

Coefficienti di sicurezza e probabilità di rottura delle paratie ancorate

G. CORTELLAZZO*, A. MAZZUCATO*

SOMMARIO. Per assegnare alle paratie ancorate un determinato livello di sicurezza sono stati proposti vari metodi per ciascuno dei quali risulta in genere diverso il rapporto tra l'entità del grado di sicurezza e la profondità di infissione. Poiché evidentemente non è univoco il concetto di sicurezza insito nei vari criteri, nell'intento di definire l'effettiva probabilità di rottura che l'uso di ciascuno dei suddetti sistemi conferisce ad una di tali opere, progettata con i metodi di calcolo in uso, è stato effettuato un confronto sistematico fra i valori ottenuti mediante l'applicazione dei vari metodi tradizionali di tipo deterministico e quelli risultanti da un'analisi di tipo probabilistico. La ricerca pone in luce, nel caso di terreni non coesivi, anche l'incidenza nelle singole analisi delle condizioni idrauliche e dell'entità dello scarto quadratico medio della variabile angolo di resistenza al taglio.

1. Introduzione

La progettazione delle paratie vincolate mediante il metodo classico, noto come Free Earth Support, implica la necessità di definire il tipo ed il valore numerico del coefficiente di sicurezza da adottare.

In generale le normative non impongono l'uso di un particolare metodo per la determinazione del coefficiente di sicurezza né stabiliscono uno specifico valore numerico da assegnarli e pertanto, per la valutazione di tale coefficiente, si fa riferimento alla pratica corrente ed alle indicazioni fornite in letteratura. Per la definizione del coefficiente di sicurezza per strutture dotate di un solo vincolo in sommità, BURLAND *et al.* [1981] individuano quattro diversi sistemi comunemente adottati. Gli stessi autori, poi, in considerazione dei risultati poco soddisfacenti ottenuti con alcuni dei suddetti procedimenti, ne propongono un quinto fondato sull'analogia con la capacità portante delle fondazioni. Tutti questi metodi si basano su modelli teorici di tipo deterministico.

Attualmente si rileva la tendenza ad affinare la progettazione del tipo di opere in esame associando ad essa criteri per definirne l'affidabilità e di conseguenza i valori nominali della probabilità di rottura. In tale direzione si stanno orientando i vari comitati nazionali nella stesura della nuova normativa europea EC-7.

Nella presente memoria, con tali intenti sono stati analizzati alcuni semplici casi pratici nei quali, al variare dell'angolo di resistenza al taglio, della profondità di infissione e delle condizioni di filtrazione, le entità dei coefficienti di sicurezza, valutati con le procedure usuali, vengono poste in relazione con la probabilità di rottura.

2. Coefficienti di sicurezza convenzionali

Come è noto, i vari metodi di calcolo usati nella progettazione di paratie ancorate si basano su una semplice equazione di equilibrio tra i momenti delle spinte attiva e passiva (o quota parte di quest'ultima) rispetto al punto di applicazione del vincolo.

Tra i vari metodi proposti per definire un adeguato coefficiente di sicurezza agli effetti della stabilità, i cinque di seguito descritti sono quelli maggiormente utilizzati:

- a) il metodo proposto da NAVFAC [1971] e CP2 [1951], in cui il coefficiente di sicurezza (F_p) può essere inteso come un moltiplicatore dei carichi, dato che si identifica con il valore numerico del rapporto fra i momenti della risultante delle forze stabilizzanti e di quelle instabilizzanti rispetto al punto d'ancoraggio (Fig. 1a);
- b) il metodo dovuto alla British Steel Corporation [1979], nel quale il coefficiente (F_{np}) si determina come rapporto fra i momenti dei valori netti della spinta attiva e passiva (Fig. 1b);
- c) la definizione dovuta a TSCHEBOTARIOFF [1973], nella quale il coefficiente di sicurezza (F_d) deriva dall'incremento pari al 20-40% della profondità di infissione minima necessaria per l'equilibrio dei momenti delle spinte attive e passive rispetto al punto d'ancoraggio (Fig. 1c);
- d) il metodo secondo il quale il coefficiente di sicurezza [PADFIELD e MAIR, 1984] (γ_ϕ) è applicato ai parametri di resistenza al taglio ($\text{tg } \phi^* = \text{tg } \phi / \gamma_\phi$) (Fig. 1d);
- e) il coefficiente di sicurezza (F_r) proposto da BURLAND *et al.* [1981], che si definisce come il rapporto fra i momenti, rispetto al punto d'ancoraggio, generati dalla spinta del terreno sostenuto e dalla spinta passiva entrambe al netto della quota parte di spinta attiva relativa al tratto infisso (Fig. 1e).

* Istituto di Costruzioni Marittime e di Geotecnica, Università di Padova.

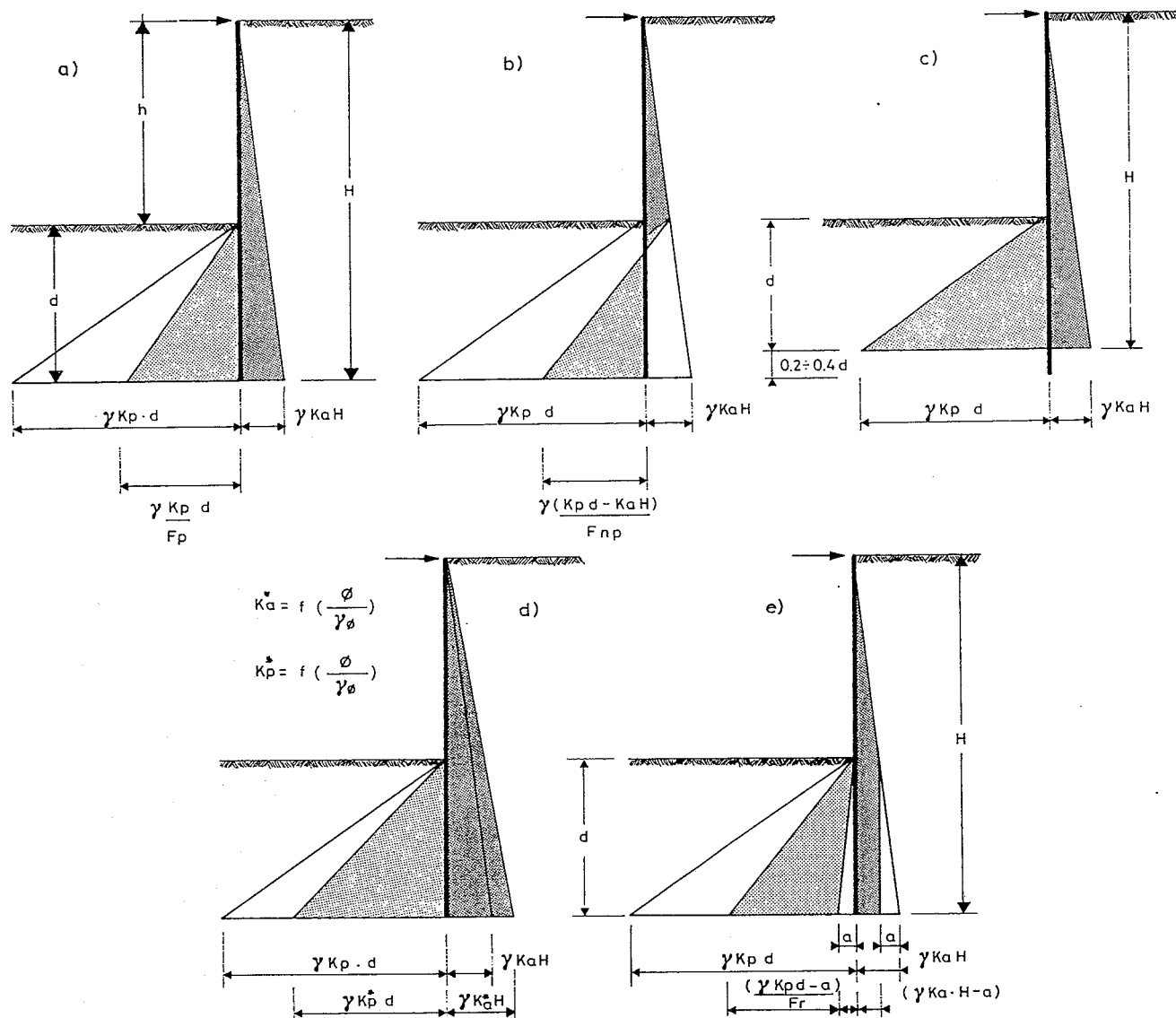


Fig. 1a-e - Metodi per definire il coefficiente di sicurezza.

BURLAND *et al.* [1981] hanno confrontato i risultati dell'applicazione di tali metodi per una paratia ancorata ed hanno rilevato che il secondo richiede una infissione minore degli altri a parità di valore di coefficiente di sicurezza. Inoltre hanno constatato che, per angoli di resistenza al taglio inferiori a 25° , il primo metodo può condurre a profondità di infissione eccessivamente cautelative dato che, per altezze di terreno sostenuto tendenti a zero, la procedura determina un valore finito del coefficiente di sicurezza che si riduce al diminuire dell'angolo di resistenza al taglio (Figura 2a). In figura 2b è riportata l'entità di γ_ϕ cui corrisponde un prefissato valore dei rimanenti quattro coefficienti di sicurezza, al variare dell'angolo di resistenza al taglio.

3. Analisi probabilistica

I metodi tradizionali, con cui si impongono generalmente coefficienti di sicurezza globali, non permettono di scindere le incertezze derivanti dalla scelta dei parametri da quelle legate al modello di calcolo utilizzato. Inoltre non risulta sempre agevole individuare quale sia la scelta più opportuna dei parametri.

La teoria dell'affidabilità e la definizione di condizioni limite di collasso o di esercizio consentono invece di trattare in modo più rigoroso tutti i problemi collegati alla sicurezza di un'opera (Per un eventuale approfondimento della trattazione della teoria relativa alla definizione dei vari livelli di affidabilità si rinvia all'Appendice).

