

Plasticizzazione in un solido torico di sabbia.

Distribuzione delle tensioni

R. DE DOMENICO*

SOMMARIO: Si presenta la distribuzione delle tensioni radiali e tangenziali, a plasticizzazione raggiunta, in un solido torico sollecitato da pressione interna ed esterna e da compressione sulle sue basi, essendo la pressione interna superiore a quella esterna. Il solido è costituito da sabbia densa e asciutta, il criterio di rottura prescelto è quello di Mohr-Coulomb, con coesione nulla.

Si dimostra che si raggiungono risultati uguali sia utilizzando le equazioni di Hencky-Ilyushin che quelle di Prandtl-Reuss.

Infine si ricava la pressione indotta sulla parete esterna del solido torico, quando, nello stato di sollecitazione menzionato, esiste un vincolo rigido ad impedire l'espandersi verso l'esterno del solido stesso.

1. Introduzione

Il solido di forma torica, supposto isotropo ed omogeneo, è costituito da sabbia asciutta, di densità tale da essere considerata un mezzo « instabile », secondo il postulato di Drucker, per il quale mezzo non vale la legge associativa.

Nella trattazione che segue si adotta il criterio di resistenza di Mohr-Coulomb, il comportamento della sabbia è definito elasto-plastico.

Si definisce inoltre la geometria del solido come segue.

Si chiami « a » il raggio della superficie cilindrica interna del solido teorico e « b » il raggio della superficie cilindrica esterna. Si chiami « r » il raggio variabile fra il valore minimo « a » ed il valore massimo « b », sarà pertanto: $a \leq r \leq b$ (fig. 1).

L'altezza « h » del solido sarà tale da rispettare il principio di De Saint Venant e da ridurre l'effetto cerchiante dei piatti per la trasmissione del carico assiale, definito nel seguito.

Altrimenti espresso, l'altezza del solido deve essere così grande in relazione alle sue dimensioni trasversali, che la distribuzione di tensioni e deformazioni, sufficientemente lontano dagli estremi, non vari lungo l'altezza del solido.

Ne segue che ogni sezione trasversale originariamente piana resta tale [HILL 1950]. Il tensore delle deformazioni assiali ϵ_z è costante ad ogni stadio della deformazione stessa, non dipende da « r ». Si può scrivere $\epsilon_z = \epsilon$.

Si chiama con p_a la pressione che insiste sulla superficie interna del solido e con p_b la pressione che insiste sulla superficie esterna, la tensione che si manifesta sulla base superiore e sulla base inferiore del toro sarà σ_z , con N, sforzo di compressione, tale che risulti: $N = \int_{\Omega} \sigma_z d\Omega$, dove Ω è l'area di ogni base.

Si conviene che le tensioni di compressione abbiano segno positivo.

Si chiami σ_r la tensione radiale di compressione tale che per $r = a$ è $\sigma_r = p_a$ e per $r = b$ è $\sigma_r = p_b$.

Si chiami σ_θ la tensione tangenziale, σ_θ , σ_r , σ_z siano tensioni principali.

