

Un modello del comportamento dinamico di agglomerati monogranulari coesivi

V. FRANCIOSI *

SOMMARIO: Si fornisce un semplice modello meccanico che può correttamente simulare il comportamento limite di un agglomerato monogranulare dotato di coesione. Utilizzando tale modello, si determina il periodo di disgregazione in funzione del peso specifico, della dimensione dei granuli, della coesione, dell'allungamento limite e dell'ampiezza della perturbazione.

1. La curva intrinseca di un agglomerato unifornne privo di coesione

Si prende in esame un materiale costituito da elementi di dimensioni non molto variabili, così da poterlo assimilare ad un insieme di sfere dello stesso raggio R (e dello stesso peso specifico γ).

La teoria della curva intrinseca si basa sul presupposto che la crisi puntuale avvenga per slittamento irreversibile tra elementi piani paralleli, una volta che la tensione tangenziale su tali piani abbia raggiunto un valore limite, funzione della tensione normale. Il legame di crisi $\sigma \tau$ (legge di attrito interno) si postula sia indipendente dallo stato tensionale relativo alle altre giaciture; per materiali isotropi esso è lo stesso rispetto ad ogni giacitura.

Una apparecchiatura fisica atta a determinare la legge $\sigma \tau$ di crisi è quella schematizzata nella fig. 1, dove il materiale è racchiuso in una scatola parallelepipedica divisa a metà secondo il piano xz , in modo che la crisi sia imposta sul piano di separazione delle due metà; se A è l'area della faccia parallela al piano xz , è

$\sigma = \frac{F_n}{A}$, $\tau = \frac{F_t}{A}$. Fissata F_n , si applica una F_t

crescente fino ad ottenere uno slittamento permanente; ripetendo tale esperienza per più valori di F_n (e naturalmente ogni esperienza va eseguita su un provino diverso) si perviene alla legge desiderata.

Il materiale ideale preso in esame sia disposto nella scatola in modo che il centro C della sfera generica ed i centri A e B delle due sfere su cui essa poggia definiscano un piano parallelo ad una faccia.

Nell'ipotesi di sfere lisce, il principio dei lavori virtuali permette di asserire che la posi-

* Prof. ing. Vincenzo FRANCIOSI, ordinario di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli. Lavoro eseguito con il contributo del CNR.

zione della fig. 1 è di equilibrio se e solo se per ogni spostamento della metà superiore è

$$\delta_1 L_v = F_n s_{1n} + F_t s_{1t} \leq 0; \quad (1)$$

i vincoli infatti sono unilaterali. Nella (1) s_{1n} ed s_{1t} sono le parti del primo ordine (nella coordinata lagrangiana) delle componenti s_n ed s_t dello spostamento secondo y e z .

Dato s_{1n} , comunque negativo, è

$$s_{1t} \in \left[\frac{s_{1n}}{\operatorname{tg} 30^\circ}, -\frac{s_{1n}}{\operatorname{tg} 30^\circ} \right].$$

La (1) è verificata per $F_t = 0$. Per ottenere $F_{t \max}$, deve considerarsi $s_{1t \max}$, e prendere la (1) come uguaglianza; si ha così

$$F_n s_{1n} - F_{t \max} \frac{s_{1n}}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 0$$

da cui

$$F_{t \max} = F_n \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Per ottenere $F_{t \min}$, deve considerarsi $s_{1t \min}$, e prendere sempre la (1) come uguaglianza; si ha così

$$F_n s_{1n} + F_{t \min} \frac{s_{1n}}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 0$$

da cui

$$F_{t \min} = -F_n \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Si ha così la condizione di equilibrio

$$F_t \in [-F_n \operatorname{tg} 30^\circ, F_n \operatorname{tg} 30^\circ]. \quad (2)$$

Se

$$F_t \in] -F_n \operatorname{tg} 30^\circ, F_n \operatorname{tg} 30^\circ [\quad (3)$$

la posizione della fig. 1 è di equilibrio stabile; infatti, per la (1), qualsiasi variazione da essa importa $\delta_1 L_v < 0$.

Se invece

$$F_t = \pm F_n \operatorname{tg} 30^\circ \quad (4)$$

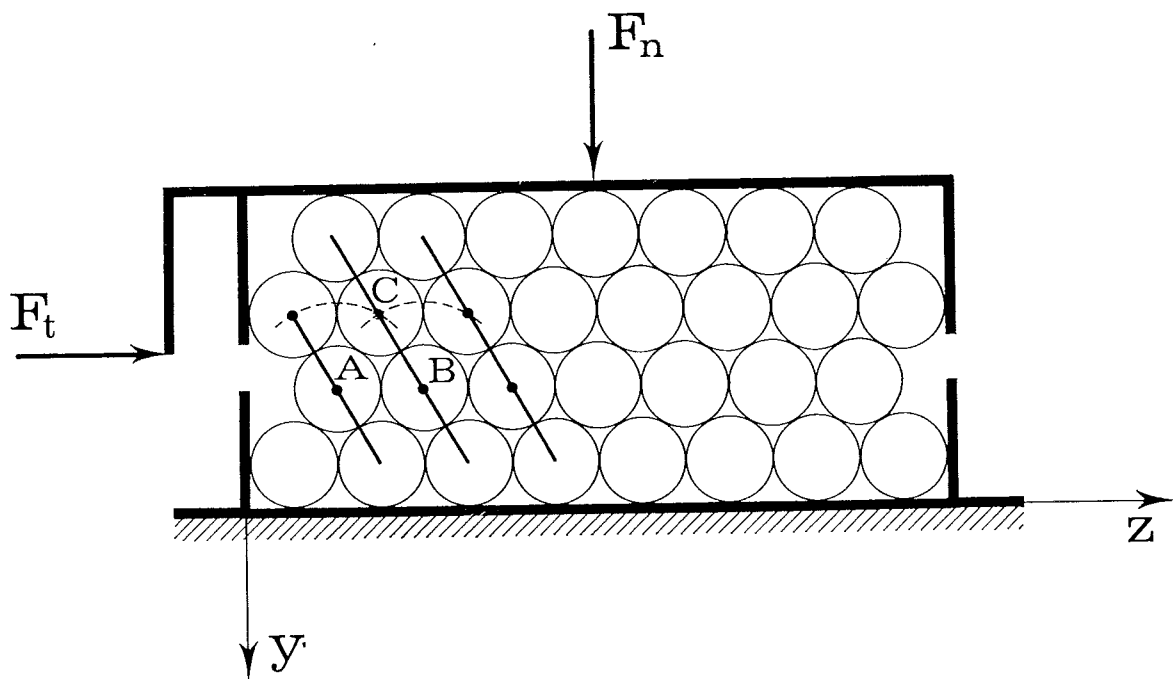


Fig. 1

la posizione della fig. 1 è di equilibrio instabile; infatti per tali valori di F_t la (1) importa $\delta_1 L_v = 0$ per $s_{1t \max}$ ed $s_{1t \min}$, e cioè per gli spostamenti che mantengono il contatto con le sfere inferiori. D'altro canto per $F_t = F_n \operatorname{tg} 30^\circ$, si consideri una configurazione $C + \delta C$ comunque prossima a quella C della fig. 1, ottenuta da essa per uno spostamento della metà superiore verso destra, e tale da mantenere il contatto con le sfere inferiori. Si ha

$$\delta_1 L_v_{C + \delta C \rightarrow C} < 0,$$

poiché rispetto allo spostamento della (1) per cui $\delta_1 L_v = 0$ il rapporto $\frac{s_{1t}}{s_{1n}}$ risulta maggiore in modulo. Quindi il $\delta_1 L_v$ a partire da $C + \delta C$ è negativo per un avvicinamento a C , positivo per un allontanamento. Ciò significa che la metà superiore si sposta verso destra indefinitamente sotto $F_t = F_n \operatorname{tg} 30^\circ$ di valore costante. Se poi il valore di F_t diminuisce, la metà superiore resta ferma ed in equilibrio stabile ad una nuova ascissa, in cui la posizione relativa delle sfere è ancora quella della fig. 1.

