

# Anisotropia di resistenza delle rocce in condizioni di compressione triassiale\*

G. BARLA\*\*, A. CHIAPPONE\*\*\*, C. SCAVIA\*\*

**SOMMARIO:** Nel presente studio è trattata l'anisotropia delle rocce dal punto di vista della resistenza meccanica. È stata effettuata una serie di prove di laboratorio, a compressione monoassiale e triassiale, su un litotipo caratteristico, lo gneiss di Luserna. I risultati sono stati interpretati mediante tre criteri di resistenza applicabili a mezzi trasversalmente isotropi: il criterio di Coulomb (modificato), il criterio di Nova e Sacchi, il criterio di Hoek e Brown. Questi criteri sono stati anche utilizzati per interpretare alcuni risultati sperimentali esistenti in letteratura. Sulla base dello studio comparativo svolto sono state quindi formulate alcune considerazioni sull'applicabilità degli stessi criteri alla descrizione del comportamento meccanico delle rocce anisotrope.

## 1. Introduzione

Gran parte delle rocce esistenti in natura rivela proprietà anisotrope, cioè presenta un carattere «direzionale» dei parametri che ne definiscono il comportamento fisico-meccanico. L'anisotropia si rileva sia a livello di grande scala, quando nell'ammasso roccioso sono presenti superfici geologiche di discontinuità (giunti, fratture, faglie, ecc.) o alternanze di strati di materiali diversi, sia a livello di piccola scala, quando la roccia componente l'ammasso stesso ha già, di per sé, a causa della sua struttura intrinseca (orientazione preferenziale dei cristalli, sistemi di micro-fessure, ecc.), proprietà direzionali. Tali proprietà non sono proprie solo di rocce scistose e stratificate, ma anche di rocce apparentemente isotrope, come alcuni graniti.

Il problema dell'anisotropia, che riguarda sia le caratteristiche di deformabilità che quelle di resistenza, è stato ampiamente studiato, soprattutto negli ultimi anni, e dal punto di vista teorico e dal punto di vista sperimentale.

L'anisotropia delle rocce dal punto di vista della deformabilità è stata studiata nell'ambito della teoria dell'elasticità lineare con riferimento a due forme particolari e semplificate di simmetria elastica: la simmetria ortotropa e la simmetria trasversalmente isotropa. A tale riguardo possono essere citati, ad esempio, i lavori di HEARMON [1961], LEKHNITSKII [1963], RABINOVICH [1946], BARLA [1974], CREA *et al.* [1981].

Fra i primi studi sperimentali completi sull'anisotropia di resistenza meccanica si deve fare riferimento a quello dovuto a DONATH [1961-'64], il quale eseguì una serie di prove triassiali su campioni a simmetria trasversalmente isotropa (ardesia di Martinsburg). Lo stesso Autore mise in luce come la resi-

stenza e l'inclinazione del piano di rottura varino con la direzione dello sforzo principale maggiore rispetto al piano di clivaggio.

In seguito, molti altri Autori [CHENEVERT e GATLIN, 1965], [MC LAMORE e GRAY, 1967], [DONATH, 1972], [ATTEWELL e SANDFORD, 1974], eseguirono lo stesso tipo di prove su ardesie, scisti, ecc. Nello stesso tempo numerosi tentativi sono stati fatti per arrivare a sviluppare un criterio di resistenza atto ad interpretare in modo soddisfacente i risultati ottenuti in laboratorio.

La prima proposta teorica in questo senso è quella di JAEGER [1959], nota come «criterio di Coulomb (modificato)», e volta ad interpretare il comportamento meccanico delle rocce trasversalmente isotrope aventi sistemi di discontinuità ben definiti; essa presuppone due coppie di parametri di resistenza (coesione ed angolo di attrito interno della roccia intatta, coesione ed angolo di attrito interno dei piani di discontinuità) e quindi due diversi ed indipendenti meccanismi di rottura.

A partire da questo primo approccio, altre generalizzazioni del criterio di Coulomb a rocce anisotrope sono state proposte considerando una variazione continua delle proprietà meccaniche (coesione ed angolo di attrito interno) con l'orientazione. A tale riguardo si possono citare, ad esempio, i lavori di ATTEWELL e SANDFORD [1974], DONATH [1964], JAEGER, 1960], [MC LAMORE e GRAY, 1967], [NOVA e SACCHI, 1979].

Vista la difficoltà a volte incontrata da questi criteri teorici a riprodurre in modo completamente soddisfacente i risultati sperimentali, sono stati formulati anche alcuni criteri di resistenza di tipo empirico; tra questi, quello di HOEK e BROWN [1980] è di sicuro interesse dal punto di vista applicativo.

Nella presente nota viene effettuato uno studio comparativo tra alcuni di questi criteri di resistenza, in particolare per mezzi trasversalmente isotropi. L'attenzione è posta sui criteri teorici di Coulomb

\* Lavoro svolto con contributo del Ministero della Pubblica Istruzione MPI 60%.

\*\* Politecnico di Torino. Dipartimento di Ingegneria Strutturale.

\*\*\* Geanalysis, Torino.