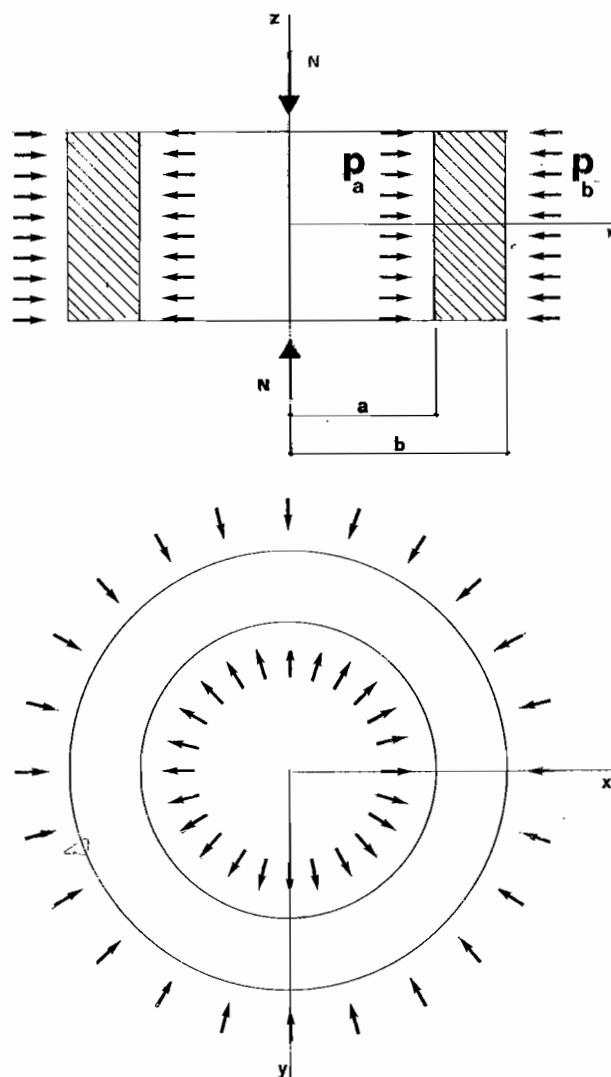


Fig. 1. - Solido torico sollecitato da pressione interna p_a , pressione esterna p_b e sforzo normale di compressione N sulle basi di area Ω .

* Dott. Ing. Rodolfo DE DOMENICO. Già « plant-manager » dell'Impregilo, attualmente Responsabile Costruzioni Meccaniche della Presspali S.p.A., Milano.

2. Metodologia risolutiva e soluzione

Per l'equazione di equilibrio valida sia in campo elastico che plastico è:

$$\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = \frac{d\sigma_r}{dr}$$

Ponendo $p_b < p_a$ sarà σ_r funzione decrescente per valori crescenti di r e pertanto risulterà:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} < 0$$

Avendo definito la natura del solido torico, σ_θ non potrà essere che nullo oppure di compressione e quindi positivo. Trattando il caso $\sigma_\theta = 0$ successivamente, sarà $\sigma_\theta < \sigma_r$ e ponendo $\sigma_z > \sigma_r$ risulterà: $0 < \sigma_\theta < \sigma_r < \sigma_z$.

Il criterio di resistenza si esprimerà in forma sintetica con $\sigma_z = A\sigma_\theta$, essendo $A > 1$, dove $A = \text{tg}^2(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ essendo ϕ l'angolo di attrito della sabbia.

Si considerino le equazioni di Hencky e Ilyushin e le equazioni di Prandtl e Reuss [ZYCZKOWSKI, 1981], la elaborazione di dette equazioni conduce a risultati identici per incrementi proporzionali nel tempo dei carichi esterni, secondo il teorema di Ilyushin detto della sequenza di carico semplice (simple loading).

Con H.-I. si ha:

$$D_e = \varphi D_\sigma$$

Con P.-R. si ha:

$$D_e = D_e^e + D_e^p = \dot{\lambda} D_\sigma + \frac{1}{2G} D_\dot{\sigma}$$

pertanto è:

$$\varphi = \lambda + \frac{1}{2G} \quad [\text{HILL, 1950}].$$

La simbologia indica con D i deviatori degli sforzi o delle deformazioni a seconda dell'indice, oppure i deviatori dei rapporti incrementali infinitesimi fra sforzi o deformazioni e la variabile tempo, se l'indice è sovrassegnato con un punto; inoltre l'apice del simbolo D indica le componenti elastiche o plastiche dei deviatori, mentre in assenza di apice non viene fatta distinzione alcuna.

Il punto sul simbolo λ indica che $\dot{\lambda}$ è una funzione derivata della variabile tempo.

In forma estesa si hanno i seguenti sistemi di equazioni:

H.-I.

$$\begin{cases} \epsilon_r - \epsilon_\theta = \varphi (\sigma_r - \sigma_\theta) \\ \epsilon_\theta - \epsilon_z = \varphi (\sigma_\theta - \sigma_z) \\ \epsilon_z - \epsilon_r = \varphi (\sigma_z - \sigma_r) \end{cases}$$

P.-R.

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta = \dot{\lambda} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{2G} (\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta) \\ \dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z = \dot{\lambda} (\sigma_\theta - \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\dot{\sigma}_\theta - \dot{\sigma}_z) \\ \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r = \dot{\lambda} (\sigma_z - \sigma_r) + \frac{1}{2G} (\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_r) \end{cases}$$

Le definizioni delle funzioni e dei parametri presenti nelle equazioni sono le seguenti:

φ = funzione dell'evoluzione delle deformazioni plastiche, infatti è proporzionale all'intensità di deformazione [ZYCZKOWSKI 1981].

λ = moltiplicatore scalare, non negativo, che varia con i carichi. Si dimostra che $d\lambda$ è proporzionale all'incremento del lavoro dovuto alla deformazione plastica.

G = Trattasi di una delle tre costanti basilari della teoria dell'elasticità, legate fra loro dalla relazione:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

G è definito modulo di elasticità tangenziale;

E è il modulo di elasticità;

μ è il coefficiente di Poisson.

