

End effects on the stability of cuts in normally consolidated clays

S. CAVOUNIDIS*, H. KALOGEROPOULOS**

SOMMARIO. The three-dimensional effects on the stability of vertical cuts in cohesive slopes whose undrained strength varies linearly with depth is examined. The failure surface is assumed to be cylindrical with conical end caps, having its axis of rotation on the crest of the slope. The soil, which corresponds to normally consolidated clay may or may not have a finite strength value on the ground surface. Constant strength with depth is examined as a particular case. The problem was solved analytically resulting in a closed form equation for the three-dimensional factor of safety. The variation of the ratio of the three-dimensional to the two-dimensional factor of safety is studied for different linear strength variation configurations and for a variety of failure lengths of both the cylindrical and the conical parts. It is shown that the factor of safety in three-dimensions is dependent upon the height of the slope. For a specific length of the cylindrical part there exists a critical length of the conical ends. This critical length increases for increasing strength variation slope and it practically disappears in the case of zero strength on the ground. In the case of zero strength on the ground, end effects can be ignored for a length of each conical part greater than three times the height of the slope.

1. Introduction

The treatment of slope stability problems as plane strain problems is of questionable accuracy when dealing, for example, with narrow slopes, with slopes of variable cross-section or with slopes in soil of variable strength in the longitudinal sense. Also the strength may be overestimated when actual slides, which are obviously three-dimensional, are used for back analysis in order to compute the strength of the soil. In the last seventeen years a number of three-dimensional methods have been developed in order to take the ends' effect into account. Cohesive slopes have mainly been dealt by BALIGH and AZZOUZ [1975], AZZOUZ and BALIGH [1978] and GENS, HUTCHINSON and CAVOUNIDIS [1988], in terms of limit equilibrium and both analytical and numerical methods. UGAI [1975] dealt with cohesive slopes using variational calculus. LESHCHINSKY and his co-workers [LESHCHINSKY, BAKER and SILVER, 1985; LESHCHINSKY and BAKER 1986; LESHCHINSKY and MULLETT, 1988] used variational calculus for both cohesive and frictional slopes. MICHALOWSKI [1989] proposed a method, also for both cohesive and frictional slopes, based on the upper bound theorem of limit analysis.

Of the above mentioned methods only AZZOUZ and BALIGH [1978] for cylindrical slides with conical ends and GENS, HUTCHINSON and CAVOUNIDIS [1988] for cylindrical slides with plane ends solved the problem analytically and produced closed-form solutions.

All three-dimensional solutions for cohesive slopes assume constant strength with depth. Herein is presented a closed-form solution of the problem solved by BALIGH and AZZOUZ [1975] and AZZOUZ and BALIGH [1978], using their assumptions, i.e. cylindrical

slope or toe slides with conical ends for vertical cuts with the axis of rotation coinciding with the crest of the slope, allowing, however, the undrained strength to vary linearly with depth. The case solved by Azzouz and Baligh is therefore a particular case of the more general solution presented herein. The soil conditions are realistic for the short-term analysis of cut slopes in normally consolidated clay. The geometric assumptions do not lead to the critical slip surfaces. Nevertheless the solution presented can give a good estimate of the influence of the end effects on the factor of safety as well as of the relative influence of several other factors such as slide length and rate of increase of strength with depth.

The comparison between the three-dimensional factor and the two-dimensional factor conforms to the criterion of relevance, put forth by CAVOUNIDIS [1987], since the two-dimensional slip line corresponds to a cross-section of the cylindrical part of the three-dimensional slip surface.

2. Two dimensional analysis

The analytical solution of TAYLOR [1937] for the two-dimensional analysis of homogeneous and isotropic cohesive slopes under undrained conditions was extended by GIBSON and MORGENSTERN [1962] for isotropic cohesive material whose strength increases linearly with depth. For the parameters and the geometry of Fig. 1, the driving moment in two dimensions was expressed as:

$$M_D = \frac{\gamma H^3}{12} [1 - 2c \cot^2 \beta + 3c \cot \lambda \cot \beta + 3c \cot \lambda \cot \alpha - 3c \cot \alpha \cot \beta] \quad (1)$$

and the two-dimensional factor of safety as:

$$F_2 = \frac{3K}{\gamma H} \frac{[\cot \lambda + \alpha(1 - \cot \lambda \cdot \cot \alpha)]}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \lambda [1 - 2c \cot^2 \beta + 3c \cot \lambda \cdot \cot \beta + 3c \cot \lambda \cdot \cot \alpha - 3c \cot \alpha \cdot \cot \beta]} \quad (2)$$

* Partner. Geotechnical Design Company, 4, Ang. Hatzimichali Street. Athens 105 58.

** Design Engineer. 20, D. Gounari Street, Larissa 412 21, Greece.

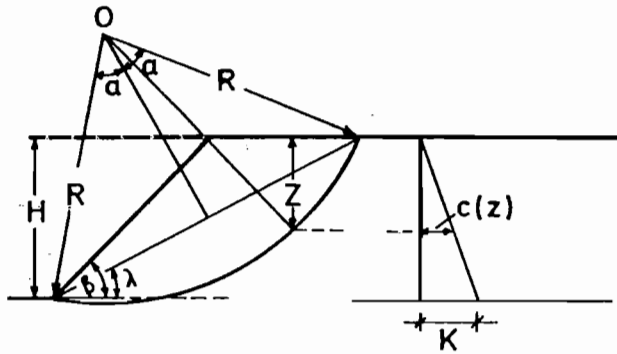


Fig. 1 - Parameters of two-dimensional problems.

Gibson and Morgenstern's solution assumes zero strength at the ground surface. HUNTER and SCHUSTER [1968] solved the same problem assuming though a finite strength at the ground surface which reflects the existence of negative pore pressures above the water table which is situated below the ground surface. They expressed the two-dimensional factor of safety as:

$$F_2 = \frac{3K}{\gamma H} \frac{[\cot\lambda + \alpha (1 + 2(h/H) (\gamma_w/\gamma') - \cot\lambda \cdot \cot\alpha)]}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\lambda \cdot [1 - 2\cot^2\beta + 3\cot\lambda \cdot \cot\alpha - 3\cot\alpha \cdot \cot\beta]} \quad (3)$$

where h is the depth below the ground surface where the water table is found, γ_w is the unit weight of water and γ' the submerged unit weight of the soil.

It should be noted that, since K/H , which expresses the inclination of the linear variation of the undrained strength, is a soil property, the two-dimensional factor of safety is independent of the height H of the slope.