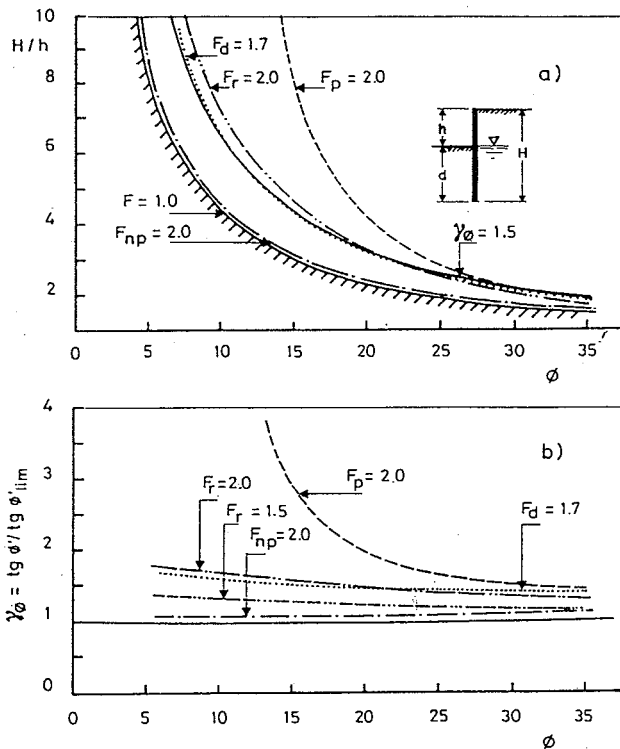


Fig. 2a-b - Relazione fra ϕ e (a) H/h e (b) il fattore di sicurezza sulla resistenza a taglio per i vari metodi [BURLAND et al., 1981].

Fra i metodi tradizionali precedentemente citati, solo il metodo d) può essere assimilato ad uno dei livelli della teoria dell'affidabilità e cioè al livello I o alla progettazione agli stati limite mediante coefficienti di sicurezza parziali, purché si tenga conto, mediante adeguato coefficiente, delle incertezze legate al modello di calcolo e si utilizzino i valori caratteristici dei parametri geotecnici.

La teoria dell'affidabilità di livello II dà la possibilità, in base alla conoscenza dei valori medi e de-

gli scarti quadratici medi delle variabili considerate aleatorie, di determinare il valore di β , indice dell'affidabilità del sistema, noto il quale si può risalire alla probabilità di rottura dell'opera.

Infatti, mentre i coefficienti di sicurezza tradizionali altro non sono che dei rapporti di tipo deterministico fra le azioni resistenti (R) e le sollecitazioni (S) e quindi a loro volta deterministici, nella teoria dell'affidabilità si suppone che i valori dei parametri possano variare attorno al loro valore medio di modo che anche S e R non risultino più fissi ma variabili in un certo intervallo.

Mediante l'utilizzo della teoria dell'affidabilità di livello II si può quindi individuare la probabilità di rottura della struttura, P_f , che è definita come la probabilità che S possa essere uguale o maggiore di R, cioè:

$$P_f = P[R \leq S] = P[(R - S) \leq 0] \quad (1)$$

Se si pone $Z = R - S$ allora si ha anche $P_f = P[Z \leq 0]$ dove Z è una variabile aleatoria il cui campo di valori corrisponde a quello di S e di R.

Della variabile Z si possono determinare sia il valore medio μ_z che lo scarto quadratico medio σ_z , noti i quali si ricava l'indice di affidabilità β dalla:

$$\beta = \mu_z / \sigma_z \quad (2)$$

che misura l'intervallo fra i valori medi della resistenza (R) e della sollecitazione (S), quando si assuma come unità di misura la deviazione standard delle due funzioni (Fig. 3a), ovvero nel piano cartesiano del'e variabili normalizzate

$$n_1 = (R - \mu_R) / \sigma_R \quad n_2 = (S - \mu_S) / \sigma_S$$

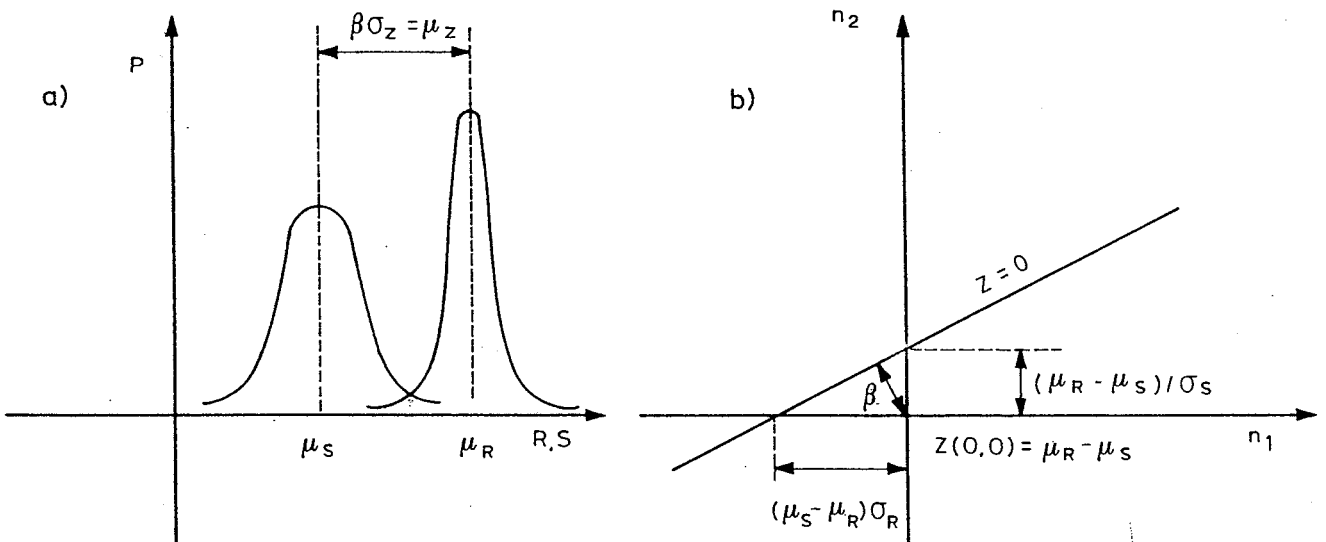


Fig. 3a-b - Relazione fra β ed (a) i valori medi della resistenza (R) e della sollecitazione (S) e (b) lo stato limite considerato.

la minima distanza dall'origine dei punti della retta che descrive lo stato limite considerato ($Z=0$) (Fig. 3b).

Pertanto il prodotto $\beta \cdot \sigma_z$ rappresenta la distanza del valore medio della funzione Z dalle condizioni critiche in cui $Z=0$ [SMITH, 1985]. Si può così stimare la probabilità che l'opera esaminata possa subire un collasso rispetto alla condizione limite analizzata. Supponendo infatti che S ed R abbiano una distribuzione di tipo gaussiano, anche Z presenta lo stesso tipo di distribuzione e perciò la probabilità di rottura può essere valutata come $P_f = \Phi(-\beta)$ in cui Φ rappresenta la distribuzione di probabilità cumulativa della variabile standardizzata.

Nel caso in esame Z rappresenta la differenza tra i momenti delle spinte dell'acqua e del terreno (at-

tiva e passiva) in termini di tensioni efficaci rispetto al punto di ancoraggio.

4. Casi esaminati

La struttura oggetto dello studio è una paratia ancorata in sommità, posta in un terreno omogeneo non coesivo (Fig. 4a-d).

Le analisi sono state condotte in termini parametrici per cui si sono scelti quattro valori dell'angolo di resistenza al taglio ($\phi' = 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$) mentre per le condizioni idrauliche si sono ipotizzati quattro casi:

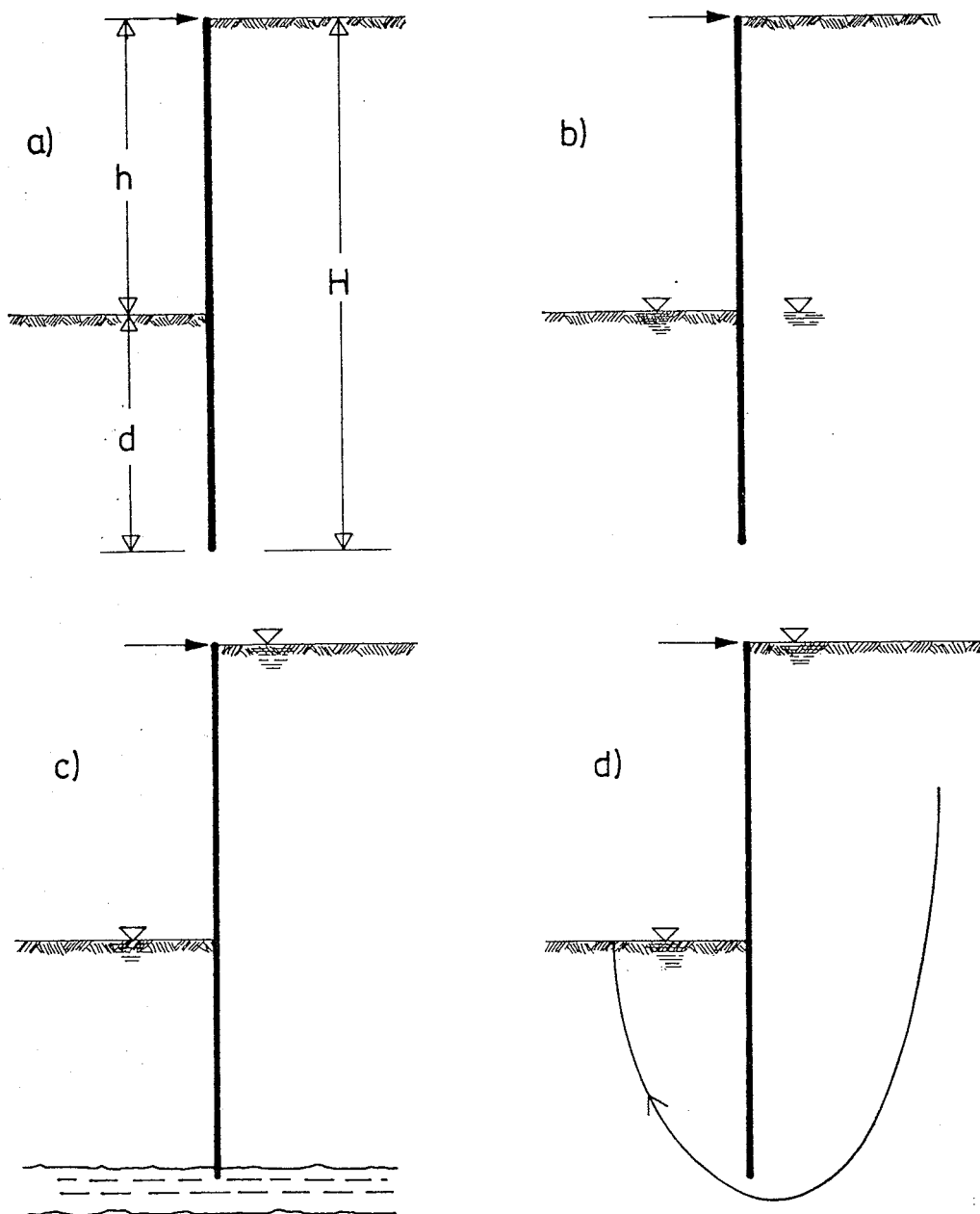


Fig. 4a-d - Condizioni di regime idraulico.