(modificato) e di Nova e Sacchi e sul criterio empirico di Hoek e Brown.

## 2. Criteri di resistenza

Vengono nel seguito brevemente richiamati gli elementi di base dei criteri di: Coulomb (modificato), Nova e Sacchi, Hoek e Brown.

### 2.1. Criterio di Coulomb (modificato)

Il più semplice approccio volto a modificare il criterio di Coulomb per tener conto dell'anisotropia è quello proposto da Jaeger [1959], concepito specialmente per descrivere l'anisotropia delle rocce con giunti più deboli aventi una data orientazione. Questa estensione del criterio di Coulomb è conosciuta anche come «teoria del singolo piano di debolezza» e costituisce un utile punto di partenza per considerare gli effetti di discontinuità preesistenti sulla resistenza della roccia.

Con questo criterio si assume che il campione di roccia sia composto da un materiale isotropo caratterizzato dalla coesione  $c$  e dall'angolo di attrito interno  $\varphi$ , tranne che su un piano inclinato di un angolo  $\beta$  rispetto alla direzione dello sforzo principale maggiore  $\sigma_1$ , che forma il giunto, o il sistema di giunti paralleli (Figura 1); tali giunti sono caratterizzati

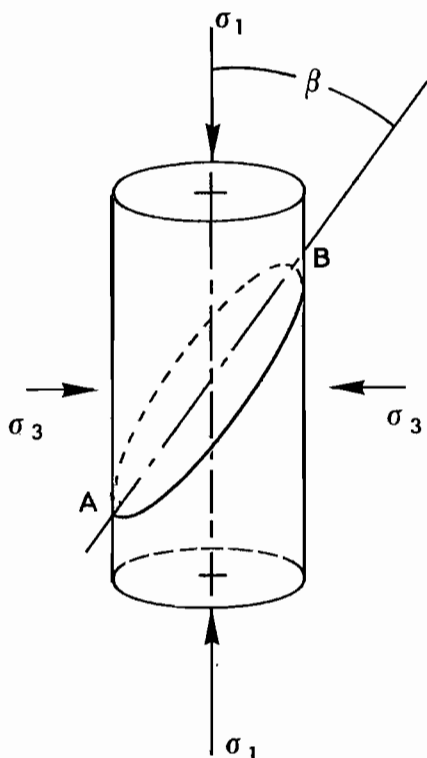


Fig. 1. - Campione di roccia trasversalmente isotropa avente angolo di inclinazione  $\beta$  del piano di scistosità rispetto alla direzione dello sforzo principale maggiore  $\sigma_1$ .

dalla coesione  $c_j$  e dall'angolo di attrito interno  $\varphi_j$ , minori rispettivamente di  $c$  e  $\varphi$ .

In condizioni di rottura deve essere soddisfatta una delle seguenti equazioni:

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (1)$$

$$\tau = c_j + \sigma \operatorname{tg} \varphi_j \quad (2)$$

la (1) nella roccia intatta, la (2) lungo la discontinuità ( $\tau$  e  $\sigma$  rappresentano rispettivamente lo sforzo di taglio e lo sforzo normale sul piano di rottura).

Su un piano inclinato di un angolo  $\phi$  rispetto alla direzione dello sforzo principale maggiore  $\sigma_1$ , lo sforzo di taglio e lo sforzo normale sono dati da:

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{sen} 2\phi \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\phi = \\ &= \sigma_1 \operatorname{sen}^2 \phi + \sigma_3 \cos^2 \phi \end{aligned} \quad (4)$$

dove  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  sono rispettivamente lo sforzo principale maggiore e lo sforzo principale minore a rottura.

Sostituendo la (3) e (4) nella (2) e ponendo  $\phi = \beta$  si ottiene l'espressione di  $\sigma_1$  a rottura quando questa avviene lungo il piano di debolezza:

$$\sigma_1 = \frac{\operatorname{tg} (\beta + \varphi_j)}{\operatorname{tg} \beta} \sigma_3 + \frac{2 c_j}{(1 - \operatorname{tg} \varphi_j \operatorname{tg} \beta) \operatorname{sen} 2\beta} \quad (5)$$

Quest'ultima relazione è valida per:

$$0 < \beta < \frac{\Pi}{2} - \varphi_j$$

intervallo nel quale  $\sigma_1$  assume finiti e maggiori di zero; essa assume valore minimo per:

$$\beta = \frac{\Pi}{4} - \frac{\varphi_j}{2}$$

La rottura avrà invece luogo su un piano inclinato di  $\frac{\Pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$  rispetto alla direzione di  $\sigma_1$ , e cioè lungo un piano che interseca la discontinuità e la roccia intatta, quando è soddisfatta la (1) e cioè per:

$$\sigma_1 = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\Pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \sigma_3 + 2 c \operatorname{tg} \left( \frac{\Pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (6)$$

La rottura attraverso la roccia intatta si verificherà quindi per:

- i valori di  $\beta$  per i quali non è valida la (5);

- i valori di  $\beta$  per i quali la (5) dà un valore di  $\sigma_1$  maggiore di quello dato dalla (6).

