

Instabilità elastica dei pali di fondazione in terreni stratificati

L. FENU* - M. SERRA**

SOMMARIO: La verifica dei pali di fondazione rispetto all'instabilità dell'equilibrio, è solitamente trascurata nella pratica, ma, nel caso di pali con piccolo momento di inerzia parzialmente immersi, o immersi in terreni molli, o addirittura che attraversano cavità, si rende necessaria. D'altra parte i pali sono spesso immersi in terreni stratificati: dunque è utile un metodo di analisi dell'instabilità elastica dei pali in questa situazione. Nel caso di pali immersi in terreni alla Winkler comunque stratificato alle estremità sottoposti a un carico assiale P , la soluzione qui proposta, di tipo variazionale, è rigorosa; ne deriva un metodo di calcolo che consente di verificare l'instabilità elastica dei pali nei terreni comunque stratificati e che, però consente anche di tenere opportunamente in conto i vincoli d'estremità compreso, per esempio, il vincolo della fondazione soprastante. Il metodo è applicabile con qualsiasi andamento della rigidezza del terreno in ciascuno strato e , quindi, anche nel caso particolare dei pali parzialmente immersi. Sono riportati degli esempi in cui è evidenziata l'utilità del metodo proposto.

1. Introduzione

L'instabilità elastica dei pali di fondazione non è un problema che si ponga molto frequentemente.

Peraltro, per pali lunghi con piccolo momento di inerzia immersi, o parzialmente immersi, in terreni molli o, peggio, con cavità, la condizione di instabilità elastica può essere significativa; d'altra parte il problema è reso attuale, fra l'altro, dal crescente impiego dei micropali.

I contributi apportati allo studio del problema hanno prevalentemente utilizzato, come modello del terreno, il mezzo di Winkler; un approccio ormai classico è quello variazionale [TIMOSHENKO, 1936] per un'asta incernierata alle estremità e immersa in uno strato di terreno alla Winkler con modulo di reazione costante.

Dopo la prima soluzione ottenuta per un palo immerso in uno strato di terreno modellato come un mezzo elastico ideale al di sopra di una base rigida [MADHAV, DAVIS, 1974], con crescente diffuso sono state proposte soluzioni che utilizzano la teoria del continuo elastico. È stato mostrato, comunque, che le soluzioni ottenute modellando il terreno come un continuo elastico e quelle ottenute ricorrendo ad un mezzo di Winkler, danno risultati assai simili [POULOS, DAVIS, 1980].

Per quanto riguarda il mezzo alla Winkler, sono state proposte soluzioni sia per pali totalmente immersi che per pali parzialmente immersi, con modulo di reazione laterale K_h [FL^{-3}] costante [TIMOSHENKO, 1936; DAVISSON, ROBINSON, 1965] e linearmente variabile [DAVISSON, 1963; DAVISSON, ROBINSON, 1965].

Per un terreno coesivo sovraconsolidato, K_h può essere considerato costante e correlato con la coesione non drenata c_u [TERZAGHI, 1955; DAVISSON, 1970] dalla relazione:

$$K_h = \frac{64c_u}{d} \quad (1)$$

in cui d è il diametro del palo.

Per un terreno coesivo molle, invece, la variazione di K_h con la profondità deve essere messa in conto; in tal caso, se z è la profondità dello strato, si può usare la seguente espressione di K_h :

$$K_h = n_h \frac{z}{d} \quad (2)$$

Anche per terreni non coesivi K_h varia con la profondità e , dunque, può essere espresso dalla (1); in questo caso si può porre [TERZAGHI, 1955]:

$$n_h = 256.62A\gamma \quad [kN/m^3]$$

dove A è un fattore che dipende dalla densità relativa del terreno e γ è il peso dell'unità di volume; per terreno immerso in falda, come è ovvio, si adatterà per γ il peso dell'unità di volume del terreno immerso. Nelle tabb. 1 e 2 sono riportati alcuni valori di n_h rispettivamente per terreni coesivi e non coesivi.

Più complesso è il caso dei terreni stratificati. Non si conoscono soluzioni per terreni comunque stratificati, se non di tipo numerico: è stato utilizzato il metodo delle differenze finite [GATTI, MANCA, 1985] e il problema può essere affrontato col metodo degli elementi finiti.

Soluzioni non numeriche sono state proposte per un terreno a due strati [MAZINDRANI, SASTRY, 1972], mentre più recentemente è stato proposto un approccio di tipo approssimato [VEZOLE, 1989].

* Dott. Ing. Luigi FENU, Tecnico Laureato, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università di Cagliari.

** Dott. Ing. Mauro SERRA, Tecnico Laureato, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università di Cagliari.

Tab.1: valori di n_h per terreni coesivi

Tipo di terreno	n_h [MN/m ³]	Fonte
Argilla molle NC	0.15 - 3.5	Reese e Matlock Davisson e Prakash
Argilla organica NC	0.1 - 0.3 0.1 - 0.8	Peck e Davisson Davisson
Torba	0.05 0.03 - 0.1	Davisson Wilson e Hits
Loess	8 - 11	Bowles

da POULOS E DAVIS [1980]

Tab.2: valori di n_h [MN/m³] e A per sabbie

Densità relativa	Sciolta	Media	Densa
Intervallo valori di A	100-300	300-1000	1000-2000
Valori medi di A	200	650	1500
n_h sabbia secca o umida	2	6	15
n_h sabbia satura	1	4	9

da POULOS E DAVIS [1980]

In questo lavoro viene affrontato con un metodo di tipo variazionale diretto il problema dell'instabilità elastica dei pali verticali immersi in un terreno comunque stratificato, modellato come un mezzo alla Winkler.