In the case where the axis of rotation coincides with the crest of the slope:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda \quad \beta = 2\lambda = \pi - 2\alpha$$

and $z = R_0 \cdot \sin(\alpha - \theta)$

and if the cut is vertical:

$$H = R_0 = R_{\max}$$

$$\alpha = \lambda = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

In this case the driving and resisting moments become:

$$M_D = \frac{\gamma H^3}{3} \quad (4)$$

and

$$M_R = H^2 \left[K_1 \cdot \frac{\pi}{2} + H \cdot \tan\omega \right] \quad (5)$$

If the undrained strength is zero at the ground surface, i.e.

$$K_1 = 0 \cdot K_2 = K, \quad \tan\omega = \frac{K}{H}$$

then M_R becomes:

$$M_R = H^3 \tan\omega = H^2 K \quad (6)$$

If, on the other hand c is constant with depth, the resisting moment for the vertical cut is:

$$M_R = c \cdot \frac{\pi}{2} \cdot H^2 \quad (7)$$

The two-dimensional factor of safety, for the axis of rotation coinciding with the crest of the slope, is then:

$$F_2 = \frac{3}{\gamma H} \{ 2K_1 \cdot \alpha + R_0 \cdot \tan\omega \cdot (1 - \cos 2\alpha) \} \quad (8)$$

For the case of zero undrained strength at the ground surface Eq.8 becomes:

$$F_2 = \frac{3K}{\gamma H} \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{3K}{\gamma H} \tan\alpha \quad (9)$$

and for a vertical cut, $\tan\alpha = 1$ and:

$$F_2 = \frac{3K}{\gamma H} \quad (10)$$

If c is constant with depth Eq.8 becomes:

$$F_2 = \frac{3\pi}{2} \frac{c}{\gamma H} \quad (11)$$

3. Solution of the three-dimensional problem

The soil considered is purely cohesive and the analysis proceeds assuming undrained ($\varphi = 0$) conditions. Undrained cohesion is assumed to vary linearly with depth (Fig. 2), having a value K_1 on the ground surface and a slope of variation ω , i.e. $C_u(Z) = K_1 + z \tan\omega$, where Z denotes depth and $z = 0$ on the surface.

The slope angle is β and its height H . The shape of the slip surface considered in the analysis is cylindrical with conical end caps. The length of the cylinder is $2l_c$ and the length of each end cap is l_n while ρ is the cone angle.

The axis of rotation of the slip surface coincides in this analysis with the crest of the slope (Fig. 3).

The radius $R(y)$ i.e. the distance of a point on the slip surface to the axis of rotation varies from

$$R = R_0 = R_{\max} \text{ for } y = l_c \text{ to } R = 0 \text{ for } y = l_c + l_n$$

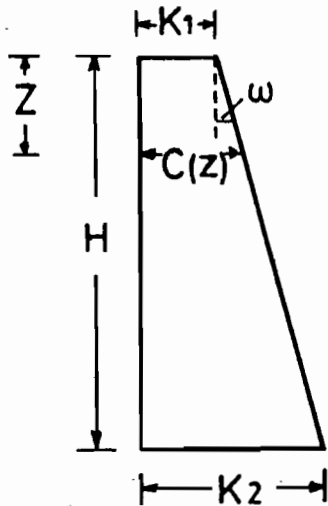


Fig. 2 - Linear undrained strength variation with depth.

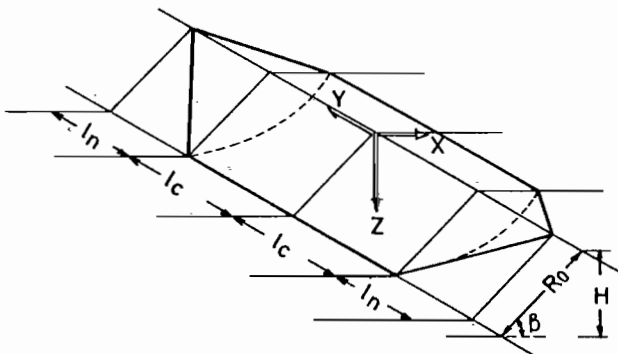


Fig. 3 - Geometry of assumed slip surface.

In the conical part (Fig. 4):

$$R(y) = (I_n + l_c - y) \tan \rho$$

$$\text{and } \frac{dR}{dy} = -\tan \rho$$

The 3-D factor of safety of a slope having an inclination β , and a failure surface having its axis

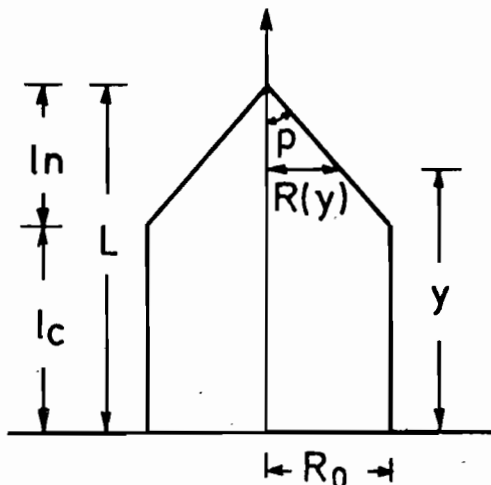


Fig. 4 - Geometry of the conical end.

of rotation on the crest of the slope is given by:

$$F_3 = \frac{M_R}{M_D} \text{ where } M_D = \text{overturning moment} = M_D \text{ (cylinder)} + M_D \text{ (cones).}$$

M_R = resisting moment = M_R (cylinder) + M_R (cones).

The necessary geometric relations (see Fig. 5) are:

$$\lambda = \pi/2 - \alpha$$

$$\beta = 2\lambda = \pi - 2\alpha$$

$$\tan \omega = \frac{K_2 - K_1}{H}$$

$$c(z) = K_1 + z \tan \omega$$

$$z = R_0 \cdot \sin(\alpha - \theta)$$

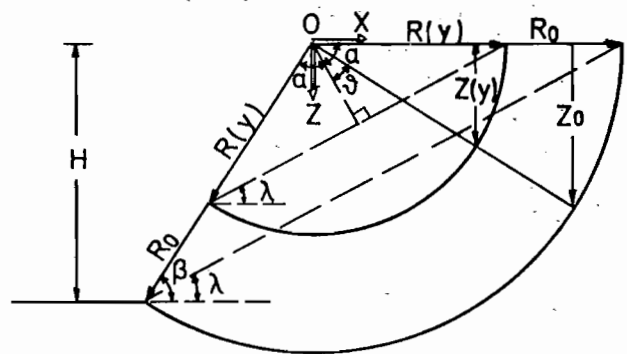


Fig. 5 - Vertical cross-section of slip surface.

