ci si allontana da tali zone critiche. A tal modo si riduce notevolmente il numero complessivo dei nodi, dei gradi di libertà, e delle equazioni da risolvere in sistema. Taluni elementi periferici possono anche farsi molto grandi, teoricamente « infiniti ».

Nonostante il bisticcio verbale, di elementi finiti che sono « infiniti », questo procedimento può talvolta essere ben utile, purché si tenga conto che, a questo modo, alcuni nodi restano allontanati « all'infinito », e si comportano perciò come punti impropri.

Parte B

I calcoli per la determinazione delle tensioni, ai fini del progetto della diga, possono essere svolti nell'ipotesi di elasticità lineare, o in quella di elasticità non lineare. E per i problemi di stabilità si può procedere ai calcoli a rotazione, ed anche alla ottimizzazione automatica delle dimensioni critiche dell'opera. Il calcolo non lineare è in genere da 5 a 10 volte più oneroso di quello lineare, per la maggiore complicazione dei computi e pertanto, spesso, viene riservato ad una fase finale, dopo calcoli di carattere preliminare, condotti in base all'ipotesi lineare. Qualche volta, in casi particolari che richiedono però un preventivo attento esame, può ricorrersi alla scomposizione in elementi bidimensionali, ed in questo caso, in genere, con forte risparmio nell'onere delle calcolazioni. Ad esempio, per una diga che nella scomposizione tridimensionale ad elementi tetraedrici porti a dover considerare circa 30000 gradi di libertà, e cioè altrettante

incognite, lo studio bidimensionale potrebbe portare anche a solo poche centinaia di gradi di libertà e di incognite. Il caso di elementi tridimensionali di tipo sofisticato, per esempio di tipo parabolico isoparametrico, è in un certo qual modo intermedio, poiché corrisponderebbe a qualcosa come 3600 gradi di libertà, a parità nell'ordine di grandezza delle approssimazioni. Ciò spiega la convenienza frequente dell'impiego di elementi parabolici nell'esame con elementi tridimensionali. Un tipo di dighe per il quale il calcolo con elementi bidimensionali è spesso ben praticabile è quello delle dighe a spononi.

Per quel che concerne i carichi agenti, oggi si cerca di analizzare, in modo più attento e realistico che in passato, l'influenza delle modalità della loro applicazione al corpo della diga. E con ciò si riesce fra l'altro ad attribuire la dovuta importanza al fatto che tutti i materiali interessati, e cioè terre, rocce varie, e perfino lo stesso calcestruzzo, presentano una porosità della quale è inammissibile non tenere conto, senza parlare delle possibili locali, non anormali, fessurazioni. L'introduzione, nell'insieme dei calcoli, degli effetti delle pressioni interstiziali non è però agevole.

Una certa semplificazione può ottenersi, in qualche caso, ricorrendo ad accorgimenti come quelli che seguono:

1) Per la prima applicazione del carico idrostatico si astrae dal considerare gli effetti delle infiltrazioni.

2) In una seconda fase, si calcolano delle forze nodali aggiuntive, ammettendo qualche ragionevole legge di ripartizione delle pressioni interstiziali.

Così, fra l'altro, si consegue una utile separazione degli effetti rispettivi, del carico esterno e delle sottopressioni.

Si tratta, comunque, di una materia nella quale parecchio è ancora da chiarire e migliorare, ma che, può prevedersi, consentirà trattazioni meglio aderenti alla reale complessità di taluni fenomeni.

Anche gli effetti delle variazioni e delle differenze di temperatura possono venire studiati con il metodo degli elementi finiti. A tale proposito, è opportuno distinguere fra le variazioni termiche rapide, come quelle a periodicità diurna, e quelle più lente. Le prime hanno per lo più scarsa rilevanza, se si eccettuino limitate porzioni superficiali dell'opera.

Gli effetti delle variazioni lente, o stagionali, possono invece essere sensibili, o notevoli, e possono essentirsi a maggiore profondità nel corpo dell'opera. Non vi è però, ancora, un soddisfacente accordo fra i risultati dei computi, e quelli sperimentalmente constatati; su tale argomento opportuni studi e più approfondite esperienze chiariranno vari dettagli.

Un altro campo, nel quale si avverte il bisogno di ulteriori studi e progressi è quello della conoscenza e della rappresentazione matematica delle proprietà dei vari materiali. In altre parole, occorrono dei modelli matematici più soddisfacenti, per esprimere con maggiore fedeltà le proprietà (meccaniche, idrauliche, termiche) dei materiali, specie in relazione a particolari fenomeni, come quelli della resistenza a trazione, e le modalità di formazione e di propagazione delle fessure.

Parte C

Questa parte del rapporto concerne il calcolo del comportamento dinamico delle dighe, e cioè, in pratica, dei fenomeni indotti in esse dagli eventi sismici.

Fino ad oggi è stata largamente usata, allo scopo, la rappresentazione statica degli eventi agenti, ottenuta tenendo conto, principalmente ed esclusivamente, della componente diretta a monte dell'accelerazione, quella cioè per la quale la diga « spinge » l'acqua del bacino.

Con l'applicazione del metodo degli elementi finiti a questi complessi fenomeni dinamici, è adesso possibile di introdurre ipotesi e rappresentazioni meno semplicistiche, e condurre analisi più aderenti alla multiforme realtà dei fenomeni elastodinamici. Tuttavia ancor oggi molti particolari meritano di essere approfonditi e necessitano di ulteriori studi e sviluppi.