Se x è l'ascissa lungo il palo con origine sul suo estremo superiore, il modulo di reazione laterale, quantomeno al variare degli strati, varia lungo il palo; si ha quindi $K_h = K_h(x)$ o anche, considerando un palo di sezione costante e moltiplicando per d ,

$$K(x) = K_h(x) \cdot d$$

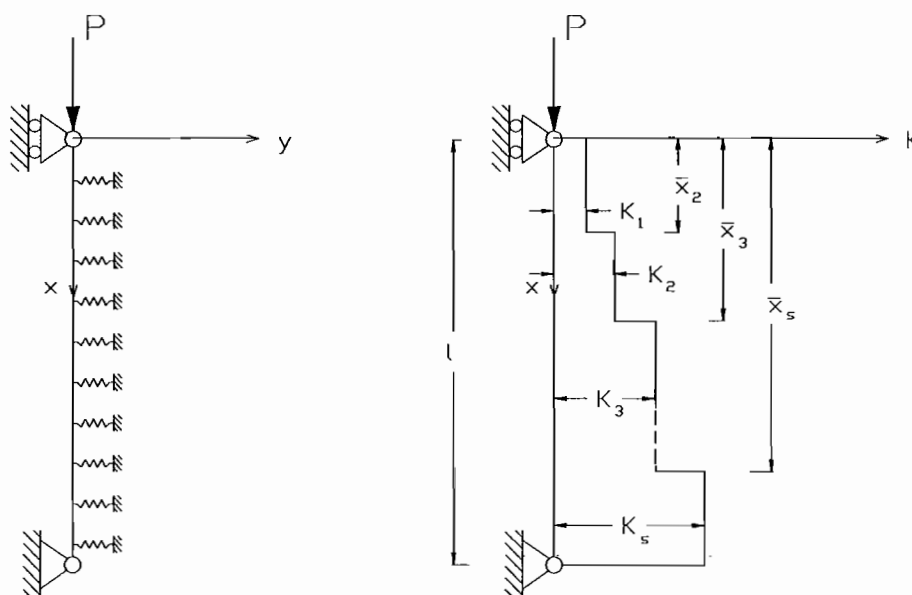


Fig. 1. - Modello dell'asta e del terreno con s strati di differente rigidezza.

In questo scritto viene considerato il caso in cui la funzione $K(x)$ è del tipo a gradini: la funzione a gradini è poi sviluppata in serie di Fourier che, essendo rispettate le condizioni di Dirichlet, converge, all'aumentare del numero dei termini della serie, alla funzione $K(x)$ in tutti i suoi punti di continuità.

Variando opportunamente i coefficienti della serie di Fourier, il metodo qui presentato sarebbe in grado di rappresentare distribuzioni qualsiasi di $K(x)$.

Utilizzando la funzione a gradini, però, possono essere trattati rigorosamente tutti i casi in cui K sia costante in ciascuno strato, o, comunque, la sua variazione sia trascurabile; nel caso in cui questa variazione non sia trascurabile, la funzione K può essere approssimata da una successione di gradini fitta quanto necessario.

2. Il modello dell'asta e del terreno a strati

Si consideri un'asta di sezione costante con un modulo elastico E e momento di inerzia minimo della sezione normale J , lunga l , soggetta a carico di punta, incernierata alle estremità e confinata lateralmente da un terreno alla Winkler di rigidezza variabile $K = K(x)$ (fig. 1).

Applicando il criterio energetico, l'energia U_1 immagazzinata dall'asta sommata all'energia U_2 immagazzinata dal terreno è uguale alla variazione di energia potenziale U_3 del carico P , cioè:

$$U_1 + U_2 = U_3 \quad (3)$$

L'energia potenziale immagazzinata dall'asta è:

$$U_1 = \int_0^l \frac{EJ}{2} y''^2 dx \quad (4)$$

quella immagazzinata dal terreno:

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 K(x)y^2 dx \quad (5)$$

mentre la variazione di energia potenziale del carico P è:

$$U_3 = \frac{P}{2} \int_0^1 y'^2 dx \quad (6)$$

Sostituendo nella (3) ed esplicitando rispetto a P si ha:

$$P = \frac{\int_0^1 \frac{EJ}{2} y''^2 dx + \int_0^1 K(x)y^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^1 y'^2 dx} \quad (7)$$

Il carico critico P_{cr} si ottiene sostituendo ad y la funzione della deformata $y = y(x)$ che realizza il minimo per P , cioè:

$$P_{cr} = \min(P)$$

Per trovare la y che realizza il $\min(P) = P_{cr}$ è conveniente sviluppare sia y che K in serie di Fourier. Periodicizzando y e K considerate come funzioni dispari di periodo $2l$ nell'intervallo $(-l, l)$, si ottengono gli sviluppi in serie di soli seni:

$$y(x) = \sum_{k=1}^m a_k \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k}{l} x \right) \quad (8)$$

$$K(x) = \sum_{i=1}^n b_i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi i}{l} x \right) \quad (9)$$

I coefficienti b_i che compaiono nella (9) dipendono dalla distribuzione della funzione $K(x)$ lungo il palo. In questo scritto si considera il terreno composto da strati con rigidità costante all'interno di ciascuno strato. In tal caso la seguente formula

$$b_i l = \int_{-l}^l K(x) \operatorname{sen} \left(\frac{i\pi}{l} x \right) dx$$

che consentono di determinare il generico coefficiente b_i dello sviluppo in serie di Fourier della rigidità $K(x)$ del terreno diventa, dopo alcuni passaggi:

$$b_i = \frac{2}{i\pi} \sum_{r=1}^s \left[\cos \left(\frac{i\pi}{l} \bar{x}_r \right) - \cos \left(\frac{i\pi}{l} \bar{x}_{r+1} \right) \right]$$

dove \bar{x}_r è l'ascissa iniziale dello strato r -esimo.

3. L'espressione di P in base al modello dell'asta e del terreno

Sostituendo la (8) e la (9) nelle (4) (5) e (6), l'energia potenziale flessionale immagazzinata dall'asta, quella immagazzinata dal terreno e la variazione di energia potenziale della forza P, diventano rispettivamente:

$$U_1 = \frac{EJ}{2} \int_0^1 \left(\sum_k a_k \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k}{l} x \right) \right)^2 \frac{\pi^4 k^4}{l^4} dx$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sum_i b_i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi i}{l} x \right) \right) \left(\sum_k a_k \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k}{l} x \right) \right)^2 dx$$

$$U_3 = \frac{P}{2} \int_0^1 \left(\sum_k a_k \cos \left(\frac{\pi k}{l} x \right) \right)^2 \frac{\pi^2 k^2}{l^2} dx$$

Sviluppando gli integrali relativi a U_1 e U_3 si ottiene:

$$U_1 = \frac{EJ}{4l^3} \pi^4 \sum_k a_k^2 k^4$$

$$U_3 = \frac{\pi^2}{4l} \sum_k a_k^2 k^2$$

Per l'energia potenziale U_2 immagazzinata dal terreno, invece, si osservi, sviluppando la funzione integranda, che il generico termine è nella forma:

$$b_i a_j a_k \operatorname{sen} \left(\frac{i\pi}{l} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{j\pi}{l} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{l} x \right)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ $n =$ numero dei termini dello sviluppo in serie di Fourier della rigidità del terreno