The overturning moment in two dimensions is

$$M_D = \frac{\gamma R_0^3}{3} \sin 2\alpha \text{ for the cylindrical part and}$$

$$M_D = \frac{\gamma R^3(y)}{3} \sin 2\alpha \text{ for the conical part}$$

Thus:

$$M_D \text{ (cylinder)} = 2l_c \cdot M_D = \frac{2}{3} \gamma R_0^3 \cdot \sin 2\alpha \quad (12)$$

$$M_D \text{ (cones)} = 2 \cdot \int_{l_c}^{l_c + l_n} M_D(y) \cdot dy = 2 \int_{l_c}^{l_c + l_n} \frac{\gamma}{3} \sin 2\alpha \cdot R^3(y) dy \quad (13)$$

Since $R(y) = (l_n + l_c - y) \cdot \tan \rho$, Eq.13 becomes:

$$M_D \text{ (cones)} = 2 \int_{l_c}^{l_c + l_n} \frac{\gamma}{3} \sin 2\alpha (l_n + l_c - y)^3 \cdot \tan^3 \rho \cdot dy = \frac{\gamma l_n^4}{6} \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan^3 \rho = \frac{\gamma R_0^3}{6} l_n \cdot \sin 2\alpha \quad (14)$$

Consequently the overturning moment in three dimensions is:

$$M_D = M_D \text{ (cylinder)} + M_D \text{ (cones)} = \frac{2}{3} \gamma R_0^3 l_c \cdot \sin 2\alpha + \frac{1}{6} \gamma R_0^3 l_n \cdot \sin 2\alpha \quad (15)$$

$$M_D = \frac{1}{6} \gamma R_0^3 \cdot \sin 2\alpha (4l_c + l_n)$$

The resisting moment consists of the resisting moment of the cylindrical part M_R (cylinder) and the resisting moment of the two conical parts M_R (cones)

$$M_R = M_R \text{ (cylinder)} + M_R \text{ (cones)}$$

In two dimensions:

$M_R = R_o^2 [2K_1 \cdot \alpha + R_o \cdot \tan\omega(1 - \cos 2\alpha)]$ for the cylindrical part and $M_R(y) = R^2(y) [2K_1 \cdot \alpha + R(y) \cdot \tan\omega(1 - \cos 2\alpha)]$

for any section of the conical end at a distance y .

Thus:

$$M_R(\text{cylinder}) = 2l_c \cdot R_o^2 [2K_1 \cdot \alpha + R_o \cdot \tan\omega(1 - \cos 2\alpha)] \quad (16)$$

$$M_R(\text{cones}) = 2 \int_{l_c}^{l_c + l_n} MR(y) \cdot ds \quad (17)$$

$$\text{where } ds = dy \cdot \frac{1}{\cos\phi}$$

Thus:

$$\begin{aligned} M_R(\text{cones}) &= 2 \int_{l_c}^{l_c + l_n} \{2K_1 \cdot \alpha R^2(y) + R^3(y) \cdot \tan\omega(1 - \cos 2\alpha)\} \frac{1}{\cos\phi} \cdot dy = \frac{4K_1 \cdot \alpha}{\cos\phi} \int_{l_c}^{l_c + l_n} R^2(y) \cdot dy + \frac{2 \cdot \tan\omega(1 - \cos 2\alpha)}{\cos\phi} \int_{l_c}^{l_c + l_n} R^3(y) \cdot dy = \\ &= \frac{4}{3} \alpha \cdot K_1 \cdot \frac{R_o^2 l_n^3}{\cos\phi} + \frac{1}{2} R_o^3 \cdot l_n \frac{(1 - \cos 2\alpha)}{\cos\phi} \cdot \tan\omega \end{aligned} \quad (18)$$

But $H = R_o \cdot \sin\beta$ Then $H = R_o \cdot \sin 2\lambda = R_o \cdot \sin(\pi - 2\alpha) = R_o \cdot \sin 2\alpha$

Consequently

$$M_R = M_R(\text{cylinder}) + M_R(\text{cones}) = 2l_c R_o^2 [2K_1 \cdot \alpha + R_o \cdot \tan\omega(1 - \cos 2\alpha)] + \frac{4}{3} \alpha K_1 \cdot \frac{R_o^2 l_n^3}{\cos\phi} + \frac{1}{2} R_o^3 l_n \frac{(1 - \cos 2\alpha)}{\cos\phi} \cdot \tan\omega$$

or

$$M_R = \frac{4}{3} K_1 \cdot \alpha R_o^2 \left[3l_c + \frac{l_n}{\cos\phi}\right] + \frac{1}{2} R_o^3 \cdot \tan\omega(1 - \cos 2\alpha) \left[4l_c + \frac{l_n}{\cos\phi}\right] \quad (19)$$

The three-dimensional factor of safety is:

$$F_3 = \frac{M_R}{M_D} = \frac{\frac{4}{3} K_1 \cdot \alpha R_o^2 \left[3l_c + \frac{l_n}{\cos\phi}\right] + \frac{1}{2} R_o^3 \cdot \tan\omega(1 - \cos 2\alpha) \left[4l_c + \frac{l_n}{\cos\phi}\right]}{\frac{1}{6} \gamma R_o^3 \cdot \sin 2\alpha [4l_c + l_n]} \quad (20)$$

or

$$F_3 = \frac{8K_1 \cdot \alpha \cdot \left[3l_c + \frac{l_n}{\cos\phi}\right] + 3R_o \cdot \tan\omega(1 - \cos 2\alpha) \left[4l_c + \frac{l_n}{\cos\phi}\right]}{\gamma R_o \cdot \sin 2\alpha [4l_c + l_n]} \quad (21)$$

4. Strength variation cases

The general solution of the cylindrical surface with conical ends with the crest coinciding with the axis of rotations (Eq.21) can be simplified for the case of vertical cut and for three specific cases of strength variation with depth, i.e. linear with an initial strength value at the ground surface, linear with zero strength at the ground, and constant strength.

a) Vertical cut with linear strength variation and an initial strength value

The geometric considerations (Fig. 6) in this case lead to the following relations:

$$\alpha = \lambda = \frac{\pi}{4} \text{ and } \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$H = R_o$$

$$\frac{l_n}{\cos\phi} = \sqrt{l_n^2 + H^2}$$

$$\tan\omega = (K_2 - K_1)/H$$

Thus Eq.21 becomes in this case:

$$F_3 = \frac{8K_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[3l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}\right] + 3H \frac{K_2 - K_1}{H} \left[4l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}\right]}{\gamma H [4l_c + l_n]} \quad (22)$$

or

$$F_3 = \frac{2\pi K_1 \cdot \left[3l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}\right] + 3(K_2 - K_1) \left[4l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}\right]}{\gamma H [4l_c + l_n]} \quad (23)$$