Le fasi principali del calcolo, nell'esame dei fenomeni dinamici, possono venire identificate come segue:

1) Scomposizione ideale del corpo della diga, e di una idonea porzione delle masse rocciose prossime, in elementi finiti, bi o tridimensionali.

2) Determinazione dei parametri iniziali, di rigidità e di smorzamento, nonché delle forze da sopporre agenti. Formulazione delle equazioni del movimento.

3) Trasformazione di tali equazioni, con passaggio alle coordinate modali.

4) Calcolo della risposta sismica secondo ciascuna coordinata modale, e sovrapposizione delle risposte singole, per l'ottenimento della risposta complessiva o totale.

Le coordinate modali, si ricorda, costituiscono un sistema il quale è in relazione con gli autovettori, corrispondenti ad autovalori della matrice la quale governa il fenomeno dinamico nel suo insieme. L'introduzione di tali coordinate viene fatta perché essa consente di scomporre il fenomeno complessivo in fenomeni singoli più semplici ed agevoli da determinare, e poco interferenti fra di loro, e fra i quali vale il principio di sovrapposizione.

Le comuni schematizzazioni in elementi finiti, del complesso « digaroccia-acqua », presentano un tipico difetto, per quanto riguarda la corretta espressione dei fatti sismici, e cioè della propagazione delle onde sismiche. E difatti l'insieme degli elementi risulta di solido terminato inferiormente da una superficie (o da un contorno) che si comporta, nell'analisi condotta con i calcoli, come una superficie di discontinuità elastodinamica, e che pertanto dà luogo inevitabilmente a marcate riflessioni delle onde. Nel sistema reale, spesso, nulla corrisponde a tale superficie riflettente, che pertanto altera la fedeltà del modello matematico realizzato. Si può eliminare tale inconveniente ricorrendo ad un idoneo insieme periferico di elementi finiti « infiniti », cioè allontanando all'infinito la detta superficie di discontinuità, il che equivale praticamente ad abolirla.

Il metodo degli elementi finiti permette di trattare in maniera più realistica, nel fenomeno sismico, il problema delle interazioni fra la diga e la massa d'acqua contenuta nel bacino.

La tecnica del WESTERGAARD, detta della « massa aggiunta », sino ad oggi diffusamente seguita, si basa per lo più sulla ipotesi, un po' troppo sbrigativa, di una diga rigida e di una massa d'acqua incompressibile. Con l'impiego degli elementi finiti è relativamente agevole introdurre ipotesi meno semplicistiche, per esempio diga rigida ed acqua compressibile, o diga elastica ed acqua incompressibile, o si può anche tener conto sia dell'elasticità della diga che della comprimibilità dell'acqua. Quest'ultimo parametro, secondo quanto è stato riscontrato, ha sui fatti dinamici un'influenza maggiore di quanto prima si supponesse.

Il calcolo delle interazioni idrodinamiche fra massa d'acqua e diga viene svolto preferibilmente nel dominio delle frequenze, e cioè in quello che corrisponde alle « risposte armoniche », in contrapposto con il dominio nel quale la variabile indipendente è il tempo, e si considerano le risposte « transitorie », per es. « indiciali ».

La detta preferenza è in relazione al fatto che viene così agevolato il ricorso all'utile algoritmo detto della trasformazione « rapida » di Fourier.

È indubbio che il metodo degli elementi finiti costituisce oggi il mezzo più potente e moderno per affrontare adeguatamente i complicati problemi concernenti le azioni sismiche sulle grandi dighe. È tuttavia un procedimento oneroso, sia per l'alta complessità dei programmi, come per il costo delle lunghe e numerose esecuzioni, occorrenti per la risoluzione, e che impegnano computers di vasta capacità di memoria.

Questa parte C del rapporto contiene anche vari interessanti spunti matematici riguardanti il calcolo differenziale

e matriciale dei problemi dinamici delle dighe. Non avrebbe però senso di darne qui riassunti, che sarebbero per necessità troppo succinti e pertanto troppo poco intelligibili, e che d'altra parte interesserebbero solo taluni specialisti.

Parte D

La parte D del rapporto concerne varie raccomandazioni che il Comitato ha formulato, ai fini dell'auspicabile ul-

teriore miglioramento delle tecniche di calcolo e progetto, e dell'estensione degli studi per la migliore conoscenza del comportamento dei materiali, con la messa a punto di nuovi e più adeguati modelli matematici statici e dinamici. Segnala inoltre l'opportunità di perfezionare i criteri e le regole concernenti il giudizio di validità tecnica, od accettabilità, dei progetti.

La materia dello studio e della progettazione delle grandi dighe costituite

un campo interdisciplinare al quale affluiscono la Geotecnica e la Meccanica, l'Idraulica, l'Analisi Numerica, l'Arte della Programmazione. Il rapporto che si è recensito sarà certamente, a vari cultori degli anzidetti rami, o di materie vicine, occasione di interessanti riflessioni ed applicazioni.

Il rapporto è corredato da 17 pagine contenenti numerose figure, richiamate nel testo, ed una bibliografia di 114 voci.

(Giuseppe Aprile)