Per procedere con le trasformazioni e giungere ad un risultato che esprima σ_r come funzione esplicita, si dispone delle ulteriori equazioni valide sia in campo elastico, che plastico, che seguono:

$$\text{equazione di compatibilità: } \epsilon_r = \epsilon_\theta + r \frac{d\epsilon_\theta}{dr}$$

$$\text{equazione di equilibrio: } \sigma_\theta = \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr}$$

$$\text{criterio di resistenza: } \sigma_z = A\sigma_\theta$$

Poiché in ognuno dei due sistemi di equazioni sopra definite, siano esse quelle di H.-I. oppure quelle di P.-R., due sole equazioni sono utilizzabili per la ricerca di σ_r , in quanto la terza si ricava dalle altre due, conteggiando le incognite, risulta un deficit di una equazione.

Si ricorre pertanto alla:

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\Delta V}{V}, \text{ dove la funzione } \frac{\Delta V}{V}$$

rappresenta la variazione di volume di un elemento infinitesimo, intorno del punto con raggio «r», definita come la «deformazione di volume», valida per ogni stadio della deformazione.

Poiché la funzione $\frac{\Delta V}{V}$ non è nel nostro caso conoscibile, si adotta l'ipotesi semplificativa di ritenere il solido di sabbia incompressibile, pertanto si continua la trattazione utilizzando la:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

Si ricorda tuttavia che una simile condizione è valida solo per una sabbia con indice dei vuoti critico e che, qualora il solido di sabbia fosse stato non addensato e quindi con comportamento stabile, secondo il postulato di Drucker, la legge associativa [SALENÇON 1977] avrebbe evitato la limitazione qui introdotta.

Con le premesse di cui sopra, si ottiene:

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta = \frac{C}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ \varepsilon_r = -\frac{C}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ \varepsilon_z = \varepsilon \end{cases}$$

C essendo la costante d'integrazione.

$$\begin{cases} \varepsilon_r - \varepsilon_\theta = -\frac{2C}{r^2} \\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_z = \frac{C}{r^2} - \frac{3}{2}\varepsilon \\ \varepsilon_z - \varepsilon_r = \frac{C}{r^2} + \frac{3}{2}\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{2\dot{C}}{r^2} \\ \dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_z = \frac{\dot{C}}{r^2} - \frac{3}{2}\dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_r = \frac{\dot{C}}{r^2} + \frac{3}{2}\dot{\varepsilon} \end{cases}$$

Dalle equazioni di H.-I. si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{1}{\varphi(1-A)} \left(\frac{C}{r^2} - \frac{3}{2}\varepsilon \right) \\ \sigma_r = \frac{1}{\varphi(1-A)} \left[(2A-1) \frac{C}{r^2} - \frac{3}{2}\varepsilon \right] \\ \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2C}{r^3\varphi} \end{cases}$$

e quindi con le opportune trasformazioni, avendo ricavato C dalla condizione al contorno $\sigma_r = p_b$, per $r = b$, si ha:

$$C = -\frac{3}{2}\varepsilon \frac{1}{2A-1} \alpha$$

$$\varphi = \frac{3}{2}\varepsilon \frac{1}{p_a} \frac{1}{A-1} \frac{\left(1 + \frac{1}{a^2}\alpha\right)^{\frac{1-A}{1-2A}}}{\left(1 + \frac{1}{r^2}\alpha\right)^{\frac{A}{1-2A}}}$$

$$\sigma_r = \frac{\left(1 + \frac{1}{r^2}\alpha\right)^{\frac{A-1}{2A-1}}}{\left(1 + \frac{1}{a^2}\alpha\right)^{\frac{A-1}{2A-1}}} p_a$$

$$\text{con } \alpha = \frac{1 - \left(\frac{p_b}{p_a}\right)^{\frac{2A-1}{A-1}}}{\frac{1}{a^2} \left(\frac{p_b}{p_a}\right)^{\frac{2A-1}{A-1}} - \frac{1}{b^2}}$$

La tensione tangenziale σ_θ si ricava facilmente tramite l'equazione di equilibrio e la derivazione di σ_r rispetto ad r. Si ottiene ugual risultato con procedimento più laborioso tramite la funzione $\frac{C}{\varphi}$.

Pertanto si ha:

$$\sigma_\theta = \sigma_r - \frac{2}{r^2} \frac{A-1}{2A-1} \alpha \frac{\left(1 + \frac{1}{r^2}\alpha\right)^{\frac{A}{1-2A}}}{\left(1 + \frac{1}{a^2}\alpha\right)^{\frac{A-1}{2A-1}}} p_a$$

Per restare nel campo dei numeri reali dovrà essere

◁

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{p_b}{p_a}\right)^{\frac{2A-1}{A-1}} - \frac{1}{b^2} > 0 \text{ da cui:}$$

$$\frac{p_b}{p_a} > \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2A-2}{2A-1}}$$

Per $\frac{p_b}{p_a} = 1$ si avrà $\sigma_\theta = \sigma_r$.