$j, k = 1, 2, \dots, m$ $m =$ numero dei terreni dello sviluppo in serie di Fourier della deformata dell'asta

Da note formule di trigonometria si ha:

$$\operatorname{sen} \left(\frac{i\pi}{l} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{j\pi}{l} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{l} x \right) = \frac{1}{4} \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{l} x(i+j-k) \right] + \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{l} x(j+k-i) \right] + \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{l} x(k+i-j) \right] + \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{l} x(i+j+k) \right] \right\}$$

Posto:

$$S_1 = i+j-k; \quad S_2 = j+k-i; \quad S_3 = k+i-j; \quad S_4 = i+j+k$$

si ottiene:

$$U_2 = \frac{1}{8} \sum_i \sum_j \sum_k \int_0^1 b_i a_j a_k \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{l} x S_1 \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{l} x S_2 \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{l} x S_3 \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{l} x S_4 \right) \right] dx$$

Integrando:

$$U_2 = \frac{1}{8\pi} \sum_j \sum_k a_j a_k \sum_i b_i \left[\frac{1 - \cos(S_1)}{S_1} + \frac{1 - \cos(S_2)}{S_2} + \frac{1 - \cos(S_3)}{S_3} - \frac{1 - \cos(S_4)}{S_4} \right]$$

e ponendo:

$$\Phi_{ijk} = \left[\frac{1 - \cos(S_1)}{S_1} + \frac{1 - \cos(S_2)}{S_2} + \frac{1 - \cos(S_3)}{S_3} - \frac{1 - \cos(S_4)}{S_4} \right]$$

dove $\Phi_{ijk} = \Phi_{ikj}$

Si ha infine:

$$U_2 = \frac{1}{8\pi} \left[\sum_j \sum_k a_j a_k \left(\sum_i b_i \Phi_{ijk} \right) \right]$$

L'espressione del carico P diventa allora:

$$P = \frac{\frac{EJ}{l^3} \pi^4 \sum_k a_k^2 k^4 + \frac{1}{8\pi} \left[\sum_j \sum_k a_j a_k \left(\sum_i b_i \Phi_{ijk} \right) \right]}{\frac{\pi^2}{l} \sum_k a_k^2 k^2} \quad (10)$$

4: Condizioni minimo per P

La (10) mostra sinteticamente che, definite le caratteristiche geometriche e meccaniche del terreno e dell'asta, il carico P varia al variare dei coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m$ che definiscono la deformata elastica dell'asta.

Per ottenere il carico critico P_{cr} e i valori dei coefficienti a_k relativi alla configurazione deformata dell'asta, occorre imporre la condizione di stazionarietà per $P = P(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m)$, cioè:

$$\frac{\partial P}{\partial a_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

Ricordando che P è un rapporto, detto N il suo numeratore e D il denominatore, si ha $P = N/D$ e la sua derivata uguagliata a zero dà:

$$N' - P_{cr} D' = 0$$

La (11) può quindi scriversi:

$$\frac{\partial N}{\partial a_k} - P_{cr} \frac{\partial D}{\partial a_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Sviluppando si ha:

$$a_1 \frac{l^2}{2\pi^3 k^2} \left(\sum_i b_i \Phi_{i1k} \right) + \dots + a_k \left[\frac{l^2}{2\pi^3 k^2} \left(\sum_i b_i \Phi_{ik} \right) + \frac{E l \pi^2 k^2}{l^2} - P_{cr} \right] + \dots + a_m \frac{l^2}{2\pi^3 k^2} \left(\sum_i b_i \Phi_{imk} \right) = 0 \quad (12)$$

$k = 1, 2, \dots, m$

Il sistema (12) è un sistema lineare omogeneo di m equazioni in m incognite $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m$ che ammette senz'altro la soluzione banale:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = \dots = a_m = 0$$

corrispondente alla configurazione indeformata dell'asta e che, in questo contesto, non è di interesse. Esistono poi soluzioni diverse da quella banale in cui il determinante della matrice dei coefficienti di $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m$ è uguale a zero; ciò avviene per quei valori di P che sono gli autovalori dei sistemi e le cui soluzioni corrispondenti $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m$ sono i relativi autovalori. Tra tutti gli autovalori del sistema, quello di interesse è il più piccolo positivo.

Il procedimento di calcolo è il seguente: si fissa dapprima il numero delle equazioni o, che è lo stesso, dei coefficienti a_k , cioè il numero n dei termini dello sviluppo in serie di Fourier di $y(x)$. Si trovano poi gli autovalori del sistema e, tra questi, si sceglie quello positivo più piccolo; l'autovettore corrispondente dà i valori dei coefficienti a_k per determinare la deformata del palo. Il valore di P_{cr} così ottenuto è sempre approssimato per eccesso. Si aumenta poi di una unità il numero dei coefficienti a_k e si ripete il procedimento. Si ha così una successione di carichi critici in funzione di m convergente al valore corretto (fig. 2). Il calcolo si fermerà quando la differenza tra due carichi critici contigui sarà sufficientemente piccola. È anche possibile che, per particolari distribuzioni della funzione $K(x)$, si ottenga la soluzione