Il diagramma $F_t s_t$ è perciò quello della fig. 2, e cioè corrisponde perfettamente al diagramma σ, ε di un materiale rigido plastico; si verifica pure che il volume è inalterato a deformazione plastica avvenuta, e cioè il modulo di Poisson $\frac{1}{m}$ in regime di crisi è pari ad $\frac{1}{2}$, conformemente al postulato di Nadai.

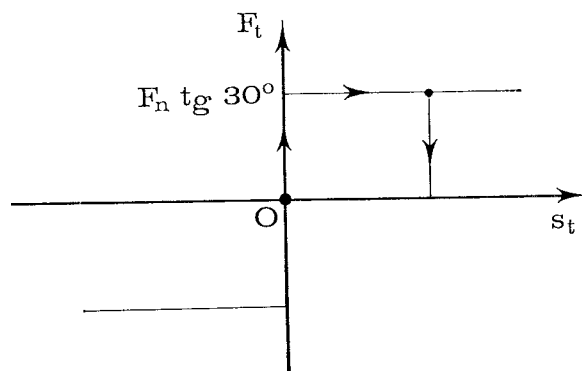


Fig. 2

Dividendo la (4) per A , si ottiene la relazione di crisi tra σ e τ :

$$\tau = \pm \sigma \operatorname{tg} 30^\circ; \quad (5)$$

essa è riportata nella fig. 3, e non è altro che la bilatera di Coulomb per materiale privo

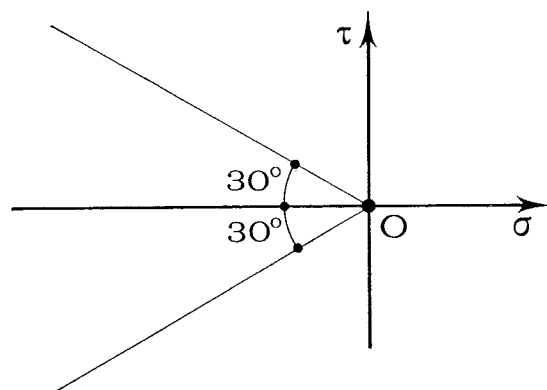


Fig. 3

di coesione, e per un angolo di attrito interno di 30° .

Nella fig. 4 è riportato l'insieme della sfera generica di centro C della fig. 1 e delle due sfere su cui essa poggia; il modello può ridursi a tali tre sfere (*modello trisferico*), ove si faccia agire sulla sfera superiore una forza N diretta

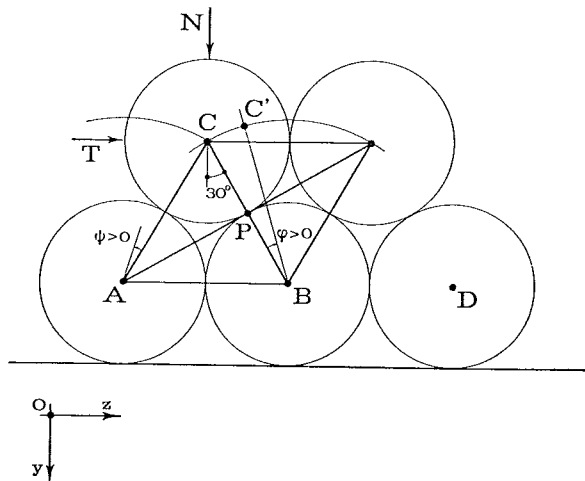


Fig. 4

secondo il diametro parallelo ad y, ed una forza T diretta secondo il diametro parallelo a z. Infatti la relazione di equilibrio fra N e T può ottenersi in modo del tutto analogo a quella (2) tra F_n ed F_t , e si scrive

$$T \in [-N \operatorname{tg} 30^\circ, N \operatorname{tg} 30^\circ]. \quad (6)$$

La (6) coincide con la (2) ove F_n ed F_t si dividano per il numero delle sfere contenute nel piano di possibile scorrimento; quindi per passare alla relazione di equilibrio fra σ e τ basta dividere T ed N per l'area del quadrato di lato $2R$.

Alla relazione (6) si può anche giungere considerando, per $T > 0$, le forze agenti sulla sfera di centro C spostata verso destra ed in contatto con la sfera di centro B. Se $C' = C$ (primo distacco della sfera di centro C dalla sfera di centro A) si ha che, se $T < N \operatorname{tg} 30^\circ$, la risultante di N e T lascia il punto di contatto P alla sua sinistra, e quindi dalla configurazione C' prossima a C la sfera ritorna in C. Se $T = N \operatorname{tg} 30^\circ$, per $C' = C$ la reazione passa per P; uno spostamento comunque piccolo verso destra porta il punto P di contatto alla destra della risultante di N e T, e quindi la sfera si allontana da C.

Quanto sopra può ripetersi per $T < 0$ con riferimento agli spostamenti verso sinistra; quindi le relazioni di crisi sono

$$T = \pm N \operatorname{tg} 30^\circ \quad (7)$$

da cui si riottiene la (5).

La coordinata lagrangiana del modello trisferico è l'angolo φ che $C'B$ forma con CB ($\varphi = C'BC$) se lo spostamento è verso destra, l'angolo ψ che $C'B$ forma con CA ($\psi = C'AC$) se lo spostamento è verso sinistra. Sia φ che ψ sono definite nell'intervallo $[0, 60^\circ]$. La curva di vincolo del punto C è la circonferenza di centro B e raggio $2R$ se lo spostamento è verso destra, la circonferenza di centro A e raggio $2R$ se lo spostamento è verso sinistra; essa è perciò non regolare in C.

Se le sfere non sono lisce, ed ϵ è l'angolo di attrito radente, al primo distacco la sfera è sollecitata dalle due forze tangenziali $\pm T \operatorname{tg} \epsilon$ (fig. 5). La condizione di crisi si persegua im-

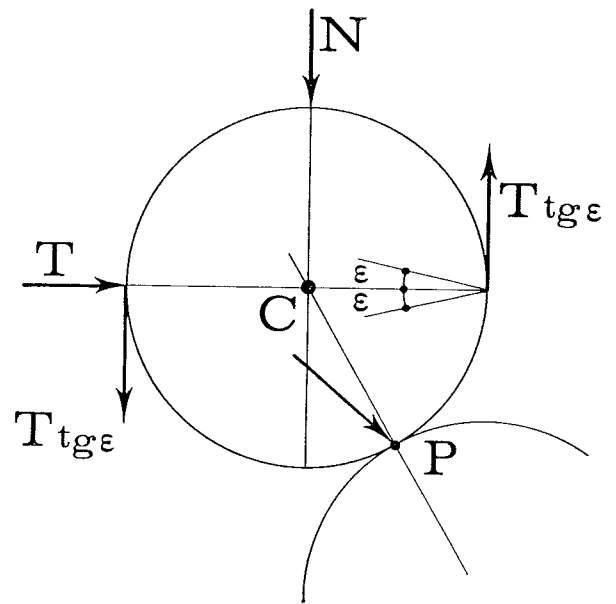


Fig. 5

nendo, per $T > 0$, che la risultante di N, T e della coppia $2TR \operatorname{tg} \epsilon$ passi per P. Si avrebbe così, annullando il momento rispetto a P,

$$-TR \cos 30^\circ + NR \sin 30^\circ + 2TR \operatorname{tg} \epsilon = 0$$

da cui

$$T = N \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ - 2 \operatorname{tg} \epsilon}. \quad (8)$$

Perché la (8) possa accettarsi, è necessario però che la risultante suddetta, e cioè la reazione in P, sia contenuta nel cono di attrito radente. Ciò non si verifica; ed infatti, chia-

mando N' e T' le componenti della risultante secondo il raggio CP e la normale, si ha

$$\begin{aligned} T' &= T \cos 30^\circ - N \sin 30^\circ \\ N' &= T \sin 30^\circ + N \cos 30^\circ \end{aligned}$$

ed ancora, per la (8),

$$\frac{T'}{N'} = \operatorname{tg} \varepsilon \frac{2 \operatorname{sen} 30^\circ}{1 - 2 \operatorname{tg} \varepsilon \cos 30^\circ};$$

la condizione

$$\frac{T'}{N'} \leq \operatorname{tg} \varepsilon$$

si traduce nell'altra

$$\frac{2 \operatorname{sen} 30^\circ}{1 - 2 \operatorname{tg} \varepsilon \cos 30^\circ} \leq 1$$

e cioè

$$1 \leq 1 - 2 \operatorname{tg} \varepsilon \cos 30^\circ,$$

incompatibile.