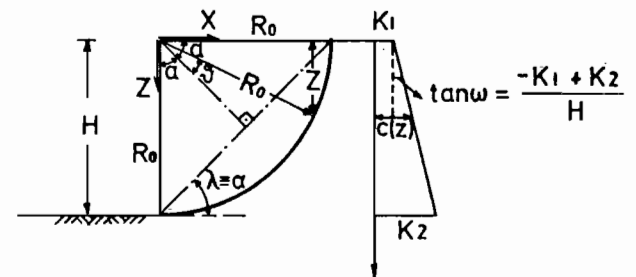


Fig. 6 - Cross-section of vertical cut and slip surface.

b) Vertical cut with linear strength variation and zero strength at the ground surface

In this case $K_1 = 0$, $K = K_2$. Eq.21 then becomes:

$$F_3 = \frac{3K [4l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}]}{\gamma H [4l_c + l_n]} = \frac{3K}{\gamma H} \frac{[4l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}]}{4l_c + l_n} \quad (24)$$

c) Vertical cut with constant strength

In this case $K_1 = K_2 = c$ and Eq.21 becomes:

$$F_3 = \frac{2\pi c [3l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}]}{\gamma H (4l_c + l_n)} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{c}{\gamma H} \cdot \frac{l_c + (1/3)\sqrt{l_n^2 + H^2}}{l_c + l_n/4} \quad (25)$$

5. Presentation and discussion of numerical results

For the cases of the previous section the ratio of the three-dimensional to the corresponding two-dimensional factor of safety is expressed in terms of the geometric and strength characteristics. The term «corresponding two-dimensional factor of safety» refers to the factor of safety in a vertical cross-section of the cylindrical part of the slip surface.

The closed form expression of the ratio of factors of safety can be used to study the influence of the three-dimensional effects on the factor of safety. The numerical results of this analysis are presented in the form of plots of the variation of F_3/F_2 with the normalized length of the conical end, l_n/H , for different values of the normalized length of the cylindrical part, l_c/H .

a) Vertical cut with linear strength variation and an initial strength value

In this case the ratio of factors of safety is:

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2\pi K_1 [3l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}] + 3(K_2 - K_1) [4l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}]}{\gamma H (4l_c + l_n)} \quad (26)$$

$$= \frac{4\pi K_1 [3l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}] + 6(K_2 - K_1) [4l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}]}{3 [K_1 \cdot \pi + 2(K_2 - K_1)] [4l_c + l_n]}$$

For $\frac{K_1}{K_2} = a$, $K_1 = a \cdot K_2$ and $K_2 - K_1 = K_2 - aK_2 = K_2(1 - a)$

Then:

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{4\pi \cdot a \cdot K_2 [3l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}] + 6K_2(1 - a) [4l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}]}{3 [a \cdot K_2 \cdot \pi + 2(1 - a) \cdot K_2] [4l_c + l_n]} \quad (27)$$

For normalized lengths of the cylindrical and conical parts the expression is:

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{6(1 - a) l_c/H + (4a\pi + 6 - 6a) (3l_c/H + \sqrt{1 + l_n^2/H^2})}{(3 \cdot a \cdot \pi + 6 - 6a) (4l_c/H + l_n/H)}$$

Figs. 7, 8, 9 present the variation of the ratio of factors of safety with l_n/H for different l_c/H values.

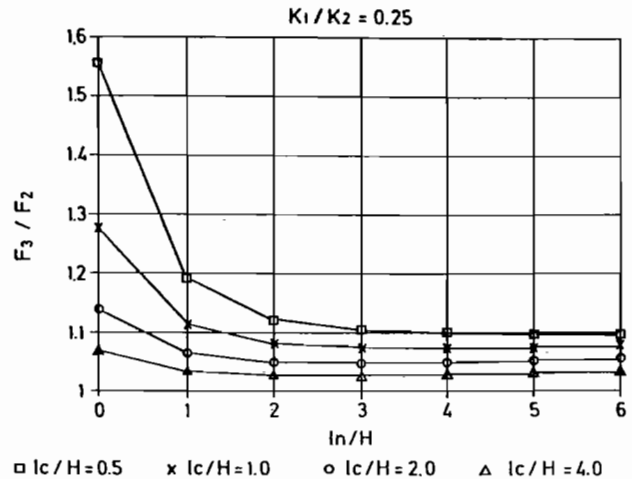


Fig. 7 - Variation of the ratio of factors of safety with the length of the conical end for different values of the length of the cylindrical part ($\frac{K_1}{K_2} = 0.25$).

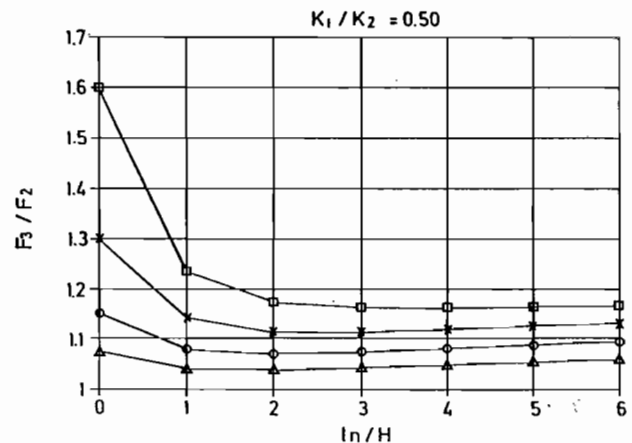


Fig. 8 - Variation of the ratio of factors of safety with the length of the conical end for different values of the length of the cylindrical part ($\frac{K_1}{K_2} = 0.50$).

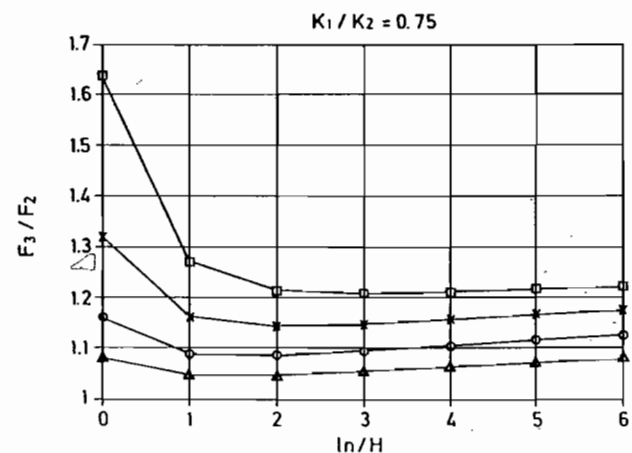


Fig. 9 - Variation of the ratio of factors of safety with the length of the conical end for different values of the length of the cylindrical part ($\frac{K_1}{K_2} = 0.75$).