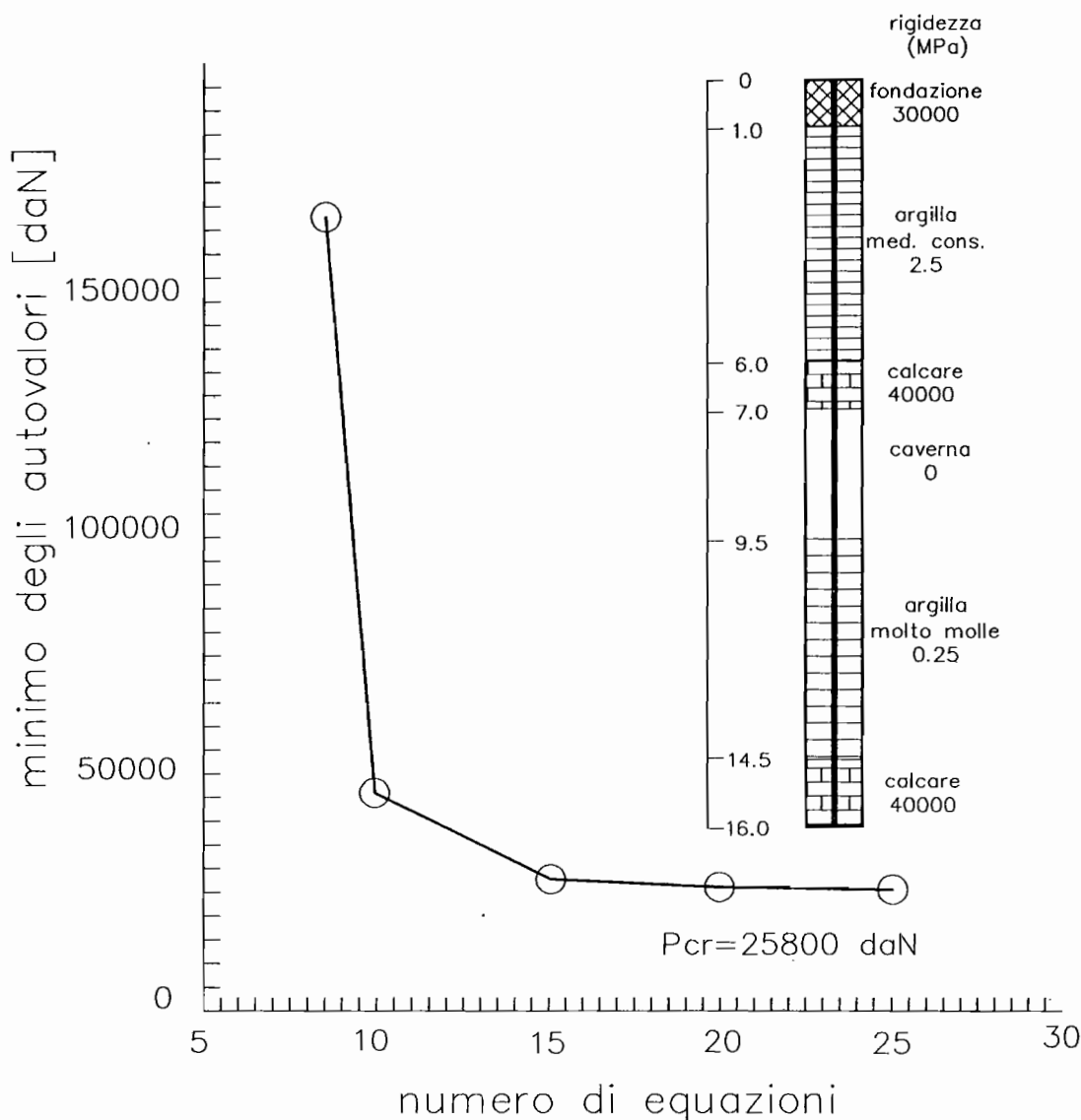


Fig. 2. - Esempio di convergenza al carico critico del minimo degli autovalori all'aumentare del numero delle equazione.

esatta con numero finito di a_k . Solo per valori di P_{cr} sufficientemente approssimati si ottengono dei valori a_k tali da avere una deformata attendibile.

5. Alcuni esempi di applicazione del metodo

Per verificare le soluzioni ottenute, si sono innanzitutto confrontati i risultati avuti con questo metodo con quelli che GATTI e MANCA [1985] hanno ottenuto col metodo delle differenze finite in terreni a tre strati con asta immersa incernierata alle estremità (fig. 3). Si è potuto notare che, nei casi in questione, il fatto che questo metodo, contrariamente alla soluzione di Gatti e Manca, non tenga conto dell'adesione fra il palo e il terreno, non ha dato differenze significative del carico critico. Si è invece visto che, per ottenere lo stesso risultato, sono state necessarie non più di dieci equazioni laddove, col metodo delle differenze finite, è stato necessario sud-

dividere il palo in 100 conci e, comunque, per ottenere risultati sufficientemente precisi, si dovevano utilizzare non meno di 60 conci.

In generale sembrerebbe che ciò che più influenza l'instabilità elastica dei pali di fondazione sia la distanza fra i due strati sufficientemente rigidi più vicini, la rigidezza degli strati meno rigidi fra essi interposti nonché il vincolo determinato dalla rigidezza dello strato d'estremità intorno al palo. Sicura fonte di pericolo per l'instabilità elastica sono le caverne e gli strati di spessore elevato di terreni con consistenza molto bassa, quali ad esempio torbe o argille molli, specie se in prossimità di vincoli d'estremità liberi di ruotare; particolarmente critico può essere, naturalmente, il caso dei pali parzialmente immersi.

Questo metodo è comunque in grado di investigare il caso di pali immersi, anche parzialmente, in terreni comunque stratificati con qualsiasi distribuzione di rigidezza di ciascuno strato; si presta quindi, tra l'altro, a studiare i casi dubbi di situazioni inter-