Si otterrà quindi T imponendo che sia

$$\frac{T'}{N'} = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Si ha perciò

$$\frac{T \cos 30^\circ - N \sin 30^\circ}{T \sin 30^\circ + N \cos 30^\circ} = \operatorname{tg} \varepsilon$$

da cui

$$T = N \frac{\operatorname{sen} 30^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{tg} \varepsilon}{\cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{tg} \varepsilon}. \quad (9)$$

Ponendo $\varepsilon = 15^\circ$, si ha dalle (5), (8) e (9)

$$\begin{aligned} \tau &= \pm 0,5773 \sigma \\ \tau &= \pm 1,5145 \sigma \\ \tau &= \pm 0,7320 \sigma. \end{aligned}$$

La (9) può anche scriversi

$$T = N \operatorname{tg} (30^\circ + \varepsilon).$$

2. La curva intrinseca in presenza di coesione

L'intervento della coesione c può essere simulato, nel modello della fig. 4, dalla presenza di due tiranti elastici congiungenti il centro C con i due centri inferiori A e B (fig. 6); il comportamento di tali tiranti sia idealmente elasto-plastico, con rigidità elastica k e dilatazione

elastica limite ε_1 . In funzione di φ può porsi (fig. 4), per $\varphi \in [0, 60^\circ]$,

$$\begin{aligned} v_c &= -2R \operatorname{sen} (60^\circ + \varphi) + 2R \operatorname{sen} 60^\circ = \\ &= -2R [0,5 \operatorname{sen} \varphi - 0,866 (1 - \cos \varphi)]; \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_c &= 2R \cos 60^\circ - 2R \cos (60^\circ + \varphi) = \\ &= 2R [0,5 (1 - \cos \varphi) + 0,866 \operatorname{sen} \varphi]. \end{aligned}$$

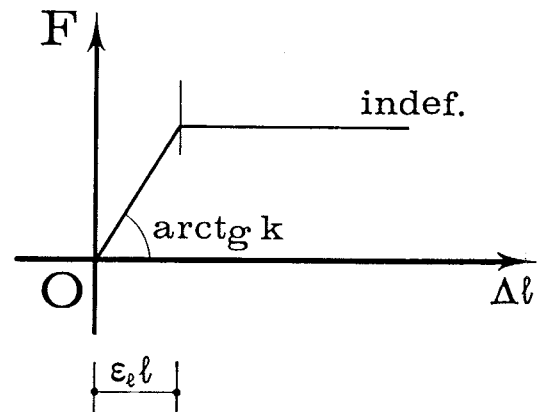
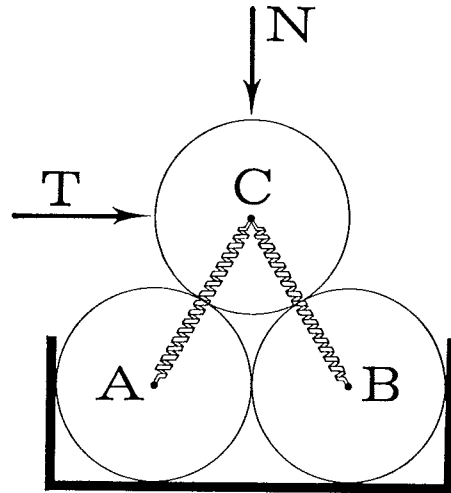


Fig. 6

Così pure è

$$\begin{aligned} \overline{AC'} - \overline{AC} &= R [\{ 8(1 - 0,5 \cos \varphi + \\ &+ 0,866 \operatorname{sen} \varphi) \}^2 - 2] \quad (11)^* \end{aligned}$$

L'energia di deformazione nel tirante AC è

$$L = \frac{k}{2} (\overline{AC'} - \overline{AC})^2$$

(*)

$$\begin{aligned} (\overline{AC'})^2 &= (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 - 2 \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \\ &= 4R^2 + 4R^2 - 8R^2 \cos (60^\circ + \varphi) = \\ &= 8R^2 [1 - \cos (60^\circ + \varphi)] = \\ &= 8R^2 [1 - \cos 60^\circ \cos \varphi + \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} \varphi]. \end{aligned}$$

e l'energia potenziale totale è fornita da (12)

$$E = 2NR [0,5 \operatorname{sen} \varphi - 0,866 (1 - \cos \varphi)] - 2TR [0,5 (1 - \cos \varphi) + 0,866 \operatorname{sen} \varphi] + \frac{kR^2}{2} [8(1 - 0,5 \cos \varphi + 0,866 \operatorname{sen} \varphi) + 4 - 4 \{8(1 - 0,5 \cos \varphi + 0,866 \operatorname{sen} \varphi)\}^{\frac{1}{2}}].$$

La condizione di equilibrio

$$\frac{dE}{d\varphi} = 0$$

si scrive

$$\left. \begin{aligned} & N(0,5 \cos \varphi - 0,866 \operatorname{sen} \varphi) - \\ & - T(0,5 \operatorname{sen} \varphi + 0,866 \cos \varphi) + \\ & + 2kR [0,5 \operatorname{sen} \varphi + 0,866 \cos \varphi - \\ & \frac{0,5 \operatorname{sen} \varphi + 0,866 \cos \varphi}{\sqrt{2(1 - 0,5 \cos \varphi + 0,866 \operatorname{sen} \varphi)^2}}] = 0. \end{aligned} \right\} (13)$$

Dalla (13) si trae

$$T = N \frac{0,5 \cos \varphi - 0,866 \operatorname{sen} \varphi}{0,5 \operatorname{sen} \varphi + 0,866 \cos \varphi} + 2kR \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2(1 - 0,5 \cos \varphi + 0,866 \operatorname{sen} \varphi)^2}} \right] \quad (14)$$

La T della (14) è definita in un intervallo $]0, \varphi_1]$ di φ , dove φ_1 corrisponde alla dilatazione limite ε_1 . Dalla (11) si ha

$$\varepsilon_1 = \frac{R(\sqrt{2(1 - 0,5 \cos \varphi_1 + 0,866 \operatorname{sen} \varphi_1)} - 1)}{R}$$

da cui

$$0,5 \cos \varphi_1 - 0,866 \operatorname{sen} \varphi_1 = 1 - 0,5(\varepsilon_1 + 1)^2. \quad (15)$$

Per $\varepsilon_1 = 0,2$ è $\varphi_1 = 13,5^\circ$; per $\varepsilon_1 = 0,3$ è $\varphi_1 = 21^\circ$.