- falda assente (Fig. 4a);
- falda presente da entrambi i lati a quota fondo scavo (Fig. 4b);
- falda alla quota terrapieno a tergo ed a fondo scavo davanti, in assenza di moti di filtrazione, per la presenza di uno strato impermeabile al piede della paratia (Fig. 4c);
- falda agli stessi livelli della situazione c) ma con moto di filtrazione lungo la paratia, con le conseguenti variazioni dei valori delle spinte (Fig. 4d).

La spinta attiva del terreno è stata valutata mediante la teoria di Rankine, mentre per quella passiva si è fatto ricorso ai valori proposti da NAVFAC [1971] considerando un attrito terreno struttura (δ) pari a $\phi/2$.

La casistica rispecchia quindi un notevole numero di situazioni reali e di interesse applicativo.

In considerazione dei risultati ottenuti dai precedenti studi di altri autori, si è scelto di confrontare i coefficienti di sicurezza, così come definiti da NAVFAC [1971] e CP2 [1951] (F_p), da BURLAND *et al.* [1981] (F_r) e dal metodo in cui il coefficiente di sicurezza è fissato sui parametri di resistenza al taglio (γ_ϕ), con l'analisi di affidabilità di livello II nelle seguenti due situazioni, entrambe ritenute plausibili in letteratura [HARR, 1987]:

$$CV_\gamma = 5\% \text{ e } CV_\phi = 10\%$$

$CV_\gamma = 5\%$ e $\sigma_\phi = 1^\circ$ e quindi CV_ϕ variabile in relazione a ϕ

in cui $CV_x = \sigma_x/\mu_x$, denominato coefficiente di variazione, è l'indicatore adimensionale della variabilità di una generica variabile x .

I valori medi, in tutte le analisi, sono stati ipotizzati pari a:

$$\mu_\gamma = 19.8 \text{ kN/m}^3 \quad \mu_\phi = 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ.$$

Per la determinazione dell'indice di affidabilità β si è adottato un algoritmo di calcolo, simile a quello proposto da RAMACHANDRAN [1988], nel quale il valore del coefficiente di spinta passiva (K_p) corrispondente a $\delta = \phi/2$ è ottenuto moltiplicando il K_p relativo a $\delta = \phi$ per un coefficiente di riduzione (C_f):

$$K_p(\delta = \phi/2) = K_p(\delta = \phi) \cdot C_f(\delta = \phi/2) \quad (3)$$

I valori dei coefficienti $K_p(\delta = \phi)$ e $C_f(\delta = \phi/2)$, variabili in funzione dell'angolo di resistenza al taglio ϕ , sono stati determinati interpolando, mediante opportuni polinomi del tipo $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots$, i valori tabulati in NAVFAC [1971]. Una procedura semplificata del metodo di calcolo è riportata in Appendice.

5. Analisi dei risultati

Per poter effettuare il confronto dei risultati dello studio è necessario individuare i campi di valori dei coefficienti di sicurezza tradizionali e della probabilità di rottura normalmente considerati ammissibili.

Per quanto attiene ai coefficienti di sicurezza generalmente sono adottati i seguenti valori:

- Metodo NAVFAC [1971], CP2 [1951] $F_p = 1.5-2.0$
- Metodo di BURLAND *et al.* [1981] $F_r = 2.0$
- Metodo in cui il coefficiente viene posto sui parametri di resistenza al taglio $\gamma_\phi = 1.25-1.50$.

Con riferimento a quest'ultimo metodo, atteso che ad un determinato valore del coefficiente γ_ϕ corrisponde un'unica altezza di infissione, facendo variare anche quest'ultima, come illustrato nelle successive figure, si introduce un ulteriore fattore F_s , pari al rapporto tra i momenti stabilizzanti ed instabilizzanti, rispetto al punto di ancoraggio, che può essere assunto quale coefficiente di sicurezza integrativo afferente all'incertezza insita nel modello di calcolo adottato [OLIPHANT *et al.*, 1988].

In ordine alle probabilità di rottura, gli studi condotti da MEYERHOF [1970; 1984; 1993] hanno consentito di individuarne l'entità per varie tipologie strutturali. In particolare MEYERHOF [1970; 1993] ha riscontrato che le strutture di sostegno, progettate secondo i criteri usuali, presentano una probabilità di rottura dell'ordine di 10^{-3} (Fig. 5).

Prima di passare all'analisi dei risultati è necessario anche evidenziare le semplificazioni che sono state introdotte nell'analisi statistica, affinché la trat-

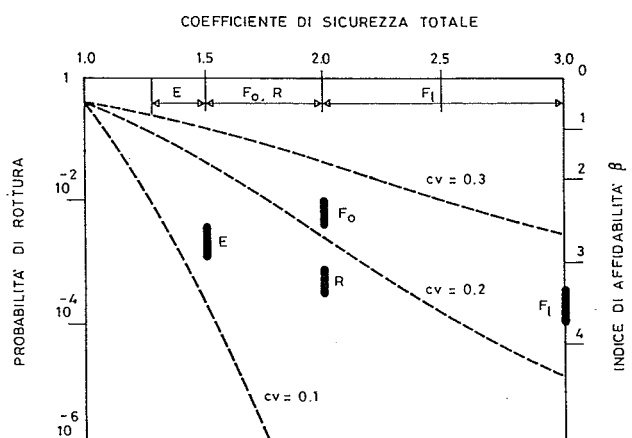


Fig. 5 - Probabilità di rottura e coefficienti di sicurezza totali per vari tipi di opere in funzione dei coefficienti globali di variazione (CV) dei carichi e della resistenza del terreno (E = opere in terra; F₁ = opere di fondazione; F_o = fondazioni offshore; R = opere di sostegno) [MEYERHOF, 1993].

tazione risultasse generalmente valida. Innanzitutto nelle varie analisi non si è tenuto conto delle incertezze legate al modello di calcolo. In secondo luogo non è stata presa in esame la probabile diminuzione, in dipendenza dei considerevoli volumi di terreno coinvolti, della varianza delle proprietà medie del terreno rispetto alla loro varianza puntuale. Si può osservare, inoltre, che l'adozione della funzione di distribuzione di tipo Gaussiano per le variabili aleatorie in esame, anche se comunemente accettata, può comportare, per valori di P_f inferiori a $10^{-4} - 10^{-5}$, valutazioni di probabilità di rottura non corrette qualora la reale distribuzione della funzione di distribuzione sia diversa da quella assunta.

Tenendo presente le semplificazioni introdotte ed i loro effetti sui risultati, in base ai dati riportati nelle successive figure, adimensionalizzati rispetto al rapporto H/h (H = Altezza totale della paratia, h = altezza dello scavo sostenuto), si possono trarre le seguenti considerazioni:

- 1) Le curve rappresentative dei vari coefficienti di sicurezza in funzione di H/h differiscono per grado di inclinazione e di curvatura dalle corrispondenti curve relative all'indice di affidabilità β . Quanto sopra è rilevabile nelle figure 6-9 per $\phi = 20^\circ$ e nelle figure 14-17 per $\phi = 35^\circ$, in cui appare evidente, al variare di H/h , il più rapido au-

mento di β_1 ($CV_\phi = 10\%$) e β_2 ($CV_\phi = 5\%$ nelle figure 6-9 e $CV_\phi = 2.85\%$ nelle figure 14-17) rispetto a quello dei coefficienti tradizionali. Le curve rappresentative degli stessi coefficienti di sicurezza in funzione del logaritmo della probabilità di rottura ($\log P_f$), almeno nell'intervallo di valori si-

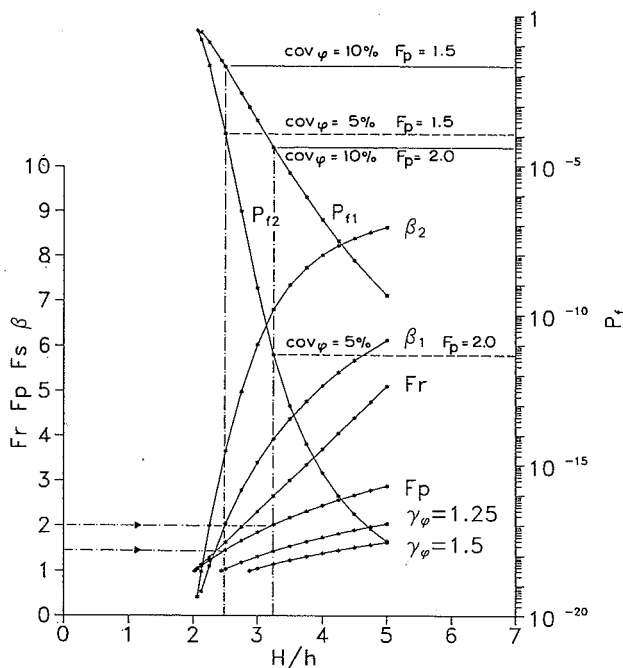


Fig. 7 - Variazione dei coefficienti di sicurezza e della probabilità di rottura in funzione di H/h ; $\phi = 20^\circ$; condizione idraulica tipo b [P_{f1} e β_1 per $CV_\phi = 10\%$, P_{f2} e β_2 per $\sigma_\phi = 1^\circ$ a cui corrisponde $CV_\phi = 5\%$].

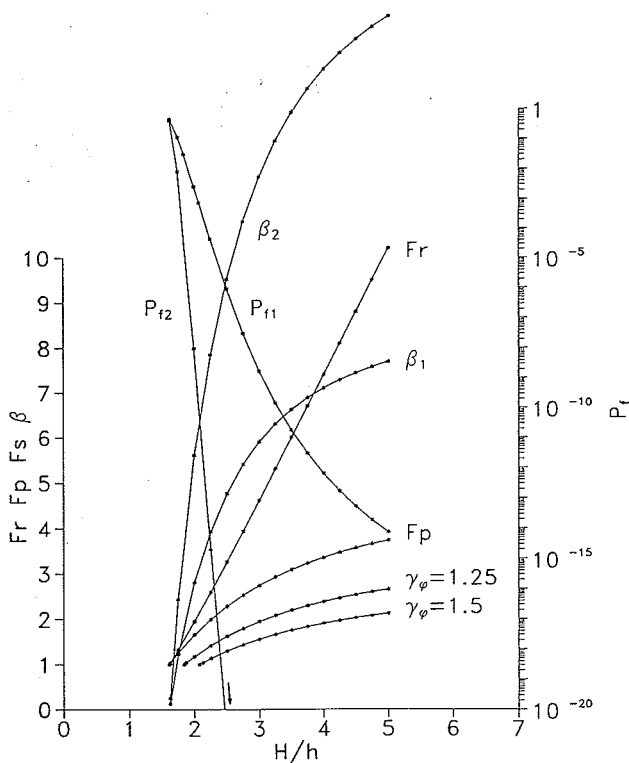


Fig. 6 - Variazione dei coefficienti di sicurezza e della probabilità di rottura in funzione di H/h ; $\phi = 20^\circ$; condizione idraulica tipo a [P_{f1} e β_1 per $CV_\phi = 10\%$, P_{f2} e β_2 per $\sigma_\phi = 1^\circ$ a cui corrisponde $CV_\phi = 5\%$].