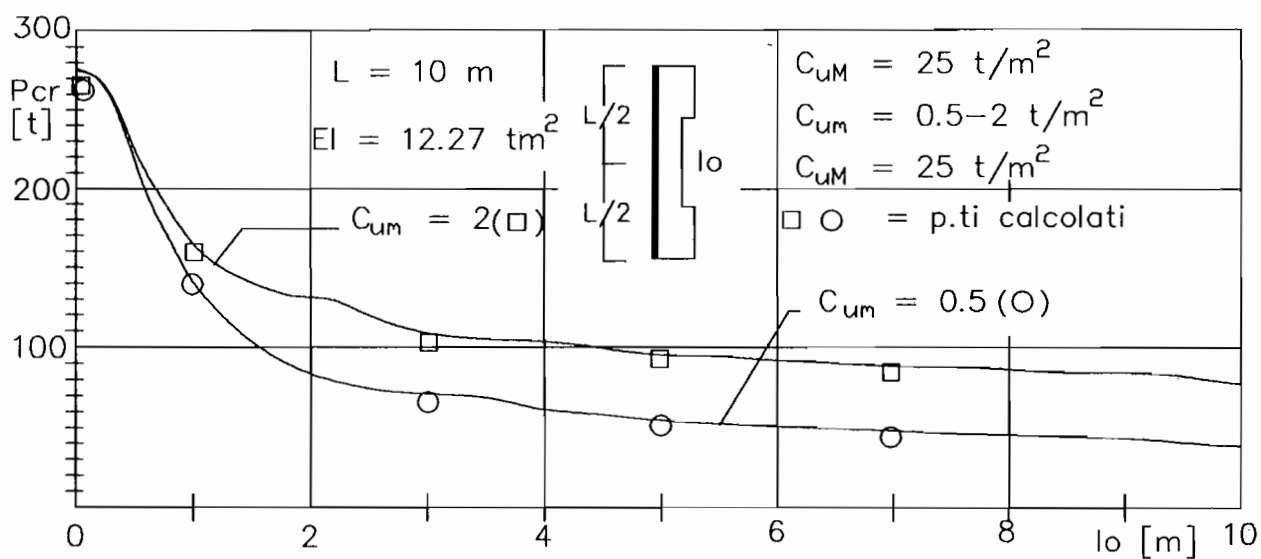
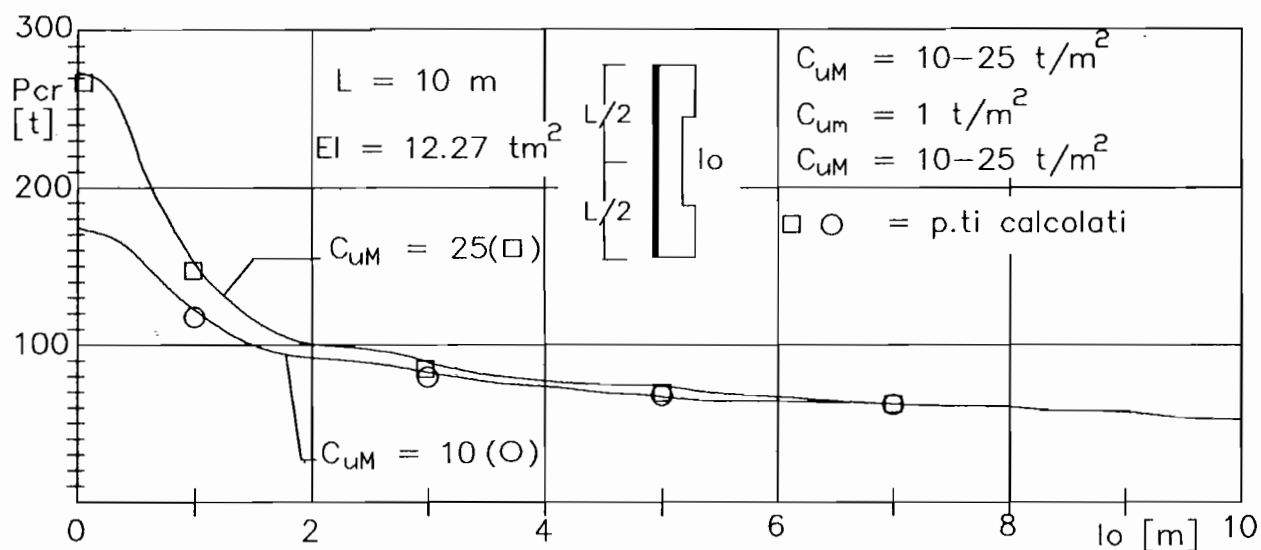
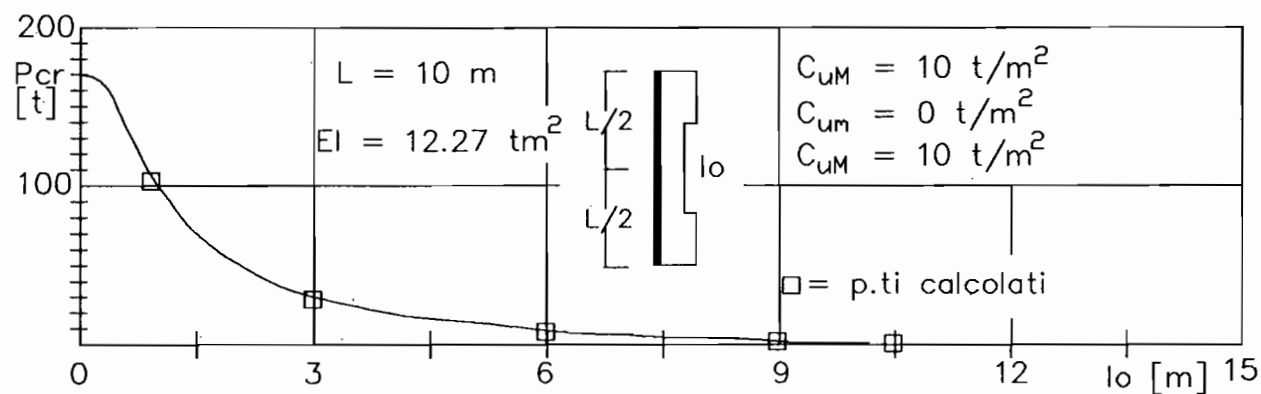


Fig. 3. - Esempio di confronto fra il metodo proposto e il metodo alle differenze finite. Elaborazione da GATTI e MANCA (1985).

medie in cui non è chiaro quali strati rigidi abbiano la maggior influenza o se sia lecito, con metodo approssimato, mediare le rigidzze di differenti strati interposti. Inoltre il metodo ben simula i possibili gradi di vincolo alle estremità.

Si consideri, per esempio, un palo di diametro 100 mm con armatura in tubo d'acciaio tale da determinare un carico ammissibile del palo $P_{amm} = 16000$ daN e un carico limite $P_{lim} = 24000$ daN. Si suppone una rigidzza del palo $EJ = 10000$ daN·m², compatibile con le sopradette caratteristiche dimensionali e di resistenza.