In tale intervallo possono presentarsi (fig. 7) i seguenti casi:

a) la $T(\varphi)$ presenta un massimo isolato in un punto interno φ_m ; $T(\varphi_m)$ è il valore limite T_o di T , l'equilibrio è stabile per $\varphi \in [0, \varphi_m]$, instabile per $\varphi \in]\varphi_m, \varphi_1]$;

b) la $T(\varphi)$ è strettamente crescente, e presenta un massimo in $\varphi = \varphi_1$; l'equilibrio è sempre stabile, e la $T(\varphi_1)$ è il valore limite T_o di T , raggiunto per plasticizzazione del tirante;

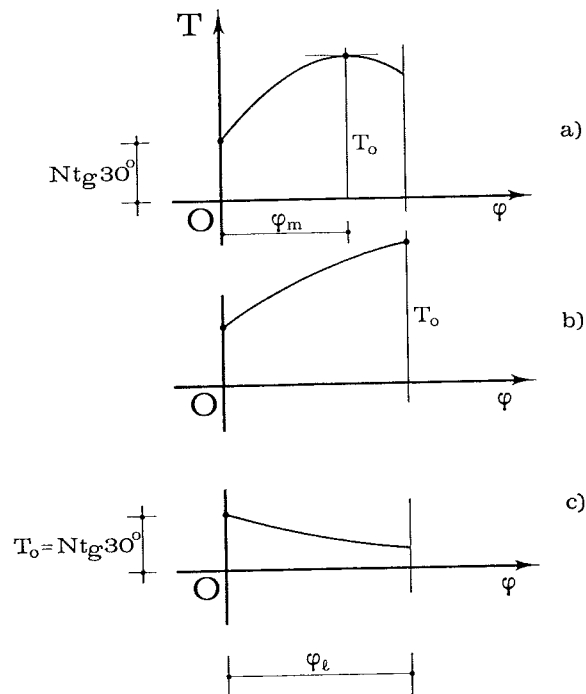


Fig. 7

c) la $T(\varphi)$ è strettamente decrescente, e presenta un massimo in $\varphi = 0$; l'equilibrio è sempre instabile in $]0, \varphi_1]$, e la $T(0)$ è il valore limite T_o di T .

Si osservi che in $\varphi = 0$ i valori di equilibrio di T sono tutti quelli compresi nell'intervallo $[0, T(0)]$; solo $T(0)$ però soddisfa la (13), poiché tale condizione è valida in $]0, \varphi_1]$.

Il caso c) si presenta per N elevato rispetto a $2kR$, il caso b) per N piccolo.

Nella fig. 8 sono riportati i valori limiti di T in funzione di N , nelle due ipotesi $\varepsilon_1 = 0,2$ ed $\varepsilon_1 = 0,3$; si osserva che per $\frac{N}{kR} > 2$ l'effetto

della coesione non si avverte più, e la curva coincide con la retta inclinata di 30° sull'asse delle N .

Dalla (14) si trae che, per $N = 0$ (caso b) è

$$T_o = T_{oo} = 2kR. \quad (16)$$

$$\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2(1 - 0,5 \cos \varphi_1 + 0,866 \operatorname{sen} \varphi_1)}} \right]$$

Poiché è

$$c = \frac{T_{oo}}{4R^2}$$

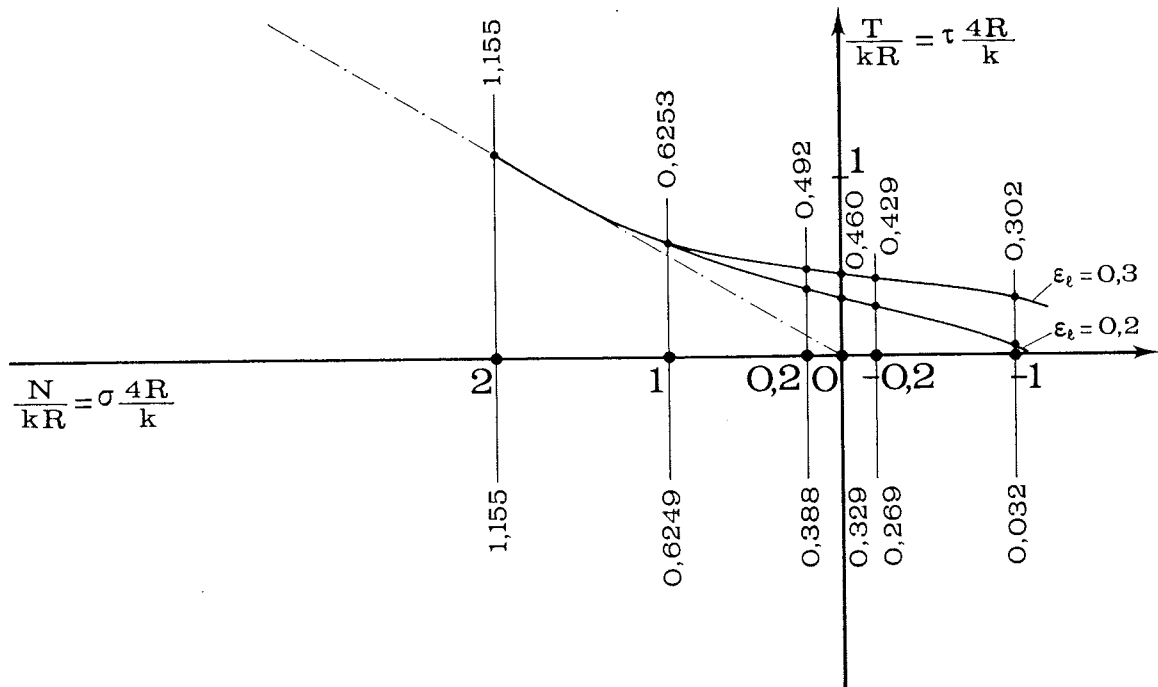


Fig. 8

si ha, per $\epsilon_t = 0,2$ ($\varphi_1 = 13,5^\circ$),

$$T_{00} = 0,329 k R$$

$$c = 0,0822 \frac{k}{R} \quad (17)$$

e per $\epsilon_t = 0,3$ ($\varphi_1 = 21^\circ$)

$$T_{00} = 0,460 k R$$

$$c = 0,115 \frac{k}{R} \quad (18)$$

$$k = 8,69 c R .$$

Quindi dal valore c della coesione e da quello R della granulometria prevalente può, dato ϵ_t , trarsi il valore di k .

Si osservi che, moltiplicando le coordinate del diagramma della fig. 5 per $\frac{k}{4R}$, si ottiene il diagramma $\sigma \tau$.

3. I moti di piccola ampiezza del modello tri-sferico

Per studiare i moti di piccola ampiezza nell'intorno della posizione di riposo ($\varphi = \psi = 0$) si può limitare l'espressione degli spostamenti alle componenti del primo e secondo ordine in φ . Si ha così (10) (11) (fig. 4)

$$\begin{aligned} v_c &= R(-\varphi + 0,866 \varphi^2) \\ w_c &= R(1,732 \varphi + 0,5 \varphi^2) \\ \Delta_{AC} &= R(1,732 \varphi - 0,25 \varphi^2) \quad (1) \end{aligned} \quad (19)$$

da cui

$$\begin{aligned} E &= -NR(-\varphi + 0,866 \varphi^2) - \\ &\quad - TR(1,732 \varphi + 0,5 \varphi^2) + \\ &\quad + 1,5 k \varphi^2 R^2 . \end{aligned} \quad (20)$$

L'energia cinetica è (trascurando il termine rotazionale)

$$\begin{aligned} C &= \frac{m}{2} (\dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2) = 2 R^2 m \varphi^2 = \\ &= \frac{8 \pi}{3} \frac{\gamma}{g} R^5 \varphi^2 = 8,378 \frac{\gamma}{g} R^5 \varphi^2 . \end{aligned} \quad (21)$$