Il massimo valore raggiungibile dallo sforzo assiale maggiore  $\sigma_1$  a rottura è quello dato dalla (6) che, a parità di  $c$  e  $\varphi$ , e quindi di materiale roccioso, ed a parità di tensione di confinamento  $\sigma_3$ , è una costante.

In Figura 2 è riportato l'andamento qualitativo di  $\sigma_1$  a rottura in funzione di  $\beta$  per una data  $\sigma_3$ , mentre la Figura 3 mostra la variazione dell'inclinazione  $\chi$  del piano di rottura in funzione di  $\beta$  in accordo con la «teoria del singolo piano di debolezza».

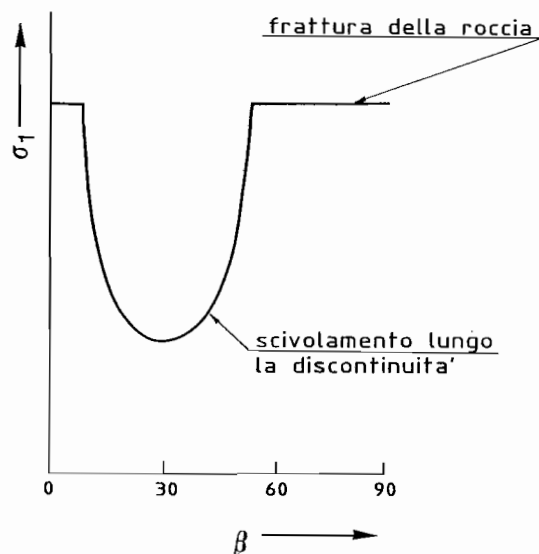


Fig. 2. - Andamento qualitativo di  $\sigma_1$  a rottura in funzione di  $\beta$  per una data  $\sigma_3$  in accordo con il criterio di Coulomb (modificato).

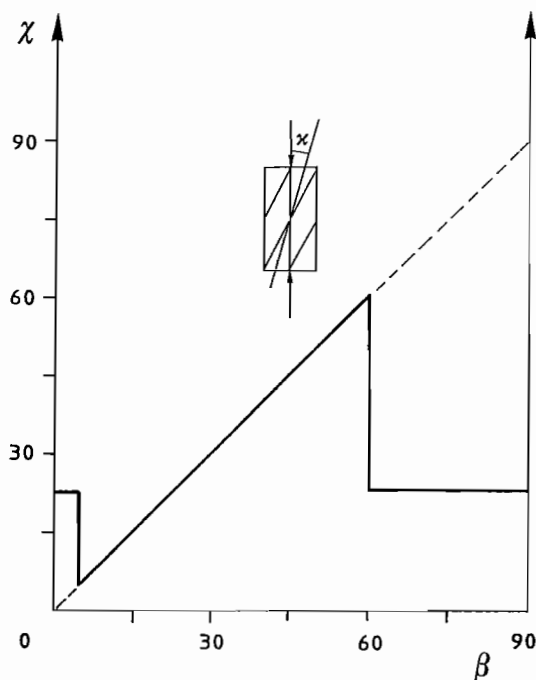


Fig. 3. - Variazione dell'angolo di inclinazione  $\chi$  del piano di rottura rispetto alla direzione di  $\sigma_1$  in funzione di  $\beta$  in accordo con il criterio di Coulomb (modificato).

## 2.2 Criterio di Nova e Sacchi

Il criterio di NOVA e SACCHI [1979] appartiene ai metodi di tipo teorico, che presuppongono una variazione dei parametri di resistenza con l'orientazione. Esso consente una generalizzazione dei risultati anche al caso di simmetria ortotropa ed a stati di sforzo tridimensionali.

Il criterio assume che la rottura abbia luogo su un piano quando lo sforzo di taglio  $\tau$  raggiunge un valore limite  $\tau^*$  che è una funzione dell'orientazione del piano ed è la somma di due componenti che variano come le componenti normali di un tensore del secondo ordine e che possono essere correlate rispettivamente all'attrito interno del materiale ed alla coesione.

Poiché nel presente studio si fa riferimento a rocce con simmetria trasversalmente isotropa, sottoposte a stati tensionali triassiali convenzionali, il criterio viene richiamato nella forma semplificata riferentesi a tale caso particolare:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2 \left\{ \left[ \left( \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \right) c_t + \left( \sigma_r \delta \cos^2 \beta + \sigma_t \sin^2 \beta + \tau_{tr} \sin 2\beta \right) 2 \mu_t \right] \left[ \cos^2 \beta + \alpha \sin^2 \beta \right] c_t + \left( \sigma_r \delta \sin^2 \beta + \sigma_t \cos^2 \beta - \tau_{tr} \sin 2\beta \right) 2 \mu_t \right\}^{1/2} - \sin 2\beta \left[ 2 \mu_t \sigma_r \left( \frac{\delta - 1}{2} \right) + c_t \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) \right] \quad (7)$$

dove:

$$\sigma_r = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta$$

$$\sigma_t = \sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \beta$$

$$\tau_{tr} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta$$

mentre:

$c_t$  è coesione minima;

$c \equiv \alpha c_t$  è la coesione massima;

$2 \mu_t$  è il coefficiente di attrito minimo;

$2 \mu \equiv 2 \delta \mu_t$  è il coefficiente di attrito massimo;

$\alpha$  e  $\delta$  sono costanti dipendenti dal tipo di roccia in esame.