Si noti come il carico dipenda dagli strati meno rigidi interposti fra strati di rigidzza assai maggiore (figg. 4a e 4b). Il palo parzialmente immerso di fig. 4a deve il suo carico critico alla stratigrafia al di sopra dello strato di calcare intermedio, mentre il palo di fig. 4b ha un carico critico più elevato ma

dovuto interamente alla stratigrafia al di sotto del suddetto strato di calcare. In fig. 4c è mostrata l'elevata rotazione dell'estremità inferiore di un palo, che, sottoposto a carico critico, raggiunga uno strato di roccia di elevata portanza senza attraversarla; si noti che, addirittura, $P_{cr} < P_{amm}$. Se invece il palo è ancorato in detta roccia perché vi è infisso, per esempio, per 1.5 m (fig. 4b), allora, avendo la roccia un'elevata rigidzza che, in questo caso, in mancanza di dati specifici, si è stimata estrapolandola dai risultati di prove di piastra in superficie e sulla base del modulo elastico della roccia, il carico critico diventa più che doppio superando il carico limite e, dunque, facendo diventare meno pericolosa la condizione di instabilità elastica rispetto alla condizione di carico limite del palo; si noti che, però per le elevate rigidzze delle rocce, che si confrontano con quelle, assai minori, degli strati di terreno sciolto,

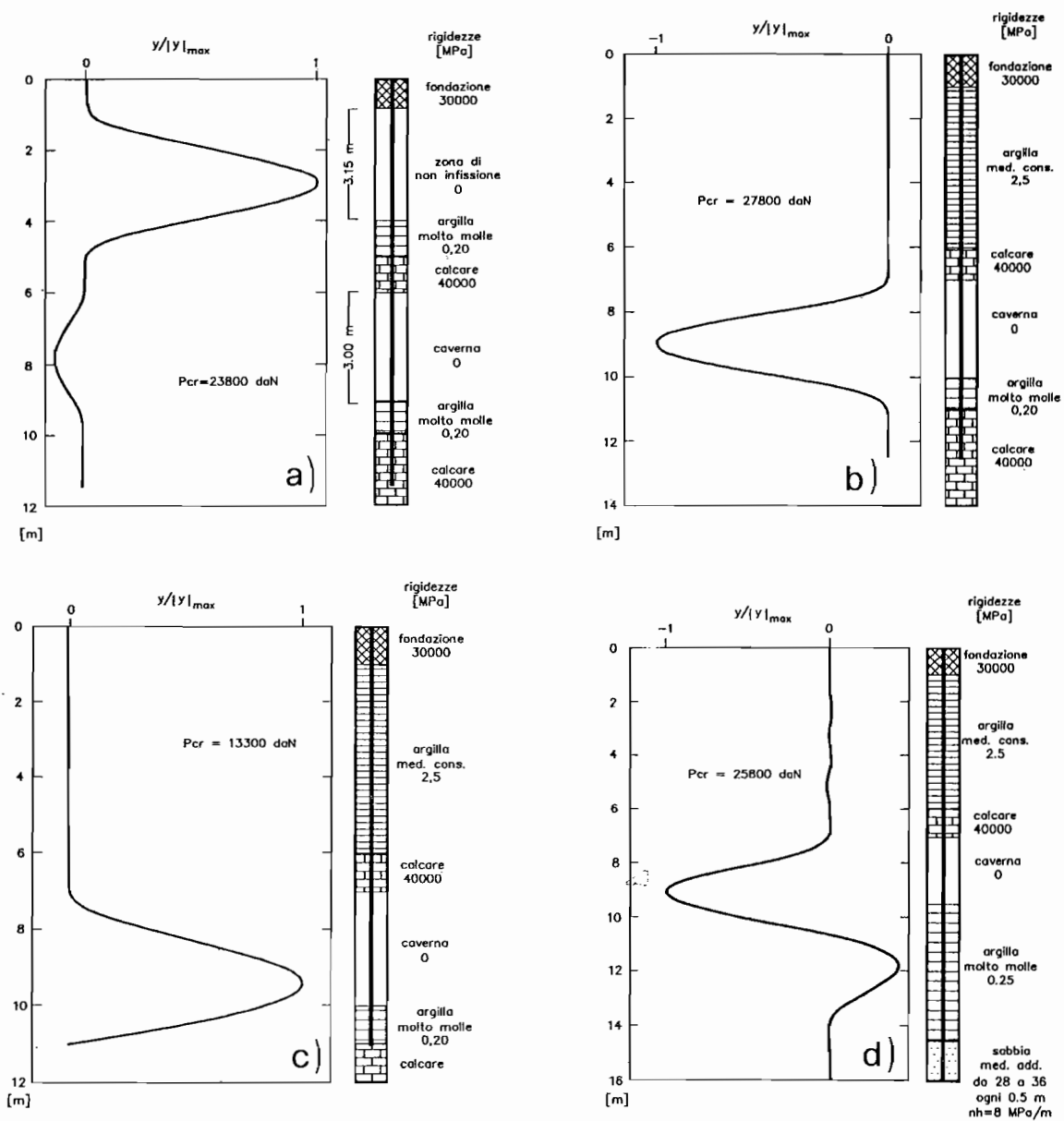


Fig. 4a-d. - Esempi di deformate di pali sottoposti a carico critico.