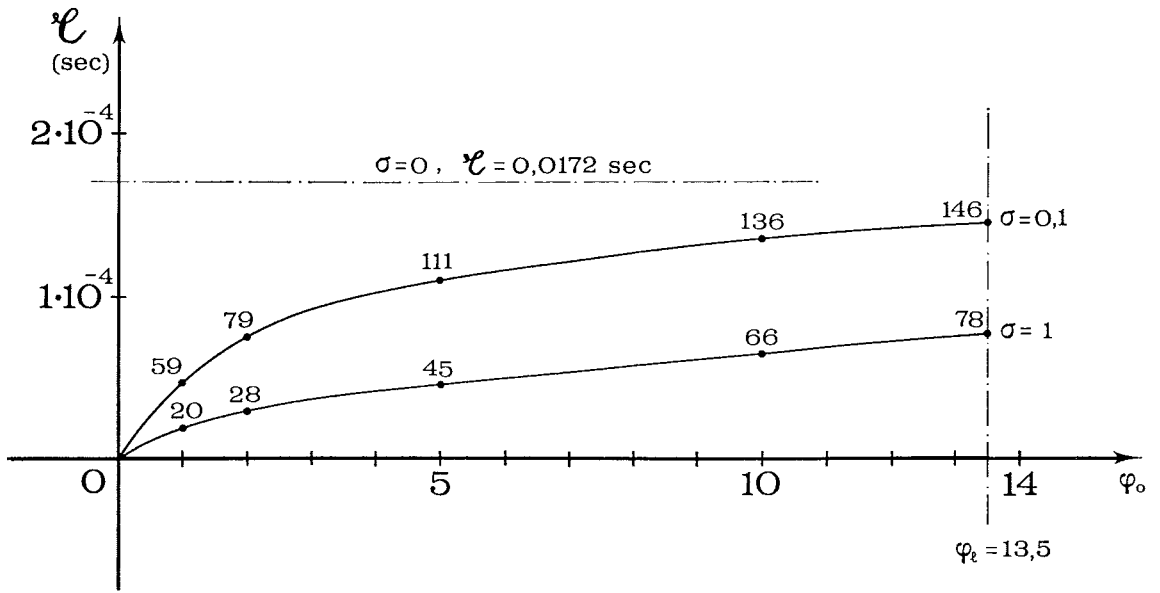
Al solito, posto $U = C - E$, l'equazione del moto risulta in generale

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0$$

e, nel caso in esame, per $T = 0$,

(1) $\Delta_{AC} = R(\sqrt{8(0,5 + 0,25 \varphi^2 + 0,866 \varphi)} - 2)$; sviluppando in serie di Taylor è poi

$$\sqrt{a + b \varphi + c \varphi^2} = \sqrt{a} + \frac{b}{2 \sqrt{a}} \varphi + \frac{4 a c - b^2}{8 a \sqrt{a}} \varphi^2 .$$



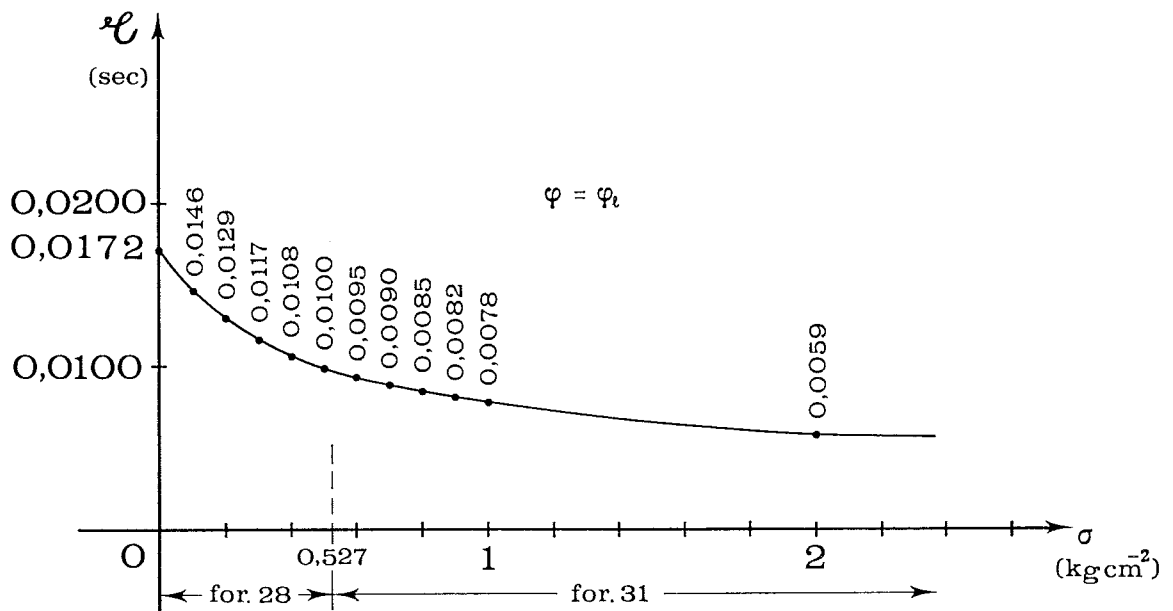
$$\gamma = 0,0016 \text{ kg cm}^{-3}$$

$$R = 1 \text{ cm}$$

$$\epsilon_t = 0,2 \rightarrow \varphi_t = 13,5^\circ, \quad \alpha = 12,17$$

$$c = 0,1 \text{ kg cm}^{-2}$$

Fig. 9



$$\gamma = 0,0016 \text{ kg cm}^{-3}$$

$$R = 1 \text{ cm}$$

$$\epsilon_t = 0,2 \rightarrow \varphi_t = 13,5^\circ, \quad \alpha = 12,17$$

$$c = 0,1 \text{ kg cm}^{-2}$$

Fig. 10

$$16,76 \frac{\gamma}{g} R^4 \varphi + (3 k R - 1,732 N) \varphi + N = 0. \quad (22)$$

La (22) è valida per $\varphi > 0$; analoga vale per $\psi > 0$.

Ci si limita a studiare il caso in cui $T = 0$ (e cioè quello delle direzioni principali) perché nella (22) e nell'analoga in ψ i due termini in T presenterebbero integrali diversi.

Poiché (17) (18) può porsi

$$\begin{aligned} k &= \alpha c R \\ N &= 4 R^2 \sigma \end{aligned} \quad (23)$$

la (22) si scrive

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\gamma R^2} (0,179 \alpha c - 0,413 \sigma) \varphi + 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2} = 0. \quad (24)$$

Se è

$$0,179 \alpha c - 0,413 \sigma > 0$$

si pone

$$\frac{g}{\gamma R^2} (0,179 \alpha c - 0,413 \sigma) = \omega^2 \quad (25)$$

e la (24) si scrive

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi + 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2} = 0. \quad (26)$$

La (26) ha l'integrale generale

$$\varphi = A \sin \omega t + B \cos \omega t - 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2}.$$

Se il moto è caratterizzato da

$$t = 0 \rightarrow \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = 0$$

si ha

$$\varphi_0 = B - 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2}$$

$$0 = A \omega$$

da cui

$$\begin{aligned} \varphi = & \left[\varphi_0 + 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2} \right] \cos \omega t + \\ & - 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Poiché il moto è periodico di periodo r (*), e

per $t = \frac{r}{4}$ è $\varphi = 0$, dalla (27) si trae

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\varphi_0 + 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2} \right] \cos \frac{\omega r}{4} + \\ & - 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\cos \frac{\omega r}{4} = \frac{0,239 \sigma g}{0,239 \sigma g + \varphi_0 \gamma R^2 \omega^2};$$

per la (25) poi si ha

(*) Scrivendo l'integrale generale della (26) come segue

$$\varphi = A \sin \omega t + B \cos \omega t - \beta$$

risulta, ponendo, in $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$ e $\dot{\varphi} = 0$,

$$\begin{aligned} B &= \varphi_0 + \beta \\ A &= 0. \end{aligned}$$

Dalla (27) si trae che il tempo $\frac{r}{4}$ necessario per raggiungere la posizione $\varphi = 0$ è dato da

$$\cos \frac{\omega r}{4} = \frac{\beta}{\varphi_0 + \beta};$$

in tale posizione è

$$\dot{\varphi} \left[\frac{r}{4} \right] = -\omega (\varphi_0 + \alpha) \sin \frac{\omega r}{4} = -\omega \sqrt{\varphi_0 (\varphi_0 + 2\beta)}.$$

Ponendo invece, in $t = 0$, $\varphi = 0$ e $\dot{\varphi} = \omega \sqrt{\varphi_0 (\varphi_0 + 2\beta)}$, risulta

$$\varphi = B - \beta = 0 \rightarrow B = \beta$$

$$\dot{\varphi} = \omega A = \omega \sqrt{\varphi_0 (\varphi_0 + 2\beta)} \rightarrow A = \sqrt{\varphi_0 (\varphi_0 + 2\beta)}$$

e quindi

$$\varphi = \sqrt{\varphi_0 (\varphi_0 + 2\beta)} \sin \omega t + \beta \cos \omega t - \beta.$$