In particular Fig. 7 is the plot for $\frac{K_1}{K_2} = 0.25$, Fig. 8 for $\frac{K_1}{K_2} = 0.50$ and Fig. 9 for $\frac{K_1}{K_2} = 0.75$.

b) *Vertical cut with linear strength variation and zero strength at the ground surface*

In this case $K_1 = 0, K_2 = K$.

The ratio of factors of safety is:

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{4l_c + \sqrt{l_n^2 + H^2}}{4l_c + l_n} = \frac{l_c/H + (1/4)\sqrt{1 + l_n^2/H^2}}{l_c/H + (1/4) l_n/H} \quad (28)$$

Fig. 10 presents the variation of the ratio of factors of safety with the normalized length of the conical ends. Each curve in the figure corresponds to a different normalized length of the cylindrical part of the slip surface.

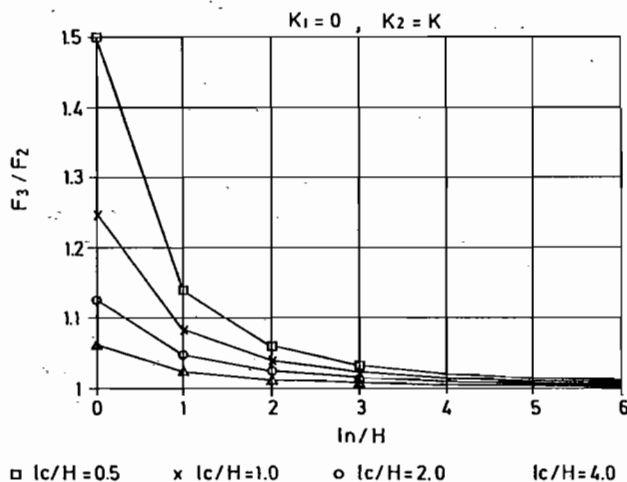


Fig. 10 - Variation of the ratio of factors of safety with the length of the conical end for different values of the length of the cylindrical part ($K_1 = 0, K_2 = K$).

c) *Vertical cut with constant strength*

In this case $K_1 = K_2 = c$. The ratio of factors of safety is:

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{l_c/H + 1/3 \sqrt{1 + l_n^2/H^2}}{l_c/H + (1/4) l_n/H} \quad (29)$$

Fig. 11 presents the variation of the ratio of factors of safety with the normalized length of the conical ends for different values of the normalized length of the cylindrical part of the slip surface.

This particular case is the case examined by M.M. BALIGH and A.S. AZZOUZ [1975]. The numerical results of Fig. 11 differ slightly from the results of Fig. 4 of Baligh and Azzouz since their results are based on numerical analysis and not on the closed form solution. However the analytical expression as

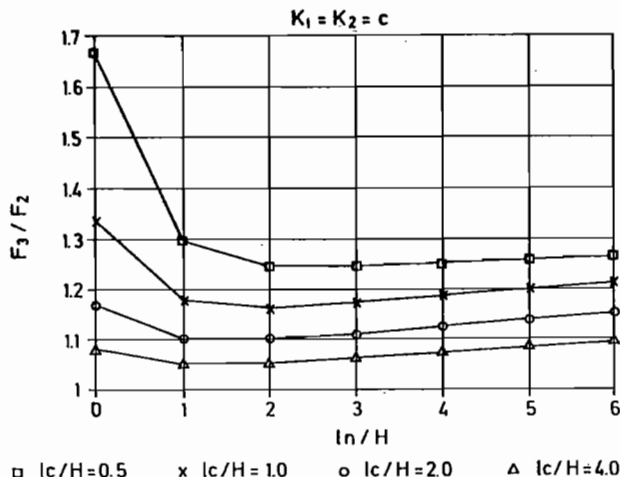


Fig. 11 - Variation of the ratio of factors of safety with the length of the conical end for different values of the length of the cylindrical part ($K_1 = K_2 = c$).

well as the numerical results coincide with the closed form results presented by AZZOUZ and BALIGH [1978].

It should be noted that in the case of constant strength, the F_3/F_2 vs. l_n/H curves corresponding to different l_c/H values are the farthest apart from each other while in the case of linear variation with zero strength at the ground surface the curves converge quickly after the initial values of l_n/H . Also in all cases where there is a finite strength at the ground surface there exists a minimum of the F_3/F_2 vs l_n/H curve. In other words, for a specific length of the cylindrical part there is a value of the length of the conical part for which the ratio F_3/F_2 becomes a minimum, which signifies, under all the assumptions of this case, a probable slide length. This position of the minimum value tends to move towards higher l_n/H values as the slope of the strength variation curve increases and the relative value of the strength at the ground surface decreases. It practically disappears for zero strength at the ground surface.

It should also be noted that the case of zero strength at the ground surface yields the lowest ratios F_3/F_2 . All curves, corresponding to different lengths of the cylindrical part, converge very quickly to very low F_3/F_2 ratios. Practically, in the case of zero strength at the ground surface the linear variation of the strength with depth minimises the end effects. For values of l_n/H greater than 3, the end effects may be ignored, for all practical purposes, irrespective of the length of the cylindrical part of the slip surface.

Since, for $l =$ total length of slide,

$$l = 2 (l_c + l_n)$$

for constant length of slide ($l = \text{const}$) the smaller the

cylindrical part the higher the ratio F_3/F_2 , that is, the effect of the third dimension becomes more pronounced.

As expected for constant cone length the ratio F_3/F_2 decreases with increasing length of cylinder, in all cases of linear strength variation, since the tendency is towards the plane strain condition.

6. Conclusions

A closed-form expression of the three-dimensional factor of safety, for the case of cylindrical toe slides with conical ends in cohesive vertical slopes with linearly varying strength with depth, has been derived. The solution assumes that the axis of rotation of the slip surface coincides with the crest of the slope. Exactly the same case has previously been solved by BALIGH and AZZOUZ [1975] and AZZOUZ and BALIGH [1978] but only for constant strength, which is a sub-case of the present solution. Complete agreement with the closed-form solution results of AZZOUZ and BALIGH [1978] has been found for this case. The numerical analysis results of BALIGH and AZZOUZ [1975] however differ slightly due to the numerical approximation involved in their solution.

Despite the fact that the slip surfaces considered are not the critical ones some important conclusions can be drawn from the analysis presented.

1. In the case of three-dimensional analysis the factor of safety depends on the height of the slope, contrary to the conclusions of the two-dimensional analysis [GIBSON and MORGENSTERN 1962; HUNTER and SCHUSTER 1968].

2. As expected [CAVOUNIDIS, 1987], the three-dimensional factors of safety are always greater than the corresponding two-dimensional ones. The ends' effect decreases with increasing length of the cylindrical part, for constant length of the conical part, in all cases of linear strength variation.