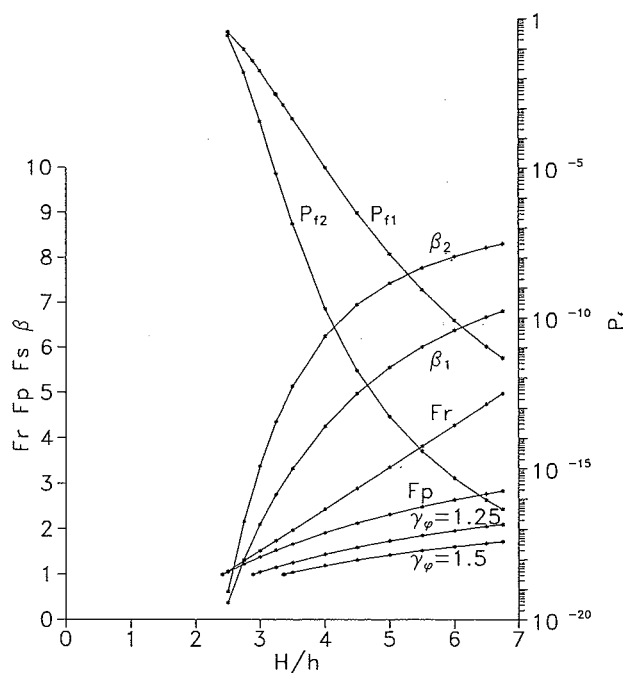


Fig. 8 - Variazione dei coefficienti di sicurezza e della probabilità di rottura in funzione di H/h ; $\phi = 20^\circ$; condizione idraulica tipo c [P_{f1} e β_1 per $CV_\phi = 10\%$, P_{f2} e β_2 per $\sigma_\phi = 1^\circ$ a cui corrisponde $CV_\phi = 5\%$].

gnificativi del rapporto H/h , sono sostanzialmente lineari per ogni tipo di condizione idraulica e valore dell'angolo di resistenza al taglio (Figg. 10-13, 18-21).

- 2) A parità di angolo di resistenza al taglio, ad un prefissato intervallo tra due valori del coefficiente di sicurezza corrispondono, al crescere del coefficiente di variazione CV_ϕ , ampiezze decrescenti dell'intervallo tra i corrispondenti valori della probabilità di rottura (Figg. 6-9, 14-17); si confrontino per esempio in Fig. 7 gli intervalli racchiusi

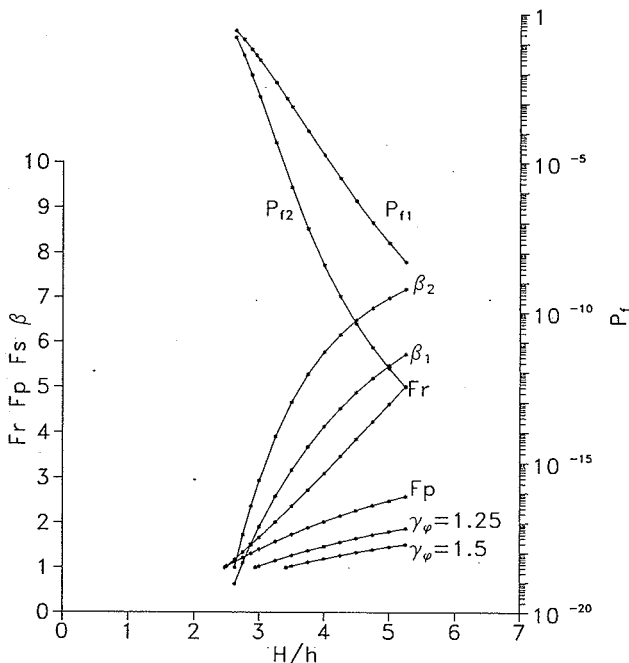


Fig. 9 - Variazione dei coefficienti di sicurezza e della probabilità di rottura in funzione di H/h ; $\phi = 20^\circ$; condizione idraulica tipo d [P_{f1} e β_1 per $CV_\phi = 10\%$, P_{f2} e β_2 per $\sigma_\phi = 1^\circ$ a cui corrisponde $CV_\phi = 5\%$].

rispettivamente dalle due linee continue, relative ad un $CV_\phi = 10\%$, e dalle due linee tratteggiate, attinenti a $\sigma_\phi = 1^\circ$ e quindi $CV_\phi = 5\%$. Tale fatto evidenzia come variazioni relativamente modeste degli usuali coefficienti di sicurezza si traducano in sensibili variazioni, differenti in relazione agli scarti quadratici medi, del coefficiente di affidabilità e della correlata probabilità di rottura. Similmente, a parità di CV_ϕ , ad un prefissato intervallo dei valori del coefficiente di sicurezza, corrispondono, al crescere dell'angolo di resistenza al taglio, ampiezze decrescenti del campo di valori della probabilità di rottura (Figg. 6-9, 14-17); si confronti l'intervallo delimitato dalle due linee continue ($CV_\phi = 10\%$) di Fig. 7 con quel-

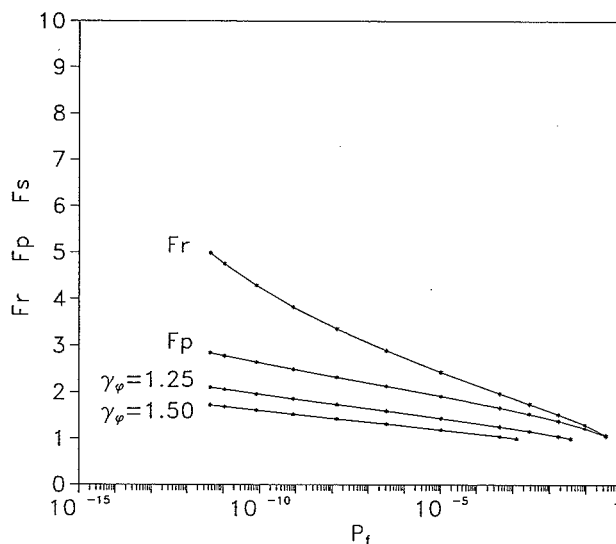


Fig. 11 - Variazione dei coefficienti di sicurezza in funzione della probabilità di rottura; $\phi = 20^\circ$; condizione idraulica tipo b; $CV_\phi = 10\%$.

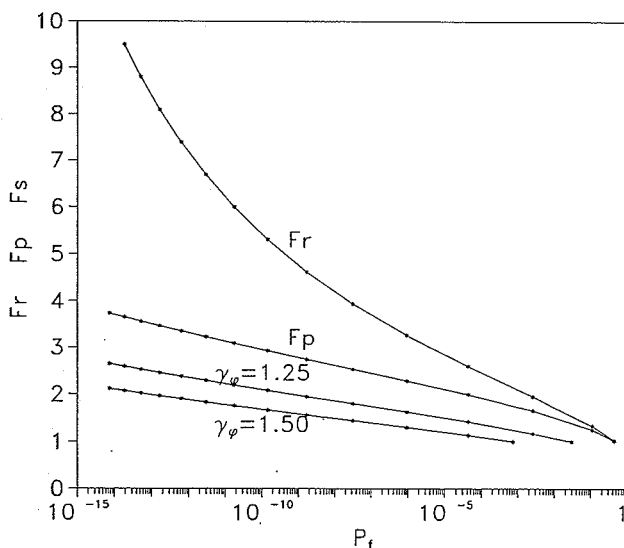


Fig. 10 - Variazione dei coefficienti di sicurezza in funzione della probabilità di rottura; $\phi = 20^\circ$; condizione idraulica tipo a; $CV_\phi = 10\%$.

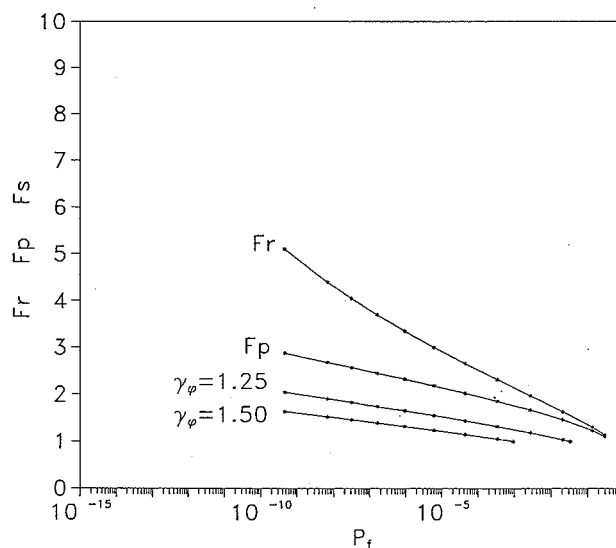


Fig. 12 - Variazione dei coefficienti di sicurezza in funzione della probabilità di rottura; $\phi = 20^\circ$; condizione idraulica tipo c; $CV_\phi = 10\%$.

lo di Fig.15. Pertanto per angoli di resistenza al taglio diversi, ad uguali variazioni dei coefficienti di sicurezza non competono pari variazioni delle corrispondenti probabilità di rottura.

3) A parità di angolo di resistenza al taglio, ad un prefissato intervallo dei valori di H/h, corrispon-

dono, al crescere del coefficiente di variazione CV_ϕ , ampiezze decrescenti del campo di valori della probabilità di rottura (Figg. 6-9, 14-17), come si può rilevare in figura 7 (linee continue $CV_\phi = 10\%$, linee tratteggiate $CV_\phi = 5\%$) ed in figura 15 (linee continue $CV_\phi = 10\%$, linee tratteggiate

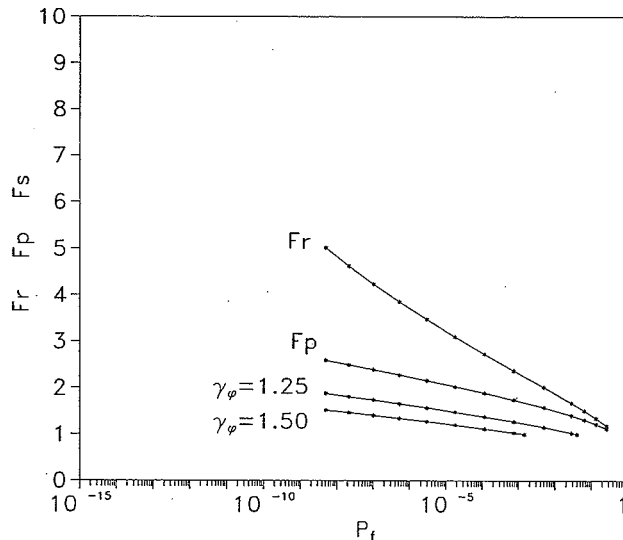


Fig. 13 - Variazione dei coefficienti di sicurezza in funzione della probabilità di rottura; $\phi = 20^\circ$; condizione idraulica tipo d; $CV_\phi = 10\%$.