Per $t = \frac{r}{4}$ risulta

$$\begin{aligned} \varphi \left[\frac{r}{4} \right] &= \\ &= \sqrt{\varphi_0 (\varphi_0 + 2\beta)} \frac{\sqrt{\varphi_0 (\varphi_0 + 2\beta)}}{\varphi_0 + \beta} + \frac{\beta}{\varphi_0 + \beta} - \beta = \varphi_0 \\ \dot{\varphi} \left[\frac{r}{4} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Quindi, se la sfera superiore parte dalla posizione $\varphi = \varphi_0$, si sposta verso sinistra, raggiunge la posizione più bassa nel tempo $\frac{r}{4}$, e nel successivo tempo $\frac{r}{4}$ si sposta ancora verso sinistra, raggiungendo la posizione $\psi = \varphi_0$ simmetrica della prima.

$$r = 4 \sqrt{\frac{\gamma R^2}{g(0,179 \alpha c - 0,413 \sigma)}} \operatorname{arccos} \frac{0,239 \sigma}{0,239 \sigma + \varphi_0(0,179 \alpha c - 0,413 \sigma)}. \quad (28)$$

Se è invece

$$0,179 \alpha c - 0,413 \sigma < 0$$

si pone

$$\frac{g}{\gamma R^2} (0,413 \sigma - 0,179 \alpha c) = \omega^2 \quad (29)$$

e la (24) si scrive

$$\ddot{\varphi} - \omega^2 \varphi + 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2} = 0. \quad (30)$$

La (30) ha l'integrale generale

$$\varphi = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} + 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2};$$

se è

$$t = 0 \rightarrow \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = 0$$

si ha

$$\varphi_0 = A + B + 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2}$$

da cui

$$0 = A - B$$

$$\varphi = \left[\varphi_0 - 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2} \right] \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} + 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2}.$$

Dalla condizione

$$0 = \left[\varphi_0 - 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2} \right] \operatorname{Cos} \frac{\omega r}{4} + 0,239 \frac{\sigma g}{\gamma R^2 \omega^2}.$$

si trae

$$r = 4 \sqrt{\frac{\gamma R^2}{g(0,413 \sigma - 0,179 \alpha c)}} \operatorname{arg} \operatorname{Cos} \frac{0,239 \sigma}{0,239 \sigma - \varphi_0(0,413 \sigma - 0,179 \alpha c)}. \quad (31)$$

Il periodo r è funzione dell'ampiezza φ_0 ; il moto è perciò periodico, ma non armonico. Solo se $\sigma = 0$ il periodo è indipendente dall'ampiezza, e pari a (28)

$$r = 2 \pi \sqrt{\frac{\gamma R^2}{0,179 \alpha c g}}. \quad (32)$$

Nella fig. 9 sono diagrammati in funzione di φ_0 i valori di r forniti dalle (28) e (31) per due valori di σ ($\sigma = 0,1 \text{ kg cm}^{-2}$ e $\sigma = 1 \text{ kg cm}^{-2}$) e nell'intervallo $\varphi_0 \in]0, \varphi_1]$. Nella fig. 10 sono diagrammati in funzione di σ i valori di r per $\varphi = \varphi_1$.

4. Il legame di disgregazione

Per simulare il sisma e valutarne gli effetti sulla coesione si studi lo schema della fig. 11, dove il modello trisferico è poggiato su una piattaforma vibrante.

Poiché nel movimento del suolo è impegnato tutto il masso, si deve supporre nelle posizioni diverse da quelle di riposo l'azione degli strati superiori alla quota in esame si risenta con una forza N diretta secondo $C'B$ se $\varphi > 0$, secondo $C'A$ se $\varphi < 0$. L'energia potenziale di N non varia perciò durante il moto.

Come coordinata lagrangiana si scelga l'angolo CBC' se orario ($\varphi > 0$) l'angolo CAC' se antiorario ($\varphi < 0$); il valore di φ ed il suo segno definiscono la posizione della sfera superiore rispetto alle due inferiori.

La piattaforma sia soggetta ad un moto sinusoidale secondo l'asse z :

$$w_p = \eta \sin \omega_p t. \quad (33)$$

Può porsi, per il punto C (19),

$$v = R(-\varphi + 0,866 \varphi^2)$$

$$w = R(1,732 \varphi + 0,5 \varphi^2) + \eta \sin \omega_p t,$$

da cui

$$\dot{v} = -R \dot{\varphi} + 1,732 \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{w} = 1,732 R \dot{\varphi} + \varphi \dot{\varphi} + \eta \omega_p \cos \omega_p t.$$

È quindi (20) (21), trascurando i termini di ordine superiore a due,

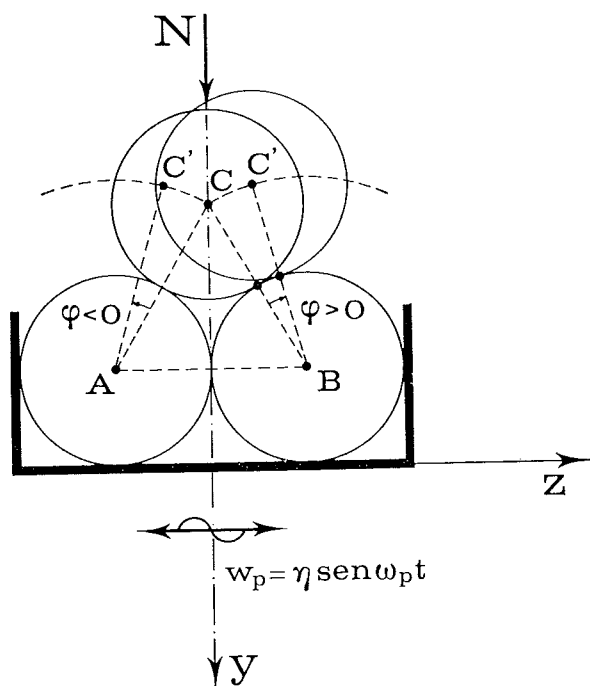


Fig. 11

$$E = 1,5 k \phi^2 R^2$$

$$C = \frac{m}{2} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) =$$

$$= \frac{m}{2} (4 R^2 \dot{\phi}^2 + \eta^2 \omega_p^2 \cos^2 \omega_p t +$$

$$+ 1,732 R \eta \omega_p \dot{\phi} \cos \omega_p t).$$

Se ne trae

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}} = - (8 R^2 \dot{\phi} + 1,732 R \eta \omega_p \cos \omega_p t) \cdot =$$

$$= 4 R^2 m \ddot{\phi} - 0,866 R m \eta \omega_p^2 \sin \omega_p t,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = - \frac{\partial E}{\partial \phi} = - 3 k R^2 \phi,$$

da cui l'equazione del moto

$$4 R^2 m \ddot{\phi} + 3 k R^2 \phi =$$

$$= 0,866 R m \eta \omega_p^2 \sin \omega_p t. \quad (34)$$

La (34) si scrive

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = a \sin \omega_p t \quad (35)$$

dove

$$\omega^2 = 0,75 \frac{k}{m} \quad (36)$$

$$a = 0,2165 \frac{\eta \omega_p^2}{R}. \quad (37)$$

Un integrale particolare della (35) è

$$\bar{\phi} = \frac{a}{\omega^2 - \omega_p^2} \sin \omega_p t$$

e quindi il suo integrale generale è

$$\phi = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{a}{\omega^2 - \omega_p^2} \sin \omega_p t.$$

Dalle condizioni

$$t = 0 \rightarrow \phi = \dot{\phi} = 0$$

si trae

$$B = 0$$

$$A \omega + a \frac{\omega_p}{\omega^2 - \omega_p^2} = 0$$

da cui

$$A = - a \frac{\omega_p}{\omega} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

È quindi

$$\phi = - \frac{a}{\omega^2 - \omega_p^2} \left[\frac{\omega_p}{\omega} \sin \omega t - \sin \omega_p t \right] \quad (38)$$

Il moto è somma di due moti armonici, di pulsazione ω ed ω_p .