La teoria assume che il piano cui corrispondono i valori minimi dei parametri di resistenza coincida con il piano di clivaggio o di stratificazione. La minima resistenza è raggiunta quando l'angolo tra la direzione dello sforzo principale maggiore e l'asse normale al piano di più alta resistenza è uguale a:

$$\hat{\theta} = \frac{\Pi}{4} - \frac{\varphi_{\min}}{2}$$

indipendentemente dal valore della pressione di confinamento e della coesione, dove  $\varphi_{\min}$  è l'angolo di attrito sul piano di minore resistenza.

Per  $\beta = \hat{\theta}$ , la resistenza del materiale è uguale a quella di un materiale isotropo caratterizzato dal valore minimo dei parametri e la rottura avviene sul piano di clivaggio o di stratificazione. In tal caso si dimostra che il valore di  $\sigma_1$  è dato da:

$$\sigma_1 = N_{\varphi_t} \sigma_3 + \frac{c_t}{2\mu_t} (N_{\varphi_t} - 1) \quad (8)$$

dove:

$$N_{\varphi_t} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\Pi}{4} - \frac{\varphi_{\min}}{2} \right)$$

Al contrario, la massima resistenza del campione è largamente minore di quella che corrisponde ad un materiale isotropo caratterizzato dai parametri relativi al piano di più alta resistenza.

### 2.3. Criterio di Hoek e Brown

È stato proposto da HOEK e BROWN [1980] un criterio di resistenza empirico, valido per le rocce isotrope, che è stato successivamente modificato per tener conto dell'anisotropia.

La relazione empirica tra gli sforzi principali a rottura, che esprime tale criterio e che è stata sviluppata basandosi, come punto di partenza, sull'inviluppo di rottura non lineare predetto dalla teoria di GRIFFITH [1921, 1924] è, per le rocce isotrope, la seguente:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{m \sigma_c \sigma_3 + s \sigma_c^2} \quad (9)$$

dove:

$\sigma_c$  è la resistenza a compressione monoassiale della roccia intatta;

$m$  e  $s$  sono costanti che dipendono dalle proprietà della roccia e dalle condizioni di fratturazione prima della rottura (in particolare, per roccia intatta  $s = 1$ , per rocce fratturate  $s < 1$ ).

Per le rocce anisotrope i parametri  $m$  e  $s$  non possono più essere considerati costanti come per le rocce isotrope, ma sono funzione della giacitura del piano di isotropia rispetto alla direzione dello sforzo principale maggiore. Si consideri un campione di roccia anisotropa, di tipo trasversalmente isotropo, in cui sia presente un piano (o un sistema di piani) di debolezza definito dal suo angolo di inclinazione  $\beta$  rispetto alla direzione dello sforzo principale maggiore  $\sigma_1$  (Figura 1). In questo caso, tenendo conto dei dati

sperimentali ottenuti da HOEK [1964], DONATH [1964], MC LAMORE e GRAY [1967], si ha per  $m$  ed  $s$ :

$$m = m_i \left( 1 - N_1 e^{-\theta} \right) \quad (10)$$

$$s = 1 - P_1 e^{\zeta} \quad (11)$$

dove:

$m_i$  è il valore di  $m$  per roccia intatta determinato per  $\beta = 90^\circ$  (o per  $\beta = 0^\circ$ );

$$\theta = \frac{\beta - \beta_m}{N_2 + N_3 \beta} \quad (12)$$

$$\zeta = \frac{\beta - \beta_s}{P_2 + P_3 \beta} \quad (13)$$

in cui:

$\beta_m$  è il valore di  $\beta$  in corrispondenza del quale  $m$  è minimo;

$\beta_s$  è il valore di  $\beta$  in corrispondenza del quale  $s$  è minimo;

$N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3$  sono costanti che variano a seconda del tipo di roccia.

### 3. Esempi di interpretazione di risultati sperimentali

I criteri di cui sopra sono stati impiegati per l'interpretazione delle determinazioni sperimentali effettuate in (\*):

- (1) prove a compressione triassiale su «ardesia di Martinsburg», da DONATH [1964];
- (2) prove a compressione monoassiale e triassiale su «ardesia verde di Coninston», da BAKAS [1979];
- (3) prove a compressione triassiale su «ardesia di Austin», da MC LAMORE e GRAY [1967];
- (4) prove a compressione triassiale su «ardesia di Penrhyn», da ATTEWELL e SANDFORD [1974].

I risultati ottenuti sono illustrati nelle Figure 4 ÷ 15.

### 4. Anisotropia di resistenza dello gneiss di Luserna

Lo gneiss di Luserna (Alpi Occidentali) è stato sottoposto recentemente da NOVA e ZANINETTI [1988] ad una accurata analisi mineralogica e petrografica nell'ambito di uno studio sull'anisotropia di trazione nelle rocce.