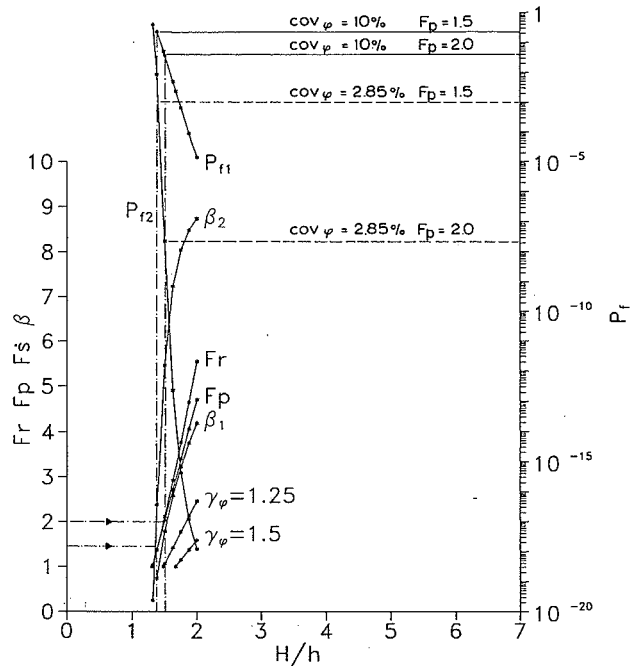


Fig. 15 - Variazione dei coefficienti di sicurezza e della probabilità di rottura in funzione di H/h; $\phi = 35^\circ$; condizione idraulica tipo b [P_{f1} e β_1 per $CV_\phi = 10\%$, P_{f2} e β_2 per $\sigma_\phi = 1^\circ$ a cui corrisponde $CV_\phi = 2.85\%$].

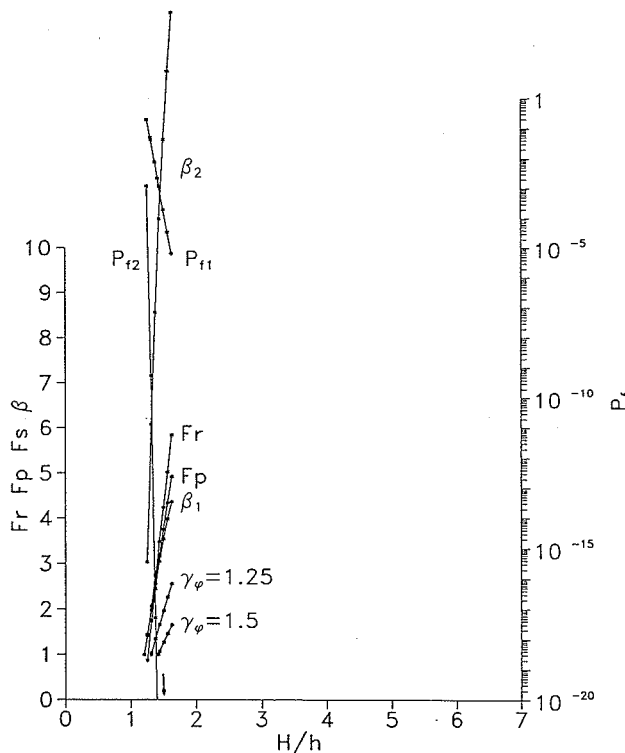


Fig. 14 - Variazione dei coefficienti di sicurezza e della probabilità di rottura in funzione di H/h; $\phi = 35^\circ$; condizione idraulica tipo a [P_{f1} e β_1 per $CV_\phi = 10\%$, P_{f2} e β_2 per $\sigma_\phi = 1^\circ$ a cui corrisponde $CV_\phi = 2.85\%$].

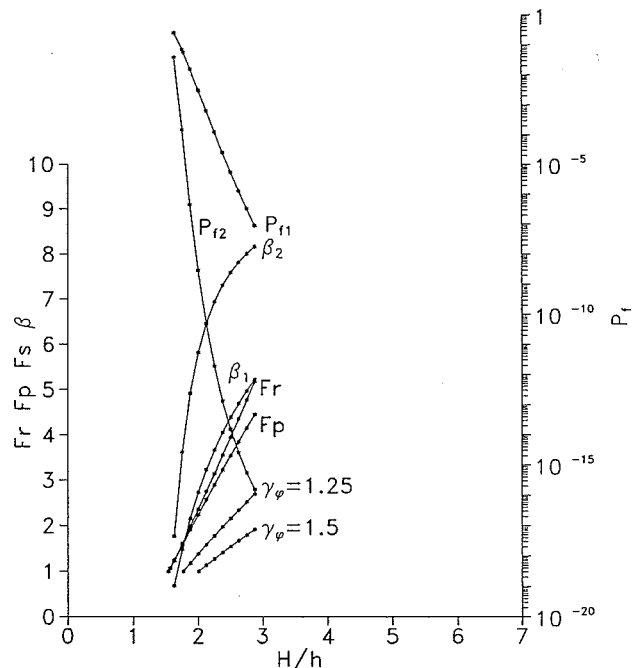


Fig. 16 - Variazione dei coefficienti di sicurezza e della probabilità di rottura in funzione di H/h; $\phi = 35^\circ$; condizione idraulica tipo c [P_{f1} e β_1 per $CV_\phi = 10\%$, P_{f2} e β_2 per $\sigma_\phi = 1^\circ$ a cui corrisponde $CV_\phi = 2.85\%$].

- giate $CV_\phi = 2.85\%$); per un determinato valore di H/h , corrispondono, al crescere di CV_ϕ , valori crescenti della probabilità di rottura (Figg. 6-9, 14-17) (linea P_{f1} per $CV_\phi = 10\%$, linea P_{f2} per $CV_\phi = 5\%$ in figura 7 e $CV_\phi = 2.85\%$ in figura 15).
- 4) Con angoli di resistenza al taglio elevati, a modeste variazioni del rapporto H/h corrispondono variazioni di grande entità sia della probabilità di rottura che dei coefficienti di sicurezza (Figg. 14-17).

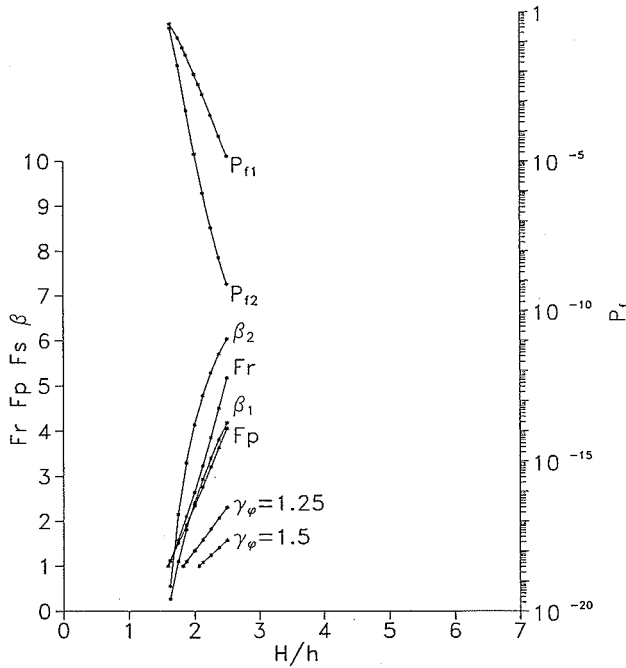


Fig. 17 - Variazione dei coefficienti di sicurezza e della probabilità di rottura in funzione di H/h ; $\phi = 35^\circ$; condizione idraulica tipo d [P_{f1} e β_1 per $CV_\phi = 10\%$, P_{f2} e β_2 per $\sigma_\phi = 1^\circ$ a cui corrisponde $CV_\phi = 2.85\%$].

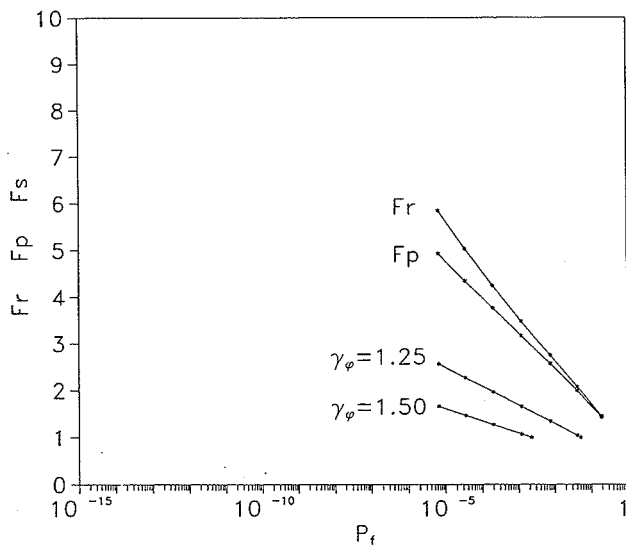


Fig. 18 - Variazione dei coefficienti di sicurezza in funzione della probabilità di rottura; $\phi = 35^\circ$; condizione idraulica tipo a; $CV_\phi = 10\%$.

Considerando poi i singoli metodi ed i relativi valori del coefficiente di sicurezza in rapporto alla probabilità di rottura si rileva che:

- a) Utilizzando uno stesso metodo ed un prefissato valore del coefficiente di sicurezza, la probabilità di rottura è variabile in funzione delle condizioni idrauliche presenti. Tale fatto è evidenziato nelle figure 22-25 che riportano la variazione di P_f in funzione dell'angolo di resistenza al taglio per le varie condizioni di regime idraulico nell'ipotesi di $CV_\phi = 10\%$, assumendo un valore costante del coefficiente di sicurezza dei singoli metodi analizzati; in particolare si è ipotizzato in figura 22 $F_p = 2.0$, in figura 23 $F_r = 2.0$, in figura 24 $\gamma_\phi = 1.25$ ($F_s = 1.0$) ed in figura 25 $\gamma_\phi = 1.50$ ($F_s = 1.0$).