Dalla (23)

$$k = \alpha c R$$

e dalla

$$m = \frac{\gamma}{g} \frac{4}{3} \pi R^3$$

si trae

$$\omega^2 = 0,179 \frac{\alpha c g}{\gamma R^2}, \quad (39)$$

formula coincidente con la (32).

Dalla (38) risulta che ϕ può attingere il valore

$$\phi_m = \frac{a}{\omega^2 - \omega_p^2};$$

uguagliando tale valore a φ_1 , si ottiene per ogni ω_p il valore di η che annulla la coesione, e cioè il *legame di disgregazione*. Tale legame è dato quindi da (37) (39)

$$\varphi_1 = 0,2165 \frac{\eta \omega_p^2}{R} \frac{1}{0,179 \frac{\alpha c g}{\gamma R^2} - \omega_p^2}$$

e cioè

$$\varphi_1 = \frac{0,2165 \eta \omega_p^2 \gamma R}{0,179 \alpha c g - \gamma R^2 \omega_p^2}$$

da cui

$$\eta = \varphi_1 \frac{0,179 \alpha c g - \gamma R^2 \omega_p^2}{0,2165 \gamma R \omega_p^2} \quad (40)$$

Per $\varepsilon_1 = 0,2$ è (17)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 13,5^\circ = 0,236 \text{ rad} \\ \alpha &= 12,17. \end{aligned}$$

Nella tabella è riportato il grafico della funzione $\omega_p \rightarrow \eta$ (40) con i seguenti dati

$$\begin{aligned} c &= 0,1 \text{ kg cm}^{-2} \\ \gamma &= 0,0016 \text{ kg cm}^{-3} \\ R &= 1 \text{ cm}, \end{aligned}$$

e per $g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$.

È immediato osservare che l'armonica principale del sisma non può influenzare la coesione, perché ad essa si accompagnano valori di η molto più bassi di quelli necessari a verificare la (40). Il pericolo invece può sussistere per i microsismi, caratterizzati da frequenze molto elevate e da spostamenti dell'ordine del millimetro, che possono soddisfare la (40).

f_p (sec ⁻¹)	ω_p (sec ⁻¹)	η (cm)
1	6,28	3686,88
2	12,57	920,90
3	18,85	408,68
4	25,13	229,40
5	31,41	146,42
10	62,83	35,78
20	125,66	8,12
30	188,49	3,00
40	251,33	1,22
50	314,15	0,38
	365,46	0
	366	-0,003

5. Conclusioni

Il modello proposto fornisce curve intrinseche molto prossime a quelle reali (*); in particolare tali curve presentano tutte come asintoto la retta di Coulomb passante per l'origine ed inclinata di 30°, conformemente a recenti risultati [LEONARDS, 1962, p. 207].

Sono stato perciò indotto a studiare attraverso tale modello il comportamento di un suolo coerente sotto sismi o microsismi, spinto a ciò anche dall'interesse puramente meccanico del modello stesso, la cui curva di vincolo si presenta non regolare in un punto. Si è confermato così, almeno da un punto di vista qualitativo, il pericolo che i microsismi possano vanificare il legame coesivo, e si è cercato di quantizzare, per i terreni monogranulari, la fascia di pericolo nel piano ampiezza-frequenza. Tale pericolo può avere particolare peso in tutti quei casi in cui vibrazioni di lunga durata e di carattere uniforme (traffico, macchine alternative, etc.) interessino le fondazioni. Si stanno organizzando presso l'Istituto di Scienza delle Costruzioni, utilizzando contributi del C.N.R., prove sperimentali atte a confermare o meno la (40); si utilizzerà un tavolo vibrante di modeste dimensioni, con impulsi pluridirezionali a

(*) Si noti a tale proposito che non si è voluto chiamare in gioco la σ'_0 a trazione, notoriamente di non facile determinazione sperimentale, mentre la ε_1 è ottenibile (15) dal valore φ_1 , ricavabile da prove del tipo di quella schematizzata nella fig. 1.

Può essere comunque interessante osservare che, caricando il modello (fig. 6) con una N diretta verso l'alto, si ha

$$\sigma'_0 = \frac{k \varepsilon_1}{R} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

che, insieme all'altra relazione (16) (15)

$$\frac{k \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 1} = 2 R c$$

fornisce

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma'_0 - c \sqrt{3}}{c \sqrt{3}} \quad (41)$$

$$k = \frac{2 R \sigma'_0 c}{\sigma'_0 - c \sqrt{3}} \quad (42)$$

Così pure dalla condizione $\frac{N}{k R} = 2$ (fig. 8) si trae il valore di σ per cui la curva intrinseca si confonde con la retta di Coulomb a 30° per l'origine

$$\sigma = \frac{\sigma'_0 c}{\sigma'_0 - c \sqrt{3}} \quad (43)$$

frequenza ed ampiezza variabili con continuità.

Se la conferma sperimentale ci sarà, sarebbe mia intenzione studiare su un modello simile a quello proposto il legame di disgregazione delle malte, attesa l'attualità di tale problema in relazione alle lesioni dei vecchi fabbricati in muratura dovute all'incremento di traffico nei centri storici, e soprattutto alla costruzione delle metropolitane.

BIBLIOGRAFIA

- MINDLIN R. D., DERESIEVICZ H. (1953) - *Elastic spheres in contact under varying oblique forces*. J. Appl. Mech. 20.
- DERESIEVICZ H. (1957) - *Stress-strain relations for a simple model of a granular medium*. J. Appl. Mech., n. 57-A-90.
- LUBKIN J. L. (1951) - *The torsion of elastic spheres in contact*. J. Appl. Mech. 18.
- THURSTON C. W., DERESIEVICZ H. (1959) - *Analysis of a compression test of a face-centered cubic array of elastic spheres*. J. Appl. Mech. 26.
- DANTU (1961) - *Mechanical study of a Closely Packed Assembly of Spheres with Identical Elastic Properties*. Proc. 5 ICOSMFE, Paris, n. 1.
- LEONARDS G. A. (Ed) (1962) - *Foundation Engineering*. Mc Graw Hill. Book Company New York.
- SCOTT R. F. (1963) - *Principles of Soil Mechanics*. Chapt. 7, Addison-Wesley.
- FIELD G. W. (1963) - *Towards the statistical definition of a granular mass*. Proc. 4 Austr. N.Z. Conf. SMFE.
- KEZDI A. (1964) - *Contribution to the investigations of granular systems*. IUTAM Symp. Rheology and Soil Mech., Grenoble.
- PARKIN A. K. (1965) - *The application of discrete unit models to studies of the shear strength of Granular materials*. Ph. D. Thesis, Univ. of Melbourne.
- HESS M. S., STOLL R. D. (1966) - *Interparticle Sliding in granular materials*. Columbia University, Burm. Lab. Soil Mech. Res. Rep. n. 1.
- WAI - FAH CHEN (1975) - *Limit Analysis and Soil Plasticity* (pag. 27). Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

SUMMARY

A simple model of dynamic behavior of a monogranular soil with cohesion

A cohesive soil constituted by elements whose dimensions aren't very variable is considered; idealizing this soil in a set of spherical elements, joined by elasto-plastic braces, a very acceptable Mohr's curve is drawn. The model permits to obtain the disgregation's bond between the frequency and the amplitude of a sinusoidal given motion, i. e. the conditions under which the cohesion disappears.

The soil is idealized as a set of spherical elements having the same radius R and the same unit weight, touching one another in horizontal strata. The center C of the general sphere (fig. 1), and the centers A and B of the spheres on which it rests, lie in a vertical plane. Considering the set of spheres contained between two parallel vertical planes, whose distance is 2 R, the cartesian orthogonal axes x y z are fixed so that x is vertical and downward directed, and the centers of the spheres are contained in the plane y z.