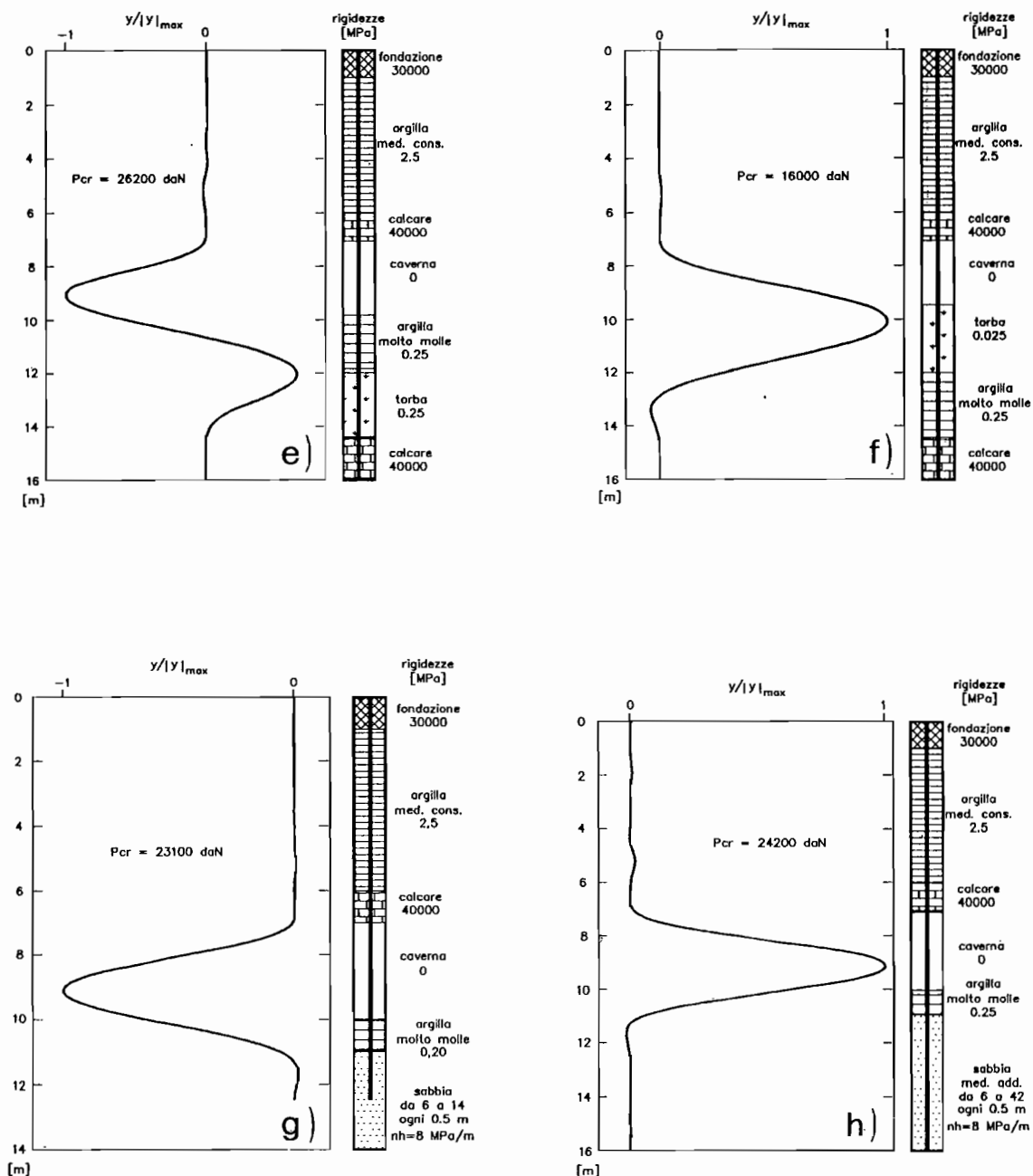


Fig. 4e-b. - Esempi di deformate di pali sottoposti a carico critico.

il carico critico e le deformate non vengono influenzate da errori nella valutazione della rigidità della roccia che quantomeno non ne alterino l'ordine di grandezza. All'estremità superiore, per simulare il vincolo dovuto all'attraversamento di una fondazione, per esempio una fondazione rigida in cemento armato, si è stimata una rigidità dell'ordine di grandezza di quella di una roccia.

Inoltre, fra due strati rigidi, non sempre è facile valutare il carico critico; esso varia notevolmente con il differente ordine con cui si susseguono i vari strati di terreno – è il caso della torba e dell'argilla molto molle delle figg. 4e e 4f – oppure con il differente vincolo alle estremità. Per esempio, all'estremità inferiore, il suddetto ancoraggio di 1.5 m nella roccia

(fig. 4b) fa assumere al carico critico un valore di oltre il 5% superiore rispetto a quello di 24200 daN che si ha se, in estremo, il palo è infisso per 5 m in una sabbia mediante addensata (fig. 4h); riducendo, con la stessa stratigrafia, l'infissione nella sabbia a soli 1.5 m (fig. 4g), il carico critico si riduce ulteriormente a $P_{cr} = 23100 \text{ daN} < P_{lim}$ raggiungendo un valore per cui la condizione più pericolosa diventa quella di instabilità elastica. Si è anche visto che se la sabbia fosse molto addensata, le variazioni di P_{cr} sarebbero trascurabili.

Si noti, poi, che se al di sopra dello strato di sabbia in estremo in cui il palo è infisso per 1.5 m vi è uno strato abbastanza spesso di argilla con caratteristiche di rigidità anche molto scadenti, il carico

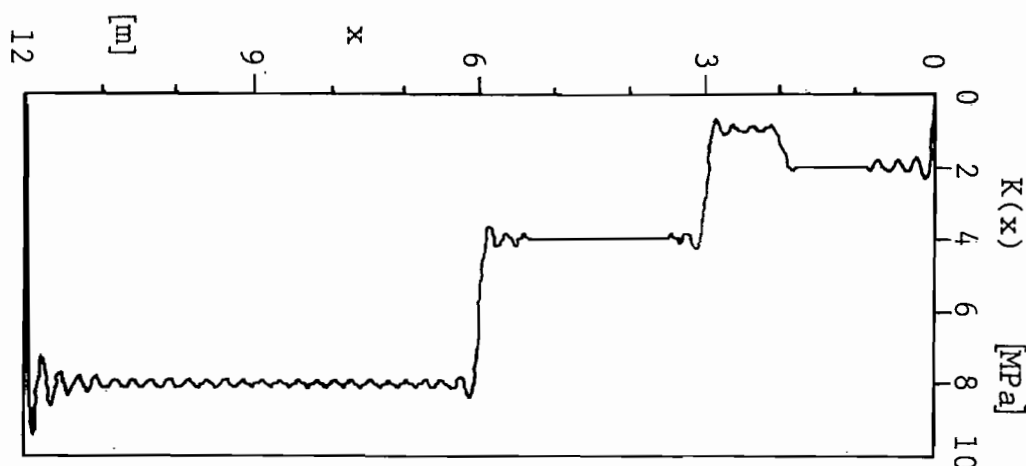


Fig. 5. - Sviluppo in serie di Fourier con 100 termini della funzione $K(x)$ di un terreno con 4 strati.

critico è lo stesso che si ha quando, con la stessa stratigrafia, il palo è infisso per 1.5 m nella roccia invece che nella sabbia (figg. 2 e 4d).

Infine, per quanto riguarda la convergenza del metodo, in fig. 2 è mostrato come, all'aumentare del numero di equazioni o, che è lo stesso, all'aumentare del numero di termini della serie di Fourier che descrive la deformata del palo, si raggiunga rapidamente il reale carico critico del palo. Si è invece notato che il numero di termini della serie di Fourier che descrive le rigidezze degli strati è meno influente; una descrizione molto buona la si ha con 100 termini (fig. 5) ma, prescindendo dall'apparenza grafica, con 50 termini si sono avuti praticamente gli stessi risultati numerici.

6. Conclusioni

In questo scritto viene mostrato un metodo di calcolo del carico critico dei pali, anche parzialmente immersi, in terreni comunque stratificati e con distribuzione qualsiasi delle rigidezze del terreno nel singolo strato.