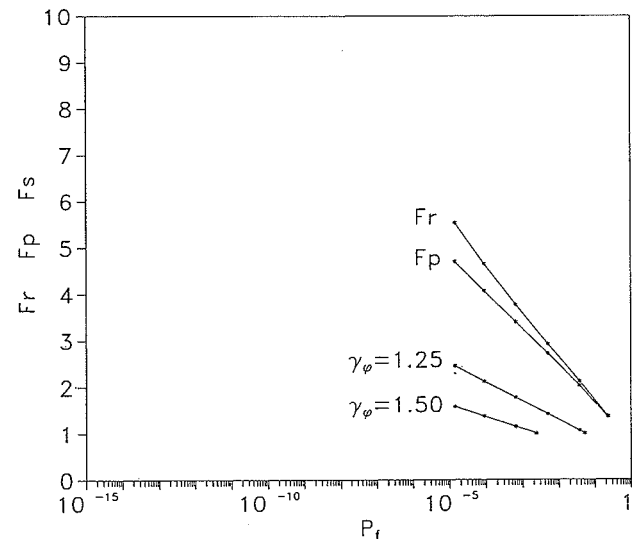


Fig. 19 - Variazione dei coefficienti di sicurezza in funzione della probabilità di rottura; $\phi = 35^\circ$; condizione idraulica tipo b; $CV_\phi = 10\%$.

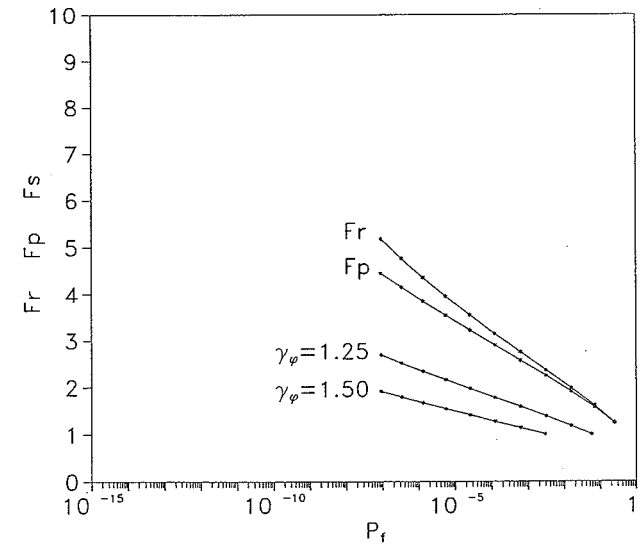


Fig. 20 - Variazione dei coefficienti di sicurezza in funzione della probabilità di rottura; $\phi = 35^\circ$; condizione idraulica tipo c; $CV_\phi = 10\%$.

- b) I metodi CP2 [1951] - NAVFAC [1971] (F_p) determinano, con $F_p = 2.0$ e per valori bassi di ϕ , una profondità di infissione cautelativa nelle varie condizioni idrauliche considerate. Infatti la probabilità di rottura per $\phi = 20^\circ$, $CV_\phi = 10\%$ e $F_p = 2$ è pari a circa $10^{-4} - 10^{-5}$ (Fig. 22).
- c) Con angoli di resistenza al taglio pari a 35° i metodi CP2 [1951]; NAVFAC [1971] (F_p) (Fig. 22); BURLAND *et al.* [1981] (F_r) (Fig. 23) ed il quarto metodo che pone i coefficienti di sicurezza sui parametri di resistenza al taglio con $\gamma_\phi = 1.25$ (Fig.

24), per i valori usuali dei rispettivi coefficienti di sicurezza, individuano analoghe probabilità di rottura che risultano essere troppo elevate, essendo pari a $10^{-1} - 10^{-2}$ per $CV_\phi = 10\%$. Per angoli di resistenza al taglio compresi tra 25° e 30° il metodo CP2 (F_p) (Fig. 22) fornisce valori adeguati di P_f , quello di BURLAND *et al.* [1981] (F_r) (Fig. 23) valori ai limiti ed infine il quarto metodo con $\gamma_\phi = 1.25$ valori eccessivamente elevati ($P_f = 5.0 \cdot 10^{-1}$, Fig. 24).

- d) Utilizzando sempre il quarto metodo, ma con

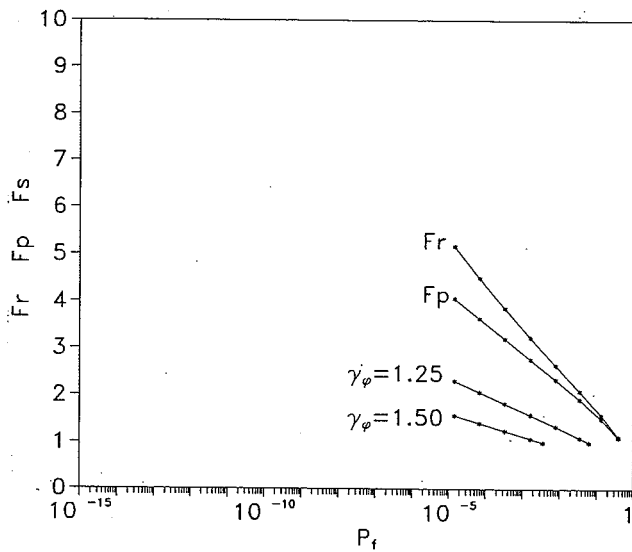


Fig. 21 - Variazione dei coefficienti di sicurezza in funzione della probabilità di rottura; $\phi = 35^\circ$; condizione idraulica tipo d; $CV_\phi = 10\%$.

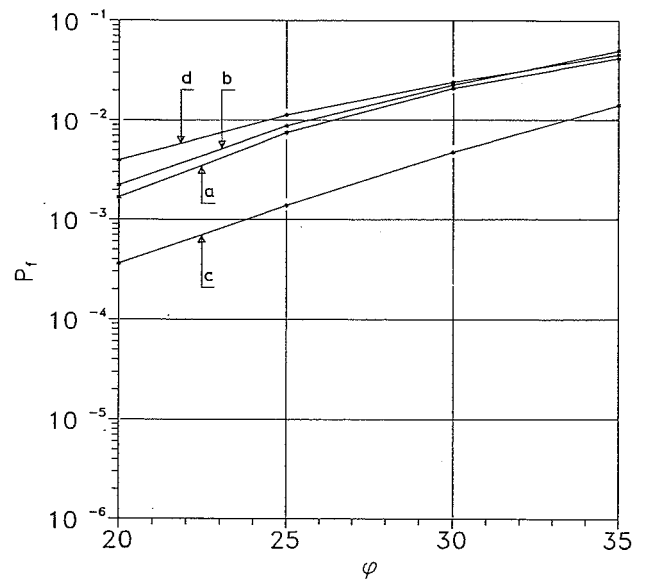


Fig. 23 - Variazione della probabilità di rottura in funzione dell'angolo di resistenza al taglio nelle quattro condizioni idrauliche con valore costante del coefficiente di sicurezza $F_R = 2.0$; $CV_\phi = 10\%$.

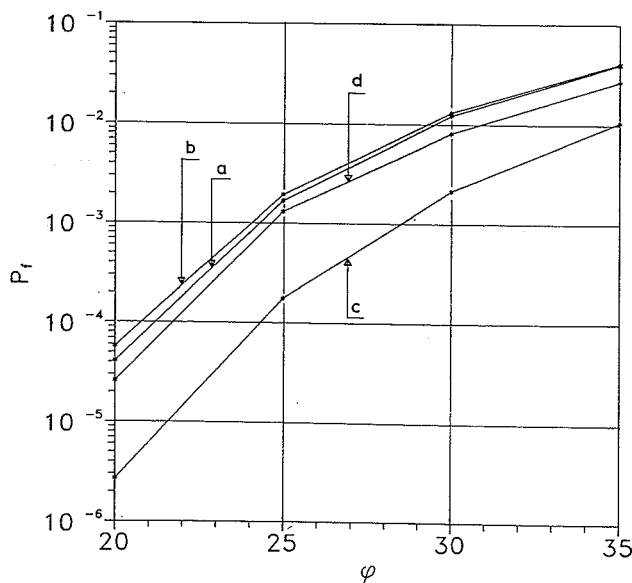


Fig. 22 - Variazione della probabilità di rottura in funzione dell'angolo di resistenza al taglio nelle quattro condizioni idrauliche con valore costante del coefficiente di sicurezza $F_p = 2.0$; $CV_\phi = 10\%$.

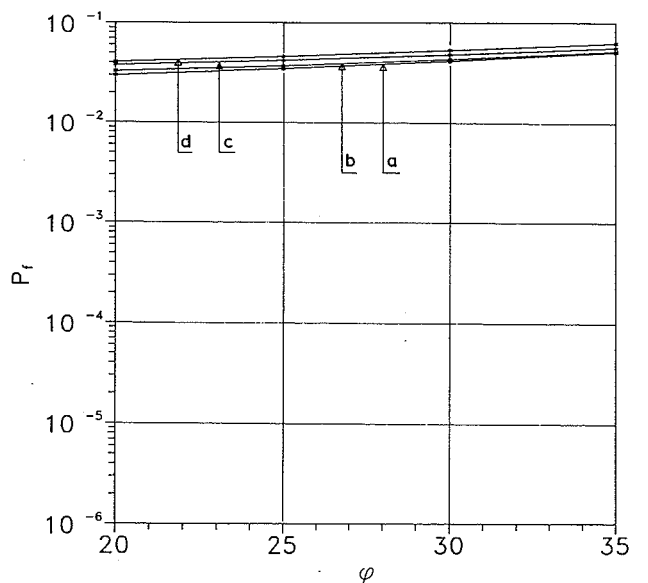


Fig. 24 Variazione della probabilità di rottura in funzione dell'angolo di resistenza al taglio nelle quattro condizioni idrauliche con valore costante del coefficiente di sicurezza $\gamma_\phi = 1.25$; $CV_\phi = 10\%$; $F_s = 1.0$.

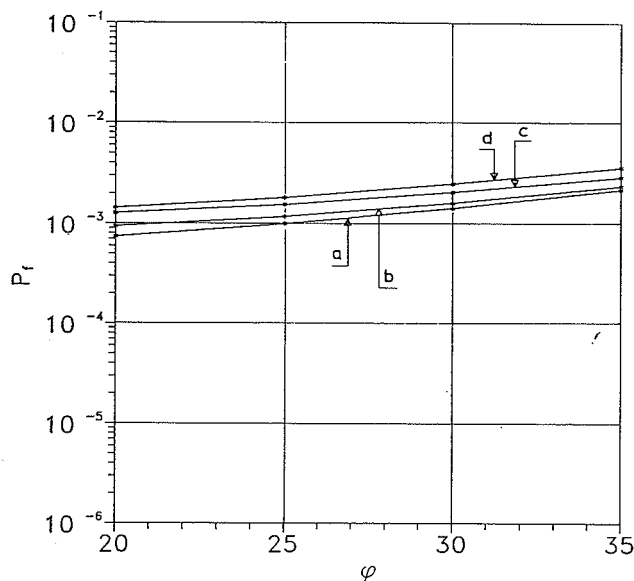


Fig. 25 - Variazione della probabilità di rottura in funzione dell'angolo di resistenza al taglio nelle quattro condizioni idrauliche con valore costante del coefficiente di sicurezza $\gamma_\phi = 1.50$; $CV_\phi = 10\%$; $F_s = 1.0$.