The static range can be examined fixing the spheres A and B, and charging the sphere C by a radial vertical load N and by a radial horizontal load T parallel to z axis. The system is plane, and the C point is obliged on two circular lines, whose radius is R, and centers are B if $\varphi > 0$, A if $\psi > 0$; we have a one freedom's degree system, but the line on which C is obliged isn't regular in $\varphi = \psi = 0$.

Let N be fixed, and T increasing from zero in R+; if the surfaces are smooth, the sphere C doesn't move until:

$$- T R \cos 30^\circ + N R \sin 30^\circ \geq 0$$

that is until $T \leq N \operatorname{tg} 30^\circ$. If $T = N \operatorname{tg} 30^\circ$, the position $\varphi = 0$ is a position of equilibrium, but this is unstable; if a little displacement $d\varphi$ is induced, the sphere C steps over the sphere B and all the spheres of the same stratum.

According that we can write $\sigma = \frac{N}{4 R^2}$, $\tau = \frac{T}{4 R^2}$ the (1) leads to the well known Coulomb's bilatera (ng. 3); the diagram τ γ , for a fixed value of σ , shows a classic rigid-plastic behaviour (fig. 2).

The cohesion can be simulated by two elastic braces joining the points A C and B C; the behaviour of the braces is linearly elastic if $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ ($F = k \Delta l$), and fully plastic if $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \rightarrow]$. For $\varphi \in [0, 60^\circ]$ we can write referring to the point C,

$$v = - 2 R [0.5 \sin \varphi - 0.866 (1 - \cos \varphi)] \quad (10)$$

$$w = 2 R [0.5 (1 - \cos \varphi) + 0.866 \sin \varphi]$$

$$\Delta l = AC' - AC = R \{ [8 (1 - 0.5 \cos \varphi + 0.866 \sin \varphi)] - 2 \} \quad (11)$$

the potential total energy is

$$E = \frac{k}{2} (\Delta l)^2 - N \cdot v - T \cdot w; \quad (12)$$

the equilibrium equation $\frac{dE}{d\varphi} = 0$ gives

$$T = N \frac{0.5 \cos \varphi - 0.866 \sin \varphi}{0.5 \sin \varphi + 0.866 \cos \varphi} + 2 k R \left(1 - \frac{1}{[2 (1 - 0.5 \cos \varphi + 0.866 \sin \varphi)]^{1/2}} \right) \quad (14)$$

The mapping $\varphi \rightarrow T$ is defined in] 0, φ_1 [, when φ_1 is the value of φ that we can calculate from (2) for $\varepsilon = \varepsilon_1$:

$$0.5 \cos \varphi_1 - 0.866 \sin \varphi_1 = 1 - 0.5 (\varepsilon_p + 1)^2 \quad (15)$$

For example, we have $\varepsilon_1 = 0.2 \rightarrow \varphi_1 = 13^\circ.5$.

When $\frac{dT}{d\varphi} < 0$, the equilibrium is unstable; so the limit value T_0 is T (o) if the mapping is strictly decreasing, T (φ_m) if the mapping is strictly increasing, T (φ_m) if $\frac{dT}{d\varphi} = 0$. In the fig. 8 two diagrams N T_0 are given, for two values of ε_1 ; we can observe that these diagrams have the well known pattern of the Mohr's envelopes for cohesive soils, while proceeding along the σ axis the diagrams tend asymptotically to the Mohr's curve in absence of cohesion, and that looks natural enough.

The (3) gives, for $N = 0$,

$$T_0 = 4 R^2 c = 2 k R \left(1 - \frac{1}{[2 (1 - 0.5 \cos \varphi_1 + 0.866 \sin \varphi_1)]^{1/2}} \right) \quad (16)$$

that is the bond between C and k; for $\varepsilon_1 = 0,2$, we have $k = 12,17 c R$. Generally, we can write

$$k = \alpha c R \quad (23)$$

In order to simulate the earthquake and to evaluate its effects on the cohesion, let us study the sketch of fig. 11, where the three spherical model lies on a floating table. As all the mass is involved by the earthquake, we must suppose that if $\varphi \neq 0$ the load transmitted to sphere C by the upper strata acts along the straight line AC' ($\varphi < 0$) or BC' ($\varphi > 0$). Therefore, the potential energy of N doesn't vary during the motion.

Let the motion of the table be given by

$$w_p = \eta \text{sen } \omega_p t ; \quad (33)$$

the motion of the point C is given by

$$\begin{aligned} v &= R (-\dot{\varphi} + 0,866 \varphi^2) \\ w &= R (1,732 \varphi + 0,5 \dot{\varphi}^2) + \eta \text{sen } \omega_p t \end{aligned}$$

from which

$$\begin{aligned} v &= -R \dot{\varphi} + 1,732 R \dot{\varphi}^2 \\ w &= 1,732 R \varphi + \varphi \dot{\varphi} + \eta \omega_p \text{cos } \omega_p t . \end{aligned}$$

Neglecting the terms of higher order, we can write

$$\begin{aligned} L = C - E &= \frac{m}{2} (4 R^2 \dot{\varphi}^2 + \eta^2 \omega_p^2 \text{cos } \omega_p t + \\ &+ 1,732 R \eta \omega_p \dot{\varphi} \text{cos } \omega_p t) - 1,5 k \varphi^2 R^2 . \end{aligned}$$

The Hamilton's equation gives

$$4 R^2 m \ddot{\varphi} + 3 k R^2 \varphi = 0,866 R m \eta \omega_p^2 \text{sen } \omega_p t , \quad (34)$$

that is

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = a \text{sen } \omega_p t \quad (35)$$

where

$$\omega^2 = 0,75 \frac{k}{m} \quad (36)$$

$$a = 0,2165 \frac{\eta \omega_p^2}{R} \quad (37)$$

The general integral of (8) is

$$\varphi = A \text{sen } \omega t + B \text{cos } \omega t + \frac{a}{\omega^2 - \omega_p^2} \text{sen } \omega_p t ;$$

the initial conditions $t = 0 \rightarrow \varphi = \dot{\varphi} = 0$ allow to write

$$\varphi = -\frac{a}{\omega^2 - \omega_p^2} \left[\frac{\omega_p}{\omega} \text{sen } \omega t - \text{sen } \omega_p t \right]$$

From the (23), and

$$m = \frac{\gamma}{g} \frac{4}{3} \pi R^3$$

where γ is the unit weight, one derives

$$\omega^2 = 0,179 \frac{\alpha c g}{\gamma R^2} . \quad (39)$$

As φ can reach the value $\frac{a}{\omega^2 - \omega_p^2}$, imposing

$$\frac{a}{\omega^2 - \omega_p^2} = \varphi_1$$

one obtains the disgregation's bond between η and ω_p ; this bond, from (10) and (12), is

$$\varphi_1 = 0,2165 \frac{\eta \omega_p^2}{R} \frac{1}{0,179 \frac{\alpha c g}{\gamma R^2} - \omega_p^2}$$

from which

$$\eta = \varphi_1 \frac{0,179 \alpha c g - \gamma R^2 \omega_p^2}{0,2165 \gamma R \omega_p^2} . \quad (40)$$

For $\varepsilon_1 = 0,2$, we have $\varphi_1 = 0,236$ rad, $\alpha = 12,17$; in the table the graph of the mapping $\omega_p \rightarrow \eta$, for the following values of the soil's physical parameters

$$\begin{aligned} c &= 0,0016 \text{ kg cm}^{-3} \\ \gamma &= 0,1 \text{ kg cm}^{-2} \\ R &= 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

and for $g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$, is related.

f_p (sec ⁻¹)	ω_p (sec ⁻¹)	η (cm)
1	6,28	3685,88
2	12,57	920,90
5	31,41	145,42
10	62,83	37,78
50	314,15	0,38
	365,46	0

We observe immediately that the principal wave of the earthquake cannot influence the cohesion, because its amplitude is too small to satisfy the (14). On the contrary, the danger rises from the micro earthquake.