Tale analisi, condotta su sezioni sottili ricavate dai campioni di roccia orientati in tre direzioni differenti mutuamente ortogonali, mostra l'anisotropia di tipo trasversalmente isotropo di questo gneiss. I minerali preponderanti sono feldspato, quarzo e mica.

(\*) I metodi adottati per determinare i parametri che caratterizzano i diversi criteri sono brevemente illustrati in Appendice.

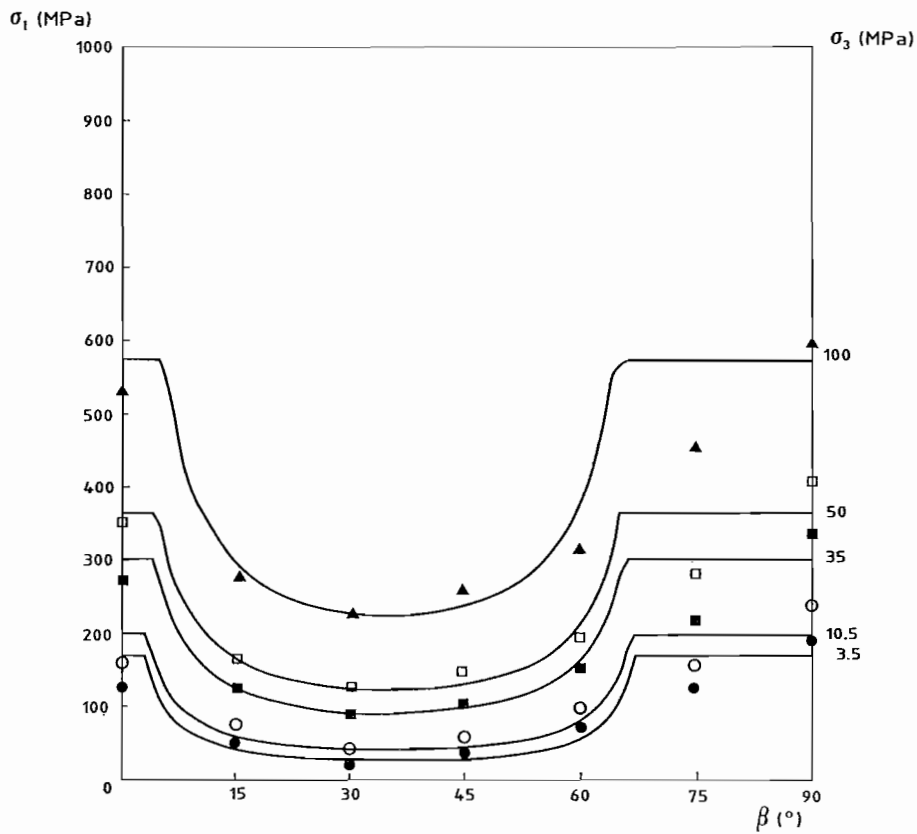


Fig. 4. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia di Martinsburg» secondo il criterio di Coulomb (modificato).  
 $(c = 38.34 \text{ MPa}; \varphi = 37.84^\circ; c_j = 7.33 \text{ MPa}; \varphi_j = 20.18^\circ)$ .