$\gamma_\phi = 1.50$, si riscontrano valori di probabilità di rottura in quasi tutti i casi dell'ordine di 10^{-3} e quindi sostanzialmente adeguati (Fig. 25).

- e) Nel caso di $\sigma_\phi = 1^\circ$, quindi di CV_ϕ variabile in funzione dell'angolo di resistenza al taglio ed inferiore al 10%, tutti i metodi determinano probabilità di rottura ammissibili, con valori maggiori in presenza di filtrazione (Figg. 6-9, 14-17).
- f) Nel caso in cui si ponga il coefficiente di sicurezza sul parametro di resistenza al taglio (γ_ϕ), i valori più elevati della probabilità di rottura P_f si hanno quando è presente il moto di filtrazione (Figg. 24-25).

Con l'analisi statistica è possibile anche individuare l'entità dei valori assunti, per ciascuna variabile x_i , da un termine α_i (la cui espressione analitica è riportata in Appendice) denominato coefficiente di sensitività. La grandezza α_i^2 fornisce infatti una misura dell'incidenza relativa delle variabili aleatorie sull'indice di affidabilità β e di conseguenza sulla probabilità di rottura. In effetti se α_i^2 assume valori bassi la corrispondente variabile x_i può essere considerata come una quantità deterministica di valore pari a quello medio.

Nel caso in esame si rileva che, per $CV_\phi = 10\%$, dei due coefficienti di sensitività α_ϕ^2 ed α_γ^2 , connessi rispettivamente all'angolo di resistenza al taglio ed al peso di volume del terreno, il primo assume valori dell'ordine dell'80%-90% circa, indicando così che la variabile di maggior peso nel calcolo della probabilità di rottura risulta essere l'angolo di resistenza al taglio, tenuto presente che $\sum \alpha_i^2 = 1$; inoltre α_ϕ^2 per lo più diminuisce al ridursi del valore dell'angolo di

resistenza al taglio ed in presenza di un moto di filtrazione, nel qual caso assume maggior rilievo il parametro peso di volume. Per $\sigma_\phi = 1^\circ$ e quindi per CV_ϕ variabile in funzione dell'angolo di resistenza al taglio ed inferiore al 10%, α_ϕ^2 ed α_γ^2 assumono valori molto diversi in relazione all'entità dell'angolo di resistenza al taglio, alla condizione idraulica ed alla profondità di infissione esaminata; in tale situazione spesso risulta preponderante l'effetto della variabile peso di volume.

In generale si può ritenere che un metodo per definire un coefficiente di sicurezza sia valido allorché, fissi restando i coefficienti di variazione, la probabilità di rottura della struttura rimanga sostanzialmente costante per tutti i valori normalmente usati delle variabili che definiscono la condizione limite. A tal riguardo dall'esame delle figure 22-25 si evince che il metodo in cui il coefficiente di sicurezza è posto sui parametri di resistenza soddisfa discretamente tale requisito. La probabilità di rottura che si ottiene, invece, con l'impiego dei metodi proposti da NAVFAC [1971] (Fig. 22) e da BURLAND *et al.* [1981] (Fig. 23) varia in dipendenza dei valori dell'angolo di resistenza al taglio e delle condizioni di regime idraulico, in modo apprezzabile con il primo metodo, in misura minore con il secondo.

6. Conclusioni

Il presente studio ha come finalità un'indagine sui legami fra l'entità della probabilità di rottura delle paratie ancorate, quale risulta dall'applicazione della teoria probabilistica, ed i valori dei coefficienti di sicurezza, determinati mediante i vari metodi usuali, in relazione delle condizioni idrauliche e dell'angolo di resistenza al taglio.

Dall'analisi dei risultati ottenuti sembra esistere, almeno per i casi analizzati, un legame di tipo lineare, ancorché variabile di volta in volta in relazione al metodo considerato, fra il logaritmo della probabilità di rottura ($\log P_f$) ed i coefficienti di sicurezza, se non altro nell'ambito dei valori di uso corrente, mentre non si è riscontrata una relazione semplice e costante fra i suddetti coefficienti di sicurezza individuati mediante le varie definizioni.

Si è anche evidenziato che l'entità delle probabilità di rottura, corrispondenti ai valori del coefficiente di sicurezza proposti dai vari metodi, dipende principalmente dal valore del coefficiente di variazione dell'angolo di resistenza assunto nelle analisi. Infatti, per CV_ϕ pari al 10%, alle profondità di infissione determinate con i metodi NAVFAC [1971] e BURLAND *et al.* [1981], per elevati angoli di resistenza al taglio, e con il quarto metodo per $\gamma_\phi = 1.25$, corrispondono probabilità di rottura generalmente alte ed in

taluni casi maggiori di quelle consigliate. Per $\sigma_\phi = 1^\circ$, invece, le profondità di infissione valutate con tutti i metodi comportano probabilità di rottura che rientrano nei valori considerati accettabili.

Ritenendosi in generale maggiormente realistico un CV_ϕ pari al 10%, il fatto che il collasso di parete sia un evento abbastanza raro, almeno in rapporto a quanto pubblicato in letteratura, fa presumere l'esistenza di ulteriori elementi di sicurezza difficilmente quantificabili. Si ritiene che tali fattori possano essere insiti nel metodo di calcolo stesso, nel fatto di non tener conto della reale sequenza delle fasi costruttive, quasi sempre dettate dalla necessità di contenere le deformazioni, o ancora siano da collegare alla consuetudine di valutare in modo prudentiale i parametri geotecnici. Quest'ultima prassi viene seguita specialmente nei casi di terreni particolarmente addensati, per non scendere al disotto di certi valori minimi della profondità di infissione oltre i quali le modalità di scavo potrebbero risultare determinanti ai fini della sicurezza (dragaggi e scavi in acqua).

Per quanto riguarda il metodo semiprobabilistico, con l'impiego dei valori caratteristici, secondo quanto proposto dall'Eurocodice EC7, si ottengono, a parità di γ_ϕ , angoli di resistenza al taglio di progetto minori di circa il 15-20% rispetto a quelli desunti, come nelle precedenti analisi, dai valori medi. Di conseguenza l'utilizzo dei valori di γ_ϕ , nei termini proposti dall'Eurocodice, fornisce probabilità di rottura di entità che si possono ritenere congrue.

Si è inoltre constatato, in particolare nei metodi proposti da NAVFAC [1971] e BURLAND *et al.* [1981], che la variabilità della probabilità di rottura in funzione dell'angolo di resistenza al taglio, per uno stesso valore del coefficiente di variazione ed a parità di valore di coefficiente di sicurezza, rende difficile l'individuazione di valori generalmente validi di tali coefficienti.

L'indagine condotta ha messo in luce che il metodo semiprobabilistico agli stati limite, invece, consente di ottenere probabilità di rottura sostanzialmente costanti indipendentemente dall'entità dei valori caratteristici dei parametri di resistenza al taglio assunti. Lo studio svolto infine evidenzia quanto complessa risulti la scelta dei coefficienti di sicurezza in fase progettuale per conseguire un determinato grado di affidabilità.

BIBLIOGRAFIA

BURLAND J.B., POTTS D.M., WALSH N.M. (1981) - *The overall stability of free and propped embedded cantilever retaining walls*. Ground Engineering, 14, n. 5, pp. 23-38.

- BRITISH STANDARD INSTITUTION (1951) - *Civil Engineering Code of Practice No. 2: Earth Retaining Structures*. London, BSI.
- HARR M.E. (1987) - *Reliability-Based Design in Civil Engineering*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- MAZZUCATO A., CORTELLAZZO G. (1992) - *Valutazione della sicurezza nei problemi di ingegneria geotecnica*. Atti dell'Istituto di Costruzioni Marittime e di Geotecnica, Università di Padova.
- MEYERHOF G.G. (1970) - *Safety factors in soil mechanics*. Canadian Geotechnical Journal, vol. VII, pp. 349-355.
- MEYERHOF G.G. (1984) - *Safety factors and limit states analysis in geotechnical engineering*. Canadian Geotechnical Journal, vol. XXI, n. 1, pp. 1-7.
- MEYERHOF G.G. (1993) - *Development of geotechnical limit state design*. International Symposium on Limit state design in geotechnical engineering, Copenhagen, 26-28 May, vol. I, pp. 1-12.
- NAVFAC DM-7 (1971) - *Design Manual - soil mechanics, foundations and earth structures*. U.S. Naval Facilities Engineering Command, Washington D.C.
- PADFIELD C.J., MAIR R.J. (1984) - *Design of retaining walls embedded in stiff clay*. CIRIA, London, Report 104.
- OLIPHANT J., BLOCKLEY D.L., LARNACH W.J. (1988) - *Controlling safety in geotechnical design*. Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 85, Mar., pp. 67-88.
- BRITISH STEEL CORPORATION (1979) - *Piling Handbook*. British Steel Corporation.
- RAMACHANDRAN K. (1988) - *Reliability analysis of propped embedded cantilever walls*. Proceedings, 6th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, vol. II, pp. 1225-1230.
- SMITH G.N. (1985) - *The use of probability theory to assess the safety of propped embedded cantilever retaining walls*. Géotechnique, 35, pp. 451-460.
- TSCHBOTARIOFF G.P. (1973) - *Foundations, retaining and earth structures*. McGraw-Hill.

SUMMARY

Safety coefficients and failure probabilities in anchored bulkheads

Various methods have been proposed to assign a certain degree of safety to anchored bulkheads, but the relationship between safety and depth of penetration generally turns out to vary in each case. Since, obviously, the concept of safety implicit in various criteria is not univocal, with the aim of defining the effective probability of failure of such works with the above systems, the values obtained by applying traditional deterministic or probabilistic methods were systematically compared.

Of the traditional systems, the five shown in Fig. 1a-e are the most frequently used. They are reported in:

- NAVFAC [1971] and CP2 [1951] (safety coefficient F_p , Fig. 1a);
- BRITISH STEEL CORPORATION [1979] (safety coefficient F_{np} , Fig. 1b);
- TSCHBOTARIOFF [1973] (safety coefficient F_d , Fig. 1c);
- PADFIELD and MAIR [1984] (safety coefficient γ_ϕ , Fig. 1d);
- BURLAND *et al.* [1981] (safety coefficient F_r , Fig. 1e).

In reliability analysis, the value of β (system reliability index) is determined by level II reliability theory, hypothesizing currently used mean values and quadratic standard deviations for variables considered random.

In particular, a top-anchored bulkhead in cohesionless homogeneous soil was analysed (Fig. 4a-d). Analyses were carried out parametrically, so that four friction angle values were chosen ($\phi = 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$). Four situations were chosen for the hydraulic regime:

- absence of water level (Fig. 4a);
- water level on both sides at depth of bottom of excavation (Fig. 4b);
- water level at depth of retaining wall behind and at depth of bottom of excavation in front, with no seepage (Fig. 4c);
- water level as in point c) but with vertical seepage along entire bulkhead (Fig. 4d).