3. In all cases for $l_c/H \geq 4$ the ratio of F_3/F_2 is less than 1.1, that is for a length of the cylindrical part of a slide greater than four times the height of the slope, irrespective of the rate of strength variation with depth, the ends' effect is less than 10% on the factor of safety. Consequently in such cases a two-dimensional analysis would suffice.

4. For a specific length of the cylindrical part there exists a critical length of the conical ends for which the ratio F_3/F_2 becomes a minimum. The critical length indicates the most probable length of the slide. This critical length of the conical ends increases with increasing slope of the strength variation with depth and practically disappears for zero strength at the ground surface.

5. The ratio of factors of safety, F_3/F_2 , decreases with decreasing strength at the ground surface. For the case of the strength linearly varying with depth with zero strength at the ground surface (for example NC clay with the water table at the ground surface) the end effects are minimised. In this case, for lengths of the conical ends greater than three times the slope height ($l_n > 3H$) the end effects can be ignored irrespective of how long the cylindrical part is.

6. For a specific total length of a slide the third dimension becomes more important with decreasing length of the cylindrical part in all cases of linear variation of the strength with depth.

REFERENCES

- AZZOUZ A.S., BALIGH M.M. (1978) - *Three-dimensional stability of slopes*. Publication n. R78-8, Massachusetts Institute of Technology, June.
- BALIGH M.M., AZZOUZ A.S. (1975) - *End effects on stability of cohesive slopes*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, GT11, pp. 1105-1117.
- CAVOUNIDIS S. (1987) - *On the ratio of factors of safety in slope stability analyses*. Geotechnique 37, n. 2, pp. 207-210.
- GENS A., HUTCHINSON J.N., CAVOUNIDIS S. (1988) - *Three-dimensional analysis of slides in cohesive soils*. Geotechnique 38, n. 1, pp. 1-23.
- GIBSON R.E., MORGENSTERN N. (1962) - *A note on the stability of cuttings in normally consolidated clays*. Geotechnique 12, n. 3, pp. 212-216.
- HUNTER J.H., SCHUSTER R.L. (1968) - *Stability of simple cuttings in normally consolidated clays*. Geotechnique 18, pp. 372-378.
- LESHCHINSKY D., BAKER R. (1986) - *Three-dimensional analysis of slope stability: End effects*. Soils and Foundations 26, n. 4, pp. 99-108.
- LESHCHINSKY D., BAKER R., SILVER M.L. (1985) - *Three-dimensional analysis of slope stability*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. IX, pp. 199-223.
- LESHCHINSKY D., MULLETT T.L. (1988) - *Design charts for vertical cuts*. Journal of the Geotechnical Engineering Division. ASCE Vol. CXIV, GT3, pp. 337-344.
- MICHALOWSKI R.L. (1989) - *Three-dimensional analysis of locally loaded slopes*. Geotechnique 39, n. 1, pp. 27-38.
- TAYLOR D.W. (1937) - *Stability of earth slopes*. Journal of the Boston Society of Civil Engineers 24, pp. 197-246.
- UGAI K. (1985) - *Three-dimensional stability analysis of vertical cohesive slopes*. Soils and Foundations 25, n. 3, pp. 41-48.

TRADUZIONE

Effetti della geometria tridimensionale della superficie di scorrimento sulla stabilità dei pendii in argille normalmente consolidate

1. Introduzione

L'analisi dei problemi di stabilità dei pendii nell'ipotesi di deformazione piana è di dubbia attendibilità nel caso in cui si considerino, per esempio, pendii a sezione trasversale ridotta o variabile oppure pendii in terreni con caratteristiche meccaniche variabili in senso longitudinale. Inoltre i parametri di resistenza possono essere sovrastimati se ricavati da un'analisi a ritroso bidimensionale di frane reali, che sono ovviamente tridimensionali. Negli ultimi decenni sono stati

sviluppati vari metodi per tener conto dell'influenza degli effetti dovuti ai lati di una superficie di scorrimento tridimensionale. Il caso di pendii in terreni coesivi è stato analizzato da BALIGH e AZZOUZ [1975], AZZOUZ e BALIGH [1978] e GENS, HUTCHINSON e CAVOUNIDIS [1988], in termini di equilibrio limite, sia per via numerica che analitica. UGAI [1975] ha trattato il caso di pendii in terreni coesivi usando il calcolo variazionale. LESHCHINSKY ed i suoi vari coautori [LESHCHINSKY, BAKER e SILVER, 1985; LESHCHINSKY e BAKER, 1986; LESHCHINSKY e MULLETT, 1988] hanno usato il calcolo variazionale sia nel caso di pendii in terreni coesivi che in terreni incoerenti. Per entrambi i casi MICHALOWSKI [1989] ha proposto un metodo basato sul teorema del limite superiore dell'analisi limite.

Tra i metodi citati solo quelli di AZZOUZ e BALIGH [1978] per superfici cilindriche con lati conici, e di GENS, HUTCHINSON e CAVOUNIDIS [1988] per superfici cilindriche con lati piani risolvono il problema per via analitica e forniscono la soluzione in forma chiusa.

Tutte le soluzioni tridimensionali, nel caso di pendii in terreni coesivi, ipotizzano la resistenza del terreno costante con la profondità. In questo articolo si presenta la soluzione in forma chiusa del problema risolto da BALIGH e AZZOUZ [1975] e AZZOUZ e BALIGH [1978], nelle stesse ipotesi da loro assunte: superfici di scorrimento cilindriche che passino per il piede della scarpata o che interessino solo il pendio e asse di rotazione coincidente con la cresta del pendio; in più si considera la resistenza non drenata eventualmente variabile linearmente con la profondità. Quello risolto da Azzouz e Baligh può essere pertanto considerato un caso particolare della soluzione più generale presentata in questo articolo. La variabilità lineare della coesione non drenata con la profondità è realistica per l'analisi in condizioni non drenate di pendii in argille normalmente consolidate.

Le ipotesi sulla geometria del problema non permettono di individuare la superficie di scorrimento critica; ciò nonostante la soluzione proposta fornisce una buona stima sia dell'influenza degli effetti dei lati della superficie di scorrimento sul coefficiente di sicurezza che dell'influenza relativa di numerosi altri fattori, quali la larghezza della superficie stessa e il gradiente della coesione non drenata con la profondità.

Il confronto tra il coefficiente di sicurezza tridimensionale e quello bidimensionale è conforme al criterio di rilevanza, esposto da CAVOUNIDIS [1987], visto che la superficie di scorrimento bidimensionale coincide con la sezione trasversale della parte cilindrica della superficie di scorrimento tridimensionale.