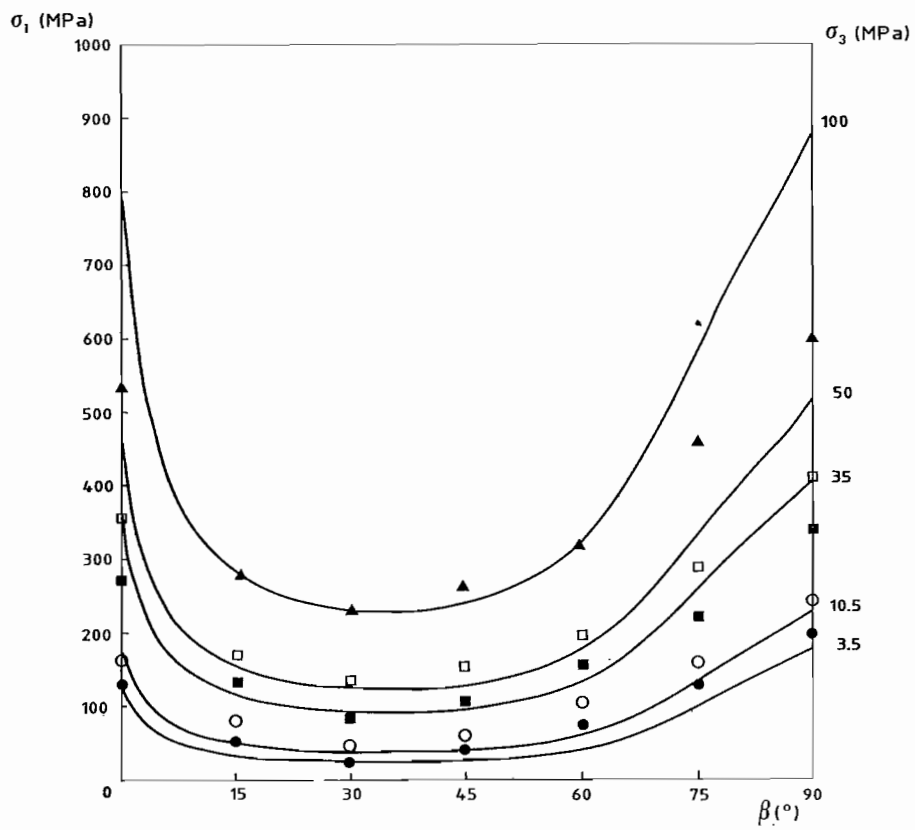


Fig. 5. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia di Martinsburg» secondo il criterio di Nova e Sacchi.  
 $(c_t = 6.03 \text{ MPa}; 2\mu_t = 0.39; \alpha = 15.09; \delta = 9.04)$

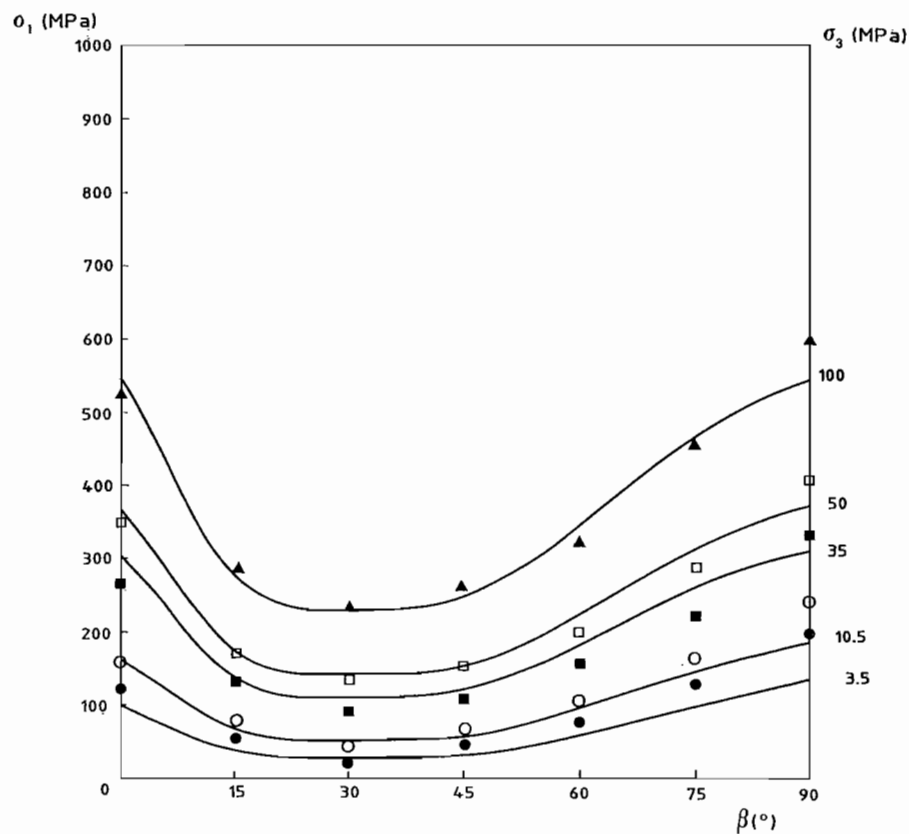


Fig. 6. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia di Martinsburg» secondo il criterio di Hoek e Brown. ( $\sigma_c = 155.10$  MPa;  $m_i = 14.22$ ;  $\beta_m = 30^\circ$ ;  $\beta_s = 30^\circ$ ,  $N_1 = 0.92$ ;  $N_2 = 25.00$ ;  $N_3 = 0.30$ ;  $P_1 = 1.00$ ;  $P_2 = 5.00$ ;  $P_3 = 0.20$ ).