Da quanto sopra risulta:

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ C < 0 \\ \varphi > 0 \end{cases}$$

rimane pertanto confermato che $\frac{d\sigma_r}{dr}$ è funzione decrescente, inoltre si dimostra che per $\alpha > 0$ è $\sigma_\theta \neq 0$, per qualsiasi valore di r .

Nel caso delle equazioni di P.-R. le elaborazioni che ne seguono, con l'ausilio del criterio di resistenza, avendo integrato con costante di integrazione nulla, conducono a:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_r (1-A)} \left[(2A-1) \frac{C}{r^2} - \frac{3}{2} \varepsilon \right] - \frac{1}{2G}$$

e cioè

$$\lambda = \varphi - \frac{1}{2G} \text{ come previsto.}$$

Qualora esista un vincolo rigido alla espansione verso l'esterno della parete cilindrica del solido torico e si voglia ricavare la pressione p_b al contorno, indotta dalla pressione interna p_a e dalla spinta assiale σ_z , il procedimento sarà il seguente.

Dalla equazione

$$\varepsilon_z - \varepsilon_r = \varepsilon + \frac{C}{r^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

per $r=b$ è $\varepsilon_r=0$, per cui si ottiene:

$$\varepsilon_z = \varepsilon + \frac{C}{b^2} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ma } \varepsilon_z = \varepsilon \text{ e pertanto è:}$$

$$\frac{C}{b^2} + \frac{1}{2} \varepsilon = 0$$

Si riprende l'espressione di C ,

$$C = -\frac{3}{2} \varepsilon \frac{1}{2A-1} \frac{1 - \left(\frac{p_b}{p_a}\right)^{\frac{2A-1}{A-1}}}{\frac{1}{a^2} \left(\frac{p_b}{p_a}\right)^{\frac{2A-1}{A-1}} - \frac{1}{b^2}}$$

e la si sostituisce nella espressione precedente; semplificando con la eliminazione di ε , si ottiene:

$$p_b = \left[\frac{\frac{1}{3} (2A-1) + 1}{\frac{1}{3} (2A-1) \frac{b^2}{a^2} + 1} \right]^{\frac{A-1}{2A-1}} p_a$$

3. Conclusioni

Con la presente memoria si è dimostrato che in un campione torico di sabbia densa ed asciutta, soggetto ad una prova di compressione triassiale in apposito apparecchio che permetta di ottenere uno stato tensionale tridimensionale con la tensione di compressione radiale diversa da quella tangenziale, la distribuzione delle tensioni principali è di tipo non lineare nelle sezioni ortogonali all'asse longitudinale di simmetria.

Queste tensioni dipendono:

- dai raggi delle superfici cilindriche, interna ed esterna, del campione;
- dalla distanza « r » fra il punto, del quale si vuol definire lo stato tensionale, e l'asse longitudinale di simmetria;
- dalle pressioni agenti sulle superfici cilindriche, interna ed esterna;
- dall'angolo di attrito della sabbia.

Il risultato di cui sopra si è ottenuto supponendo incompressibile il campione.

BIBLIOGRAFIA

- HILL R. (1950) - *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, Londra.
 SALENÇON J. (1977) - *Applications of the theory of plasticity in soil mechanics*. John Wiley and Sons., Inc., New York.
 ZYCZKOWSKI (1981) - *Combined loadings in the theory of plasticity*. Polish Scientific Publishers, Varsavia.

SUMMARY

Plastic state of stress in a toric-shaped solid consisting of sand. Stress distribution

Through the equation of Hencky-Ilyushin the paper shows a procedure to achieve the distribution, in a plastic state of stress, of the radial and tangential stresses in a toric-shaped solid, which is supposed to be stressed as follows: on the inner surface by a pressure p_a , on the outer surface by a pressure p_b , with $p_b < p_a$, and on its bases by a compression σ_z .

Mohr-Coulomb has been selected as the yield condition, because the solid is made of dry, dense and cohesionless sand.

While developing the matter, it has been shown that the results originating from the Hencky-Ilyushin equations are identical to the ones from the Prandtl-Reuss equations. As last topic, it has been examined the case when the solid is prevented from expanding outwards by a rigid bound on its outer cylindrical surface and moreover it has been obtained the p_b pressure induced on the bound by p_a and σ_z .