2. Analisi bidimensionale

La soluzione analitica di TAYLOR [1937] per l'analisi bidimensionale di pendii in terreni coesivi omogenei ed isotropi in condizioni non drenate fu estesa da GIBSON e MORGENSTERN [1962] al caso di materiale coesivo isotropo con coesione non drenata crescente con la profondità. Per i parametri e la geometria di Fig. 1 il momento sollecitante ed il coefficiente di sicurezza bidimensionali sono dati rispettivamente dalle Eq. (1) e (2). La soluzione di Gibson e Morgenstern assume che la coesione non drenata sia nulla sulla superficie del terreno.

HUNTER e SCHUSTER [1968] hanno risolto lo stesso problema assumendo invece un valore non nullo della coesione non drenata in superficie, prevedendo quindi l'esistenza di pressioni neutre negative al di sopra della falda. In questo caso il coefficiente di sicurezza bidimensionale è espresso dalla (3), nella quale h rappresenta la profondità del piano limite della falda rispetto alla superficie del terreno, γ_w il peso immerso dell'unità di volume dell'acqua e γ' il peso immerso dell'unità di volume del terreno.

Si noti che il coefficiente di sicurezza bidimensionale è indipendente dall'altezza H della scarpata, dato che il rapporto K/H , che esprime la legge di variazione lineare della resistenza non drenata con la profondità, è una caratteristica del terreno.

Nel caso in cui l'asse di rotazione coincide con la cresta del pendio e lo scavo è verticale, il momento sollecitante e quello ribaltante sono rispettivamente espressi dalle (4) e (5).

Se la coesione non drenata in superficie è nulla, il momento resistente M_r è invece dato dalla (6), mentre se la si assume costante con la profondità, il momento resistente è espresso dalla (7).

L'Eq. (8) fornisce allora il coefficiente di sicurezza bidimensionale nell'ipotesi che l'asse di rotazione coincida con la cresta del pendio.

Nel caso di coesione non drenata nulla sul piano campagna l'Eq. (8) si trasforma nella (9); per uno scavo verticale, per il quale $\tan \alpha = 1$, la stessa (8) diventa la (10). L'Eq. (11), infine, esprime il coefficiente di sicurezza bidimensionale nell'ipotesi che la coesione non drenata sia costante con la profondità.

3. Soluzione del problema tridimensionale

L'analisi è svolta in condizioni non drenate ($\varphi = 0$), considerando un terreno esclusivamente coesivo. Si assume che la resistenza non drenata vari linearmente con la profondità (Fig. 2), con valore K_1 sul piano campagna ed un gradiente pari a $\tan \omega$, per cui $c_0(z) = K_1 + z \tan \omega$, dove z è la profondità dal piano campagna. L'altezza del pendio è H e β è il suo angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale.

La superficie di scorrimento considerata è cilindrica con chiusure laterali coniche. La larghezza della parte cilindrica è $2l_c$ e la larghezza di ogni chiusura laterale è l_n , mentre ρ è l'angolo del cono.

Nella presente analisi si ipotizza che l'asse di rotazione della superficie di scorrimento coincida con la cresta del pendio (Fig. 3). Nella parte conica (Fig. 4) la distanza $R(y)$ tra un punto sulla superficie di scivolamento e l'asse di rotazione varia da $R = R_0 = R_{\max}$ per $y = l_c$ a $R = 0$ per $y = l_n$. In particolare si ha:

$$R(y) = (l_n + l_c - y) \tan \rho$$

$$dR/dY = -\tan \rho$$

Il fattore di sicurezza tridimensionale di un pendio con angolo di inclinazione β , nelle ipotesi espresse in precedenza, è dato da:

$$F_3 = M_r/M_d$$

dove M_d è il momento sollecitante, somma di un contributo dovuto alla parte cilindrica della massa interessata dallo scorrimento e di uno dovuto alle due estremità coniche della stessa massa

$$M_d = M_d (\text{cilindro}) + M_d (\text{coni})$$

e M_r è il momento resistente, anch'esso dato da

$$M_r = M_r (\text{cilindro}) + M_r (\text{coni})$$

I momenti sollecitante e resistente sono ricavati per integrazione partendo dai corrispondenti valori bidimensionali, e sono rispettivamente espressi dalle Eq. (15) e (19); le considerazioni geometriche che conducono alla scrittura di queste equazioni si ricavano dalla Fig. 5, mentre le Eq. (12), (13), (14), (16), (17) e (18) rappresentano i contributi parziali delle zone cilindrica e coniche. Le (20) e (21), infine, forniscono il coefficiente di sicurezza tridimensionale.

4. Casi particolari

La soluzione generale per superficie cilindrica con estremità coniche ed asse di rotazione coincidente con la cresta del pendio Eq. (21) si può semplificare nel caso di scavo verticale e per tre possibili andamenti della coesione non drenata: (a) variazione lineare con la profondità e valore non nullo sulla superficie del terreno, (b) variazione lineare e valore nullo in superficie, (c) coesione non drenata costante con la profondità.

Nel caso (a), con semplici considerazioni geometriche (vedi Fig. 6), l'Eq. (21) si trasforma nella (22) o nella (23). Nel caso (b), in cui $K_1 = 0$ e $K = K_2$, il coefficiente di sicurezza F_3 è espresso dalla (24). Nel caso (c), infine, si ha $K_1 = K_2 = c$, per cui F_3 è dato dalla (25).

5. Presentazione e discussione dei risultati

Per analizzare l'influenza degli effetti tridimensionali sul valore

del coefficiente di sicurezza, conviene riferirsi al rapporto F_3/F_2 , in cui F_2 è il « coefficiente di sicurezza bidimensionale equivalente », definito come il coefficiente di sicurezza della sezione trasversale della parte cilindrica della superficie di scorrimento; il rapporto F_3/F_2 risulta funzione solo delle caratteristiche geometriche del problema e della coesione non drenata del terreno.

I risultati numerici dell'analisi svolta sono presentati in forma di diagrammi della variazione di F_3/F_2 con la lunghezza delle estremità coniche l_n , per diversi valori della lunghezza della parte cilindrica l_c , entrambe normalizzate rispetto all'altezza H dello scavo verticale.

Nell'ipotesi di variazione lineare della coesione non drenata con la profondità e valore non nullo in superficie (caso (a)), il rapporto tra i coefficienti di sicurezza è dato dalle Eq. (26) e (27). Le Figg. 7, 8, 9 presentano la variazione del rapporto F_3/F_2 rispetto alla lunghezza adimensionale l_n/H per diversi rapporti di l_c/H . La Fig. 7, in particolare, è relativa al caso di $K_1/K_2=0.25$, la Fig. 8 al caso di $K_1/K_2=0.50$ e la Fig. 9 a quello di $K_1/K_2=0.75$.