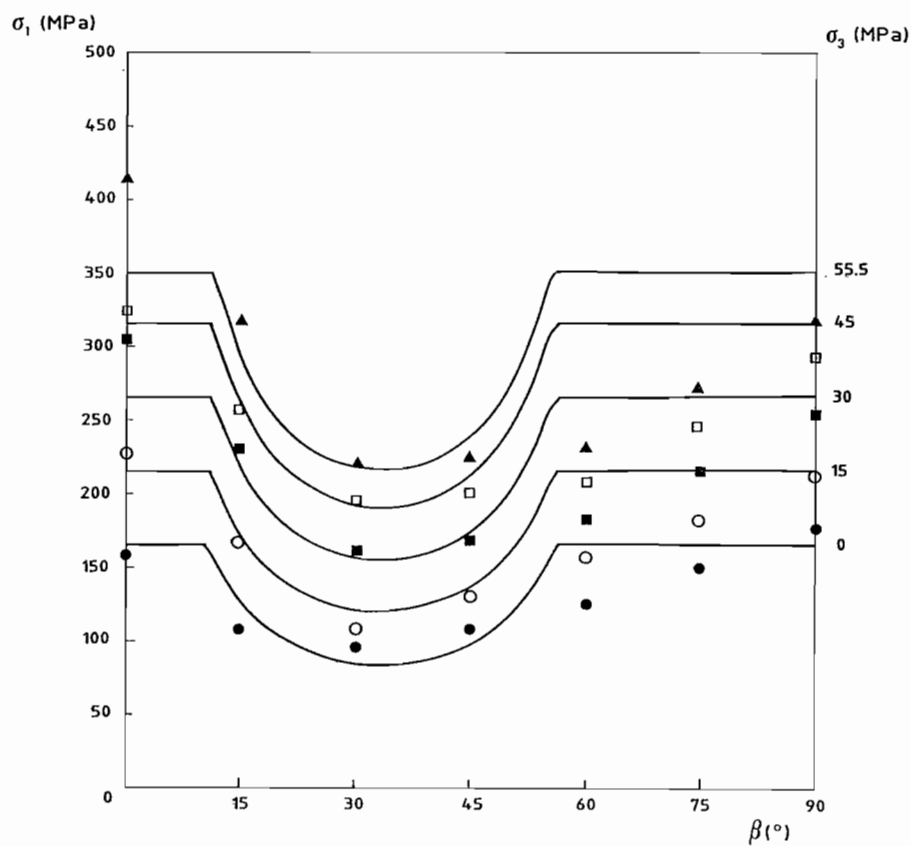


Fig. 7. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia verde di Coninston» secondo il criterio di Coulomb (modificato). ( $c = 45.77$  MPa;  $\varphi = 32.49^\circ$ ;  $c_j = 28.00$  MPa;  $\varphi_j = 23.50^\circ$ ).

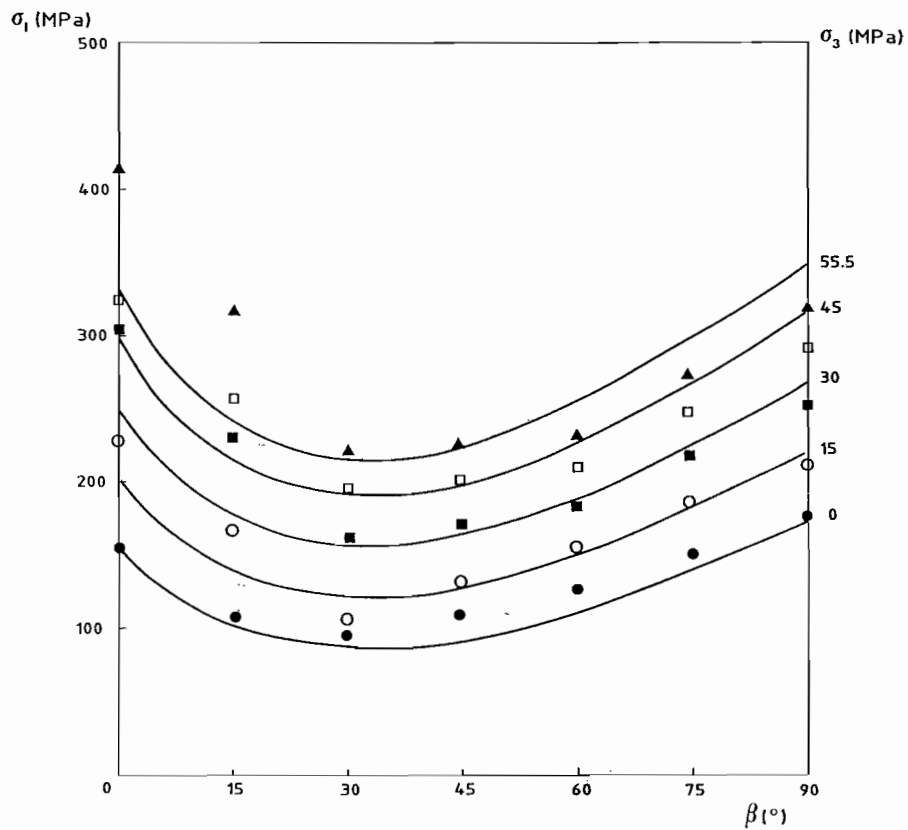


Fig. 8. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia verde di Coninston» secondo il criterio di Nova e Sacchi. ( $c_1 = 29.00$  MPa;  $2\mu_1 = 0.43$ ;  $\alpha = 2.52$ ;  $\delta = 2.04$ ).