Active earth pressure was calculated using Rankine's theory; passive earth pressure was calculated using NAVFAC [1971] values, with a soil/structure friction value of $\phi/2$.

In view of the results of other authors, we decided to compare safety coefficients as defined by NAVFAC [1971] and CP2 [1951] ($F_p = 1,5-2,0$), BURLAND *et al.* [1981] ($F_r = 2,0$), and the strength method [PADFIELD and MAIR, 1984] (shear resistance parameters: $\gamma_\phi = 1,25-1,50$) with level II reliability analysis in the following two situations, considered plausible in the literature ($CV_x = \sigma_x/\mu_x$ coefficient of variation):

$$CV_\gamma = 5\% \quad \text{and} \quad CV_\phi = 10\%$$

$CV_\gamma = 5\%$ and $\sigma_\phi = 1^\circ$ The CV_ϕ thus varies according to ϕ .

Mean values in all analyses were hypothesized to be:

$$\mu_\gamma = 19,8 \text{ kN/m}^3 \quad \mu_\phi = 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$$

Research on failure phenomena in various types of structures carried out by MEYERHOF [1970; 1984; 1993] has identified the probabilities of failure linked to soil retaining works which, if designed according to the usual criteria, were 10^{-3} (Fig. 5).

Bearing in mind the various simplifications introduced and their effects on result, the following considerations may be made:

- 1) The representative curves of the various safety coefficients according to H/h are not similar to the corresponding curves for β (Figs. 6-9, 14-17). The representative curves of safety coefficients according to $\log P_f$, at least in the range of significant values, are substantially linear (Figs. 10-13, 18-21).
- 2) For low ϕ values, NAVFAC [1971] e CP2 [1951] methods determine excessively conservative depths of penetration (Fig. 22).
- 3) At high friction angles, both failure probability and safety coefficients are very sensitive to variations in the H/h ratio (Figs. 14-17).
- 4) Friction angles being equal and with increasing CV_ϕ , decreasing amplitudes of the range of failure probability values correspond to a pre-set range of safety coefficient values (Figs. 6-9, 14-17) and increasing failure probability values correspond to a certain value of H/h (Figs. 6-9, 14-17).

As regards each method and the relative safety coefficient values in relation to the probability of failure, it may be noted that:

- a) Choosing any one of the four methods, the failure probability values vary according to hydraulic conditions (Figs. 22-25);
- b) For $\phi = 35$ and $CV_\phi = 10\%$, using the various methods examined here, failure probability values are generally high (Figs. 22-25);
- c) Using $CV_\phi = 10\%$ and the shear resistance method with $\gamma_\phi = 1,50$ ($F_s = 1,0$), failure probability values fall around $10^{-3}-10^{-4}$ in almost all cases, and are thus substantially correct (Fig. 25);
- d) For $\sigma_\phi = 1^\circ$, i.e. CV_ϕ varies according to friction angle and is less than 10% , all the methods give conservative failure probabilities (Figs. 6-9, 14-17);
- e) With the shear resistance method, the highest P_f values are found in the presence of seepage (Figs. 24-25).

A simple, constant relationship between the safety coefficients identified according to the various definitions is lacking. However, analysis of the above results does indicate a link of linear type, although it varies each time between $\log P_f$ and the safety coefficients, at least in the range of commonly used values.

It was also noted that failure probabilities with $CV_\phi = 10\%$, corresponding to the safety coefficient values of the various methods are generally admissible for this type of structure, above all for low friction angle values. However, in the case of seepage or of high soil friction angles, the probability of failure is generally high and in some cases greater than the usually accepted value.

Appendice

Innanzitutto risulta necessario definire il termine «Stato Limite» di un'opera. Una struttura (o uno dei suoi elementi costitutivi) raggiunge uno Stato Limite quando non può più svolgere una sua funzione o non soddisfa più le condizioni per cui è stata concepita. Al raggiungimento di uno Stato Limite la struttura quindi passa da uno

stato in cui la si può classificare come «sicura» (*safe*) ad uno in cui è definita «insicura» (*failed*) e ciò in riferimento a ciascun modo di rottura. Gli Stati Limite vengono suddivisi in Stati Limite Ultimi, corrispondenti al valore estremo della capacità portante o comunque legati al raggiungimento di condizioni estreme, e Stati Limite di Esercizio, legati alle esigenze di normale impiego e di durata.

In genere interessa stabilire per ciascun aspetto di comportamento una misura dell'idoneità strutturale, che è detta affidabilità. Nella progettazione agli Stati Limite i requisiti generali fondamentali di una struttura sono controllati attraverso una serie di equazioni del tipo:

Resistenza \geq Sollecitazione

in cui la Resistenza (R) esprime la grandezza, fisica o meccanica con la quale la struttura fa fronte alla Sollecitazione (S), costituita questa dalla grandezza geometrica, fisica o meccanica, omogenea con la precedente, a cui l'opera viene sottoposta.

La verifica della sicurezza di un componente o di un sistema strutturale in rapporto ad un determinato Stato Limite comporta in primo luogo:

- 1) l'assunzione di un modello di comportamento;
- 2) la caratterizzazione statistica delle variabili in gioco.

Successivamente allo svolgimento di tali operazioni, si può eseguire la verifica di sicurezza vera e propria mediante l'utilizzo dei procedimenti, via via più complessi, di seguito elencati:

- a) metodo deterministico o del fattore di sicurezza globale (o livello 0);
- b) metodo semiprobabilistico (o livello I) con fattori di sicurezza parziali;
- c) metodo probabilistico approssimato o livello II;
- d) metodo probabilistico rigoroso o livello III.

Di tali metodi quello di livello III non viene di solito impiegato risultando molto complesso e laborioso, dato che tutte le variabili di progetto sono espresse in termini della loro completa funzione di distribuzione di probabilità e la probabilità di rottura viene valutata mediante appropriati integrali di convoluzione. Nel caso più generale l'affidabilità di una situazione viene determinata mediante la valutazione della probabilità che l'insieme delle variabili aleatorie significative per il problema in esame si trovi nella regione sicura. L'affidabilità, definita come la probabilità che non si verifichi un particolare Stato Limite, può essere quindi espressa come:

$$R = 1 - P_f = 1 - \int_{X \in Q} f(X, M, \Sigma) \quad (4)$$

in cui X è il vettore delle variabili casuali, f è la loro funzione densità di probabilità, con valor medio delle variabili M e matrice di covarianza Σ .

Un caso particolare dell'equazione precedente lo si ha quando il calcolo diretto della probabilità P_f di raggiungimento dello stato limite considerato viene svolto a partire dalla conoscenza delle funzioni densità di probabilità delle variabili aleatorie R e S.

Se definiamo $P_{S,R}(s,r)$ la funzione densità di probabilità congiunta di R e S si ha in definitiva che:

$$P_f = \iint_{s>r} P_{S,R}(s,r) ds dr = \int_0^\infty ds \int_0^s P_{S,R}(s,r) dr \quad (5)$$

Se S ed R sono stocasticamente indipendenti allora la probabilità congiunta è espressa dal prodotto delle rispettive probabilità $P_S(s)$ e $P_R(r)$ essendo:

$$P_{S,R}(s,r) = P_S(s) \cdot P_R(r) \quad (6)$$

in tal caso la probabilità di rottura diviene:

$$P_f = \int_0^\infty P_S(s) \left[\int_0^s P_R(r) dr \right] ds = \int_0^\infty P_S(s) \cdot P_R(s) ds \quad (7)$$

in cui $P_R(s)$ è la funzione di densità cumulativa della variabile aleatoria R, tale che:

$$P_R(s) = \text{Prob} [r < s] \quad (8)$$

cioè la probabilità di rottura P_f della struttura condizionata alla realizzazione di un determinato valore di S .

Mediante l'utilizzo del metodo di livello II si introducono una serie di semplificazioni tali da permettere una soluzione di tipo algebrico per la determinazione del grado di affidabilità.

Se si assume infatti che le due variabili R e S siano indipendenti, presentino una distribuzione di tipo normale e siano noti i valori medi e le deviazioni standard, la funzione lineare di rottura $Z = R - S$ ha distribuzione normale con valor medio $\mu_z = \mu_R - \mu_S$ e deviazione standard $\sigma_z = (\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{0.5}$; in tali ipotesi inoltre:

$$P_f = \text{prob}[Z < 0] = \int_{-\infty}^0 f_z(x) dx = \Phi\left(\frac{0 - \mu_z}{\sigma_z}\right) = \Phi(-\beta) \quad (9)$$

in cui f_z è la funzione densità di probabilità, Φ è la funzione di probabilità cumulativa e β , indice di affidabilità, è la misura del livello di affidabilità e dovrebbe essere inteso come un coefficiente di sicurezza normalizzato rispetto alla variabilità dei parametri.

Facendo riferimento al metodo FOSM (First-Order Second-Moment Method), la procedura si sviluppa nei seguenti passi:

- a) definizione del legame funzionale $Z = g(X_1 \dots X_i \dots X_n) = 0$ tra quelle variabili, ritenute fondamentali, che definiscono lo Stato Limite analizzato;
- b) valutazione da un punto di vista statistico delle variabili mediante

la media, la deviazione standard e se possibile la funzione di distribuzione;

- c) individuazione del punto sulla superficie di rottura dove vi è la massima probabilità di rottura;
- d) linearizzazione della superficie di rottura in tale punto e valutazione dell'affidabilità della struttura, in termini sia di indice di affidabilità β , sia di probabilità di rottura P_f che di grado di affidabilità $R = 1 - P_f$.

In particolare il calcolo può articolarsi nei seguenti passi:

- a) definizione del meccanismo di rottura in funzione delle variabili del problema in esame $Z = g(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)$;
- b) scelta di un valore iniziale di β ed imposizione di $x_i^* = \mu_i$ per tutti gli i ;
- c) determinazione delle derivate $g_i = \delta g / x_i$ nel punto $x^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$ e del coefficiente $\alpha_i = g_i(x^*) \sigma_i / \sigma_z$ (coefficiente di

sensibilità delle variabili aleatorie) con $\sigma_z = \left[\sum_{i=1}^n (g_i(x^*) \sigma_i)^2 \right]^{1/2}$;

- d) calcolo dei nuovi x_i^* con $x_i^* = \mu_i - \alpha_i \beta \sigma_i$;
- e) ripetizione del calcolo fino ad ottenere valori di x_i^* stabili;
- g) determinazione della funzione $Z = g(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$;
- h) qualora $Z \neq 0$ il calcolo viene ripetuto modificando convenientemente β ;
- i) individuato un valore di β tale per cui Z sia prossima a zero si valuta la probabilità di rottura come $P_f = \Phi(-\beta)$.