Se la coesione non drenata varia linearmente con la profondità e assume valore nullo in superficie (caso (b)), il rapporto F_3/F_2 è dato dalla (28). La Fig. 10 mostra la sua variazione rispetto alla lunghezza normalizzata delle estremità coniche, per diversi valori della lunghezza normalizzata della parte cilindrica della superficie di scorrimento.

Se, infine, la coesione non drenata è costante con la profondità (caso (c)), F_3/F_2 è dato dalla (29), ed in Fig. 11 è rappresentato il suo andamento in funzione delle lunghezze normalizzate l_n/H e l_c/H .

Quest'ultimo caso coincide con quello analizzato da BALIGH e AZZOUZ [1975]. I risultati numerici di Fig. 11 differiscono leggermente da quelli presentati da Baligh e Azzouz, ma la differenza può essere spiegata con il fatto che gli Autori hanno risolto il problema per via numerica e non per via analitica. Sia l'espressione analitica che i risultati numerici coincidono invece con la soluzione in forma chiusa presentata da AZZOUZ e BALIGH [1978].

Si noti che, nel caso di coesione non drenata costante con la profondità (Fig. 11), le curve che rappresentano le variazioni di F_3/F_2 con l_n/H per diversi valori di l_c/H sono molto distanti le une dalle altre, mentre nel caso di variazione lineare della coesione non drenata con la profondità e valore nullo in superficie (Fig. 10) le curve convergono rapidamente. Nei casi in cui la coesione non drenata è non nulla in superficie (Figg. 7, 8, 9), inoltre, le curve presentano un minimo. Questo vuol dire che, per una certa lunghezza della parte cilindrica della superficie di scorrimento, c'è un valore della lunghezza delle estremità coniche per il quale il rapporto F_3/F_2 diventa minimo; nelle ipotesi fatte per questi casi questo minimo corrisponde ad una probabile dimensione della superficie di scorrimento. La posizione del minimo tende a spostarsi verso valori più alti di l_n/H all'aumentare della pendenza della curva e al diminuire del valore della coesione non drenata in superficie K_1 .

Si può inoltre notare che per coesione non drenata nulla in superficie si ha il minimo valore del rapporto F_3/F_2 . In questo caso tutte le curve, corrispondenti a diverse lunghezze della parte cilindrica della superficie di scorrimento, convergono rapidamente verso valori molto bassi di F_3/F_2 . In pratica, nel caso di coesione non drenata nulla in superficie la sua variazione lineare con la profondità minimizza l'influenza delle estremità coniche della superficie di scorrimento; per valori di l_n/H maggiori di 3 questi effetti possono essere trascurati ai fini pratici, indipendentemente dalla lunghezza della parte cilindrica della superficie di scorrimento.

La lunghezza totale del corpo in frana è $l=2(l_c+l_n)$; per l costante il rapporto F_3/F_2 aumenta al diminuire della lunghezza della parte cilindrica, quando cioè l'effetto della terza dimensione si risente in maniera più pronunciata.

Come era da prevedersi, nei casi in cui la variazione della coe-

sione non drenata è lineare il rapporto F_3/F_2 diminuisce all'aumentare della lunghezza della parte cilindrica a parità di lunghezza delle parti coniche, ad indicare la tendenza del meccanismo di scorrimento verso condizioni di deformazioni piane.

6. Conclusioni

È stata ricavata un'espressione in forma chiusa del coefficiente di sicurezza tridimensionale, nel caso di superficie di scorrimento cilindrica con estremità coniche passante per il piede della scarpata, nell'ipotesi di terreni coesivi con pendio verticale e coesione non drenata variabile linearmente con la profondità. Si è assunto l'asse di rotazione coincidente con la cresta della scarpata. Lo stesso caso era stato precedentemente risolto da BALIGH e AZZOUZ [1975] e AZZOUZ e BALIGH [1978] nell'ipotesi di coesione non drenata costante con la profondità, che può essere considerato come un caso particolare della soluzione presentata in questo articolo. I risultati sono in pieno accordo con quelli ottenuti da AZZOUZ e BALIGH [1978] in forma chiusa, mentre differiscono leggermente da quelli di BALIGH e AZZOUZ [1975] a causa delle approssimazioni numeriche insite nella soluzione da essi ottenuta.

Nonostante le superfici di scorrimento considerate non siano quelle critiche, l'analisi svolta nel presente articolo permette di trarre alcune importanti conclusioni:

1. nell'analisi tridimensionale il coefficiente di sicurezza dipende dall'altezza della scarpata, contrariamente a quanto avviene nel caso bidimensionale [GIBSON e MORGENSTERN, 1962; HUNTER e SCHUSTER, 1968].

2. Come era da attendersi [CAVOUNIDIS, 1987], i coefficienti di sicurezza ottenuti con l'analisi tridimensionale sono sempre maggiori dei corrispondenti bidimensionali. Nei casi in cui la coesione non drenata varia linearmente con la profondità, gli effetti tridimensionali diminuiscono all'aumentare della lunghezza della parte cilindrica, a parità di lunghezza delle zone coniche.

3. In tutti i casi analizzati il rapporto F_3/F_2 è minore di 1.1 per $l_c/H \geq 4$; questo vuol dire che, per lunghezze della parte cilindrica maggiori di quattro volte l'altezza della scarpata, l'effetto delle estremità si traduce in una variazione del coefficiente di sicurezza minore del 10%, indipendentemente dalla legge di variazione della coesione non drenata con la profondità.

4. Per un certo valore della lunghezza normalizzata della parte cilindrica l_c/H , esiste una dimensione critica delle estremità coniche per la quale il rapporto F_3/F_2 diventa minimo, tranne che nel caso di coesione non drenata nulla in superficie. Questa dimensione critica, che permette di individuare la più probabile lunghezza critica della superficie di scivolamento, aumenta al diminuire della variazione della coesione non drenata con la profondità.

5. Il rapporto F_3/F_2 diminuisce al diminuire del valore della coesione non drenata in superficie. Gli effetti tridimensionali sono ridotti al minimo nel caso di coesione non drenata variabile linearmente con la profondità e nulla in superficie. In questo caso, per valori della lunghezza delle estremità coniche maggiori di tre volte l'altezza del pendio ($l_n > 3H$), gli effetti legati alla presenza di queste estremità possono essere trascurati indipendentemente dalla lunghezza della parte cilindrica.

6. Per un'assegnata lunghezza totale della superficie di scorrimento l'influenza della terza dimensione aumenta al diminuire della lunghezza della parte cilindrica in tutti i casi di variazione lineare della coesione non drenata con la profondità.

(traduzione di A. Flora)