La soluzione variazionale qui proposta al problema dell'instabilità elastica dei pali in terreni alla Winkler comunque stratificati senza adesione fra terreno e palo e con cerniere alle estremità, è esatta per infiniti termini - e talvolta per un numero finito - delle serie di Fourier che descrivono le deformate del palo e la distribuzione delle rigidezze del terreno.

Si è visto, però, che per terreni con tre strati, nei numerosi casi esaminati, una ottima convergenza è stata raggiunta con soli dieci termini della serie che descrive la deformata del terreno e, dunque, con sole dieci equazioni del sistema risolutivo con conseguente risparmio di elaborazione rispetto all'utilizzazione di metodi numerici.

Il numero di termini della serie di Fourier che descrive le rigidezze degli strati s'è mostrato, invece, meno influente.

In questo scritto si sono considerate le rigidezze nei singoli strati costanti, ma il metodo, cambiando opportunamente i coefficienti della serie delle rigidezze, consente di trattare rigorosamente anche i casi di qualsiasi variazione lungo lo strato.

Inoltre si possono simulare i vincoli d'estremità dando un opportuno valore alle rigidezze relative al primo e all'ultimo strato, per esempio anche alla parte di fondazione attraversata e alla roccia in cui, in profondità, il palo è infisso.

BIBLIOGRAFIA

- DAVISSON M.T. (1963) - *Estimating buckling loads for piles*. Proc. 2nd Pan-Amer Conf. on S.M. & F.E., Brazil, vol. 1, pp. 351-371.
- DAVISSON M.T. (1970) - *Lateral load capacity of piles*. High Res. Rec., No. 333: 104-112.
- DAVISSON M.T., ROBINSON K.E. (1965) - *Bending and buckling of partially embedded piles*. Proc. 6th Int. Conf. S.M. & F.E., vol. 2, pp. 253-246.
- GATTI G., MANCA P. (1985) - *Carico critico di pali in terreni stratificati*. Riunione annuale Gruppo Naz. Coord. Studi Ing. Geotec. del C.N.R., Attività di ricerca 1984-85.
- MADHAV M.R., DAVIS E.H. (1974) - *Buckling of finite beams in elastic continuum*. Jnl. Eng. Mechs. Div. ASCE, vol. 100, no. EM6, pp. 1227-1236.
- MAZINDRANI Z.H., SASTRY V.V. (1972) - *Buckling resistance of piles in layered clays*. Ind. Geotech. Jnl., vol. 1, pp.232-240.
- POULOS H.G., DAVIS E.H. (1980) - *Pile foundation analysis and design*. John Wiley & Sons, New York.
- TERZAGHI K. (1955) - *Evaluation of coefficients of subgrade reaction*. Geotechnique vol. 5, pp. 207-326.
- TIMOSHENKO P.S. (1936) - *Theory of elastic stability*. Mc.Graw Hill, New York.

SUMMARY

Elastic instability of piles in stratified soils

The elastic buckling of the foundation piles is usually neglected in engineering practice; it is, however, becoming increasingly important due to the widespread use of micropiles.

The elastic buckling of slender piles surrounded by soft soils is actually possible.

A variational solution of the problem in layered soils, modelled as Winkler soils is presented in this paper.

Any distribution of the coefficient of horizontal subgrade reaction K_h may be considered in each layer; the solution is applicable also in the case of partially embedded piles.

Given the distribution of K_h in each layer and, hence the distribution of the function $K(x) = K_h(x) \cdot d$ along the pile, whose diameter is d , it is convenient to represent $K(x)$ by a Fourier series:

$$K(x) = \sum_{i=1}^n b_i \text{sen} \left(\frac{\pi i}{l} x \right)$$

and the elastic curve of the pile by another Fourier series:

$$y(x) = \sum_{k=1}^m a_k \text{sen} \left(\frac{\pi k}{l} x \right)$$

where l is the length of the pile.

Modelling the pile as a compressed column surrounded by springs having different stiffnesses, depending on different coefficients of horizontal subgrade reaction of the layers, saying U_1 the energy stored in the column, U_2 the energy stored in the soil and U_3 the change of potential energy of the load P acting on the column, according to the energetic criterion it is:

$$U_1 + U_2 = U_3$$

or, specifying U_1 , U_2 , U_3 and isolating P :

$$P = \frac{\int_0^l \frac{EJ}{2} y''^2 dx + \int_0^l K(x)y^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx}$$

Substituting $K(x)$, $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ and integrating:

$$P = \frac{\frac{EJ}{l^3} \pi^4 \sum_k a_k^2 k^4 + \frac{1}{8\pi} \left[\sum_j \sum_k a_j a_k \left(\sum_i b_i \Phi_{ijk} \right) \right]}{\frac{\pi^2}{l} \sum_k a_k^2 k^2}$$

Depending P only on the coefficients $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m$ the minimum condition is the following system of equations:

$$\frac{\partial P}{\partial a_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m$$

or, after some rearrangements:

$$a_1 \frac{l^2}{2\pi^3 k^2} \left(\sum_i b_i \Phi_{i1k} \right) + \dots + a_k \left[\frac{l^2}{2\pi^3 k^2} \left(\sum_i b_i \Phi_{ikk} \right) + \frac{EJ\pi^2 k^2}{l^2} - P_{cr} \right] + \dots + a_m \frac{l^2}{2\pi^3 k^2} \left(\sum_i b_i \Phi_{imk} \right) = 0$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

This is a linear homogeneous system whose trivial solution, relating to the undeformed configuration, is $a_1 = a_2 = \dots = a_k = \dots = a_m = 0$. In the solution giving $P_{cr} = \min(P)$, P_{cr} is the minimum of the eigenvalues and the elastic curve is described by the correspondent eigenvector. Increasing the number of equations increases the accuracy of the solutions (fig. 2).

The examples show that P_{cr} depends on the soft layers between two stiff layers (fig. 4a e 4b); the particular succession of soft layers may significantly influence the value of P_{cr} (fig. 4c, 4f). The boundary conditions at the ends of the pile are also important (fig. 4b, 4c, 4h) and soft layer - if thick enough - over the stiff layer which surrounds the end at the bottom of the pile makes the stiffness of the layer at the end of the pile less important (fig. 2, 4b). Choosing the values of K , the method allows to take into account the influence of the foundation as well.