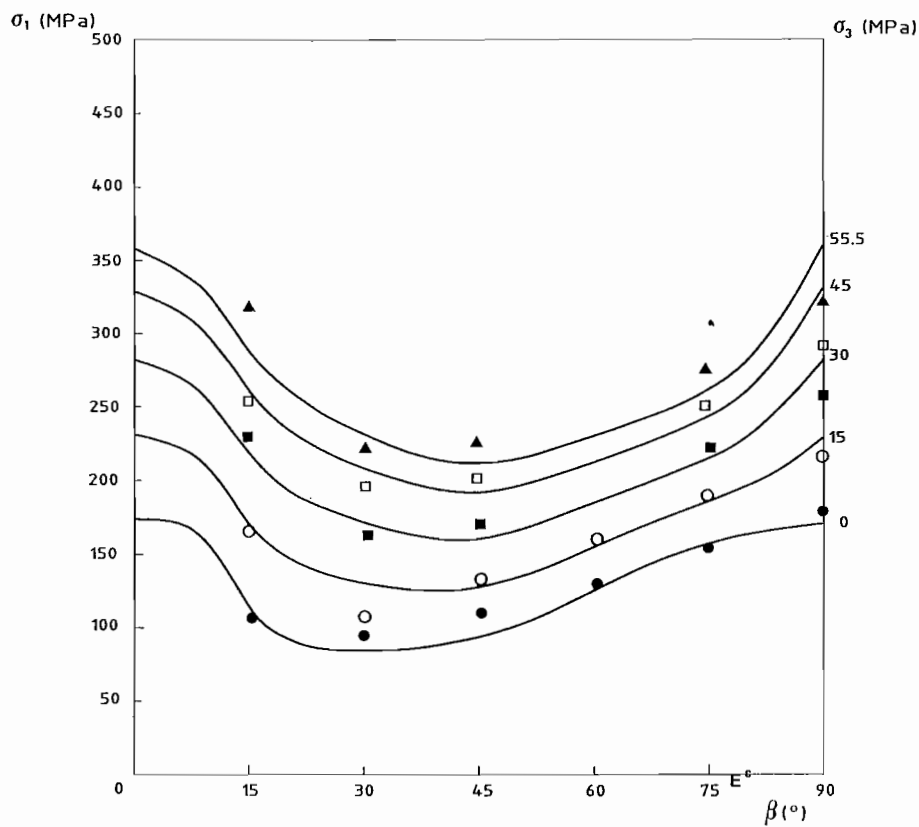


Fig. 9. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia verde di Coninston» secondo il criterio di Hoek e Brown. ( $\sigma_c = 173.30$  MPa;  $m_1 = 9.82$ ;  $\beta_m = 60^\circ$ ;  $\beta_s = 30^\circ$ ;  $N_1 = 0.84$ ;  $N_2 = 62.00$ ;  $N_3 = -0.35$ ;  $P_1 = 0.77$ ;  $P_2 = 15.00$ ;  $P_3 = 0.35$ ).

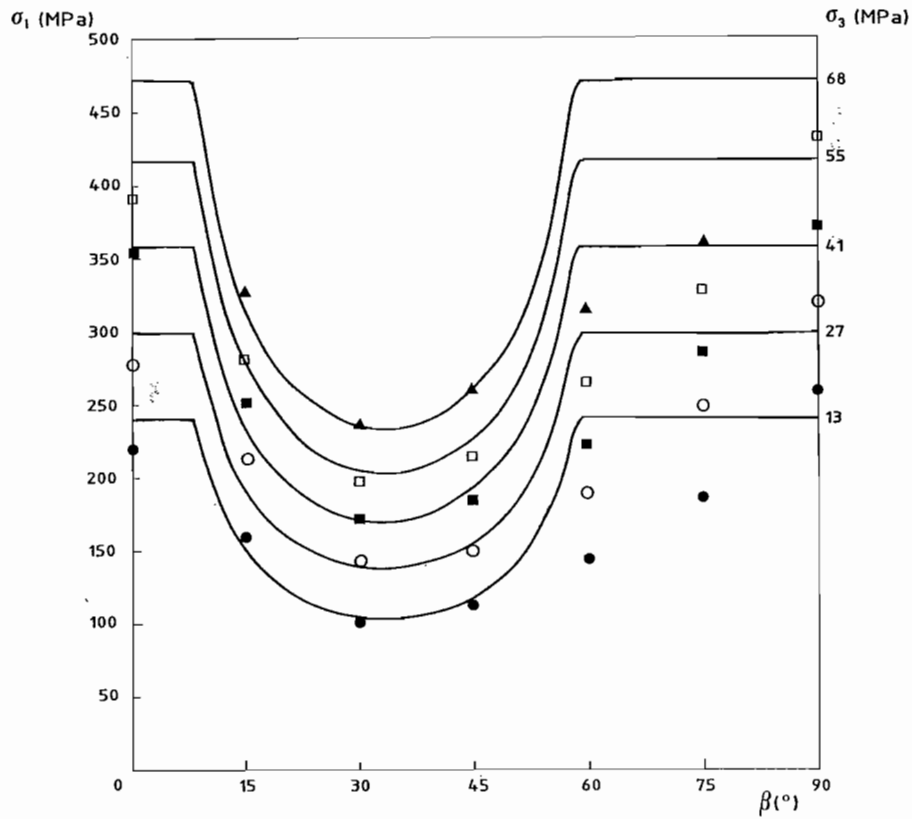


Fig. 10. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia di Penrhyn» secondo il criterio di Coulomb (modificato).  
 $(c = 45.45 \text{ MPa}; \varphi = 37.93^\circ; c_j = 24.43 \text{ MPa}; \varphi_j = 23.49^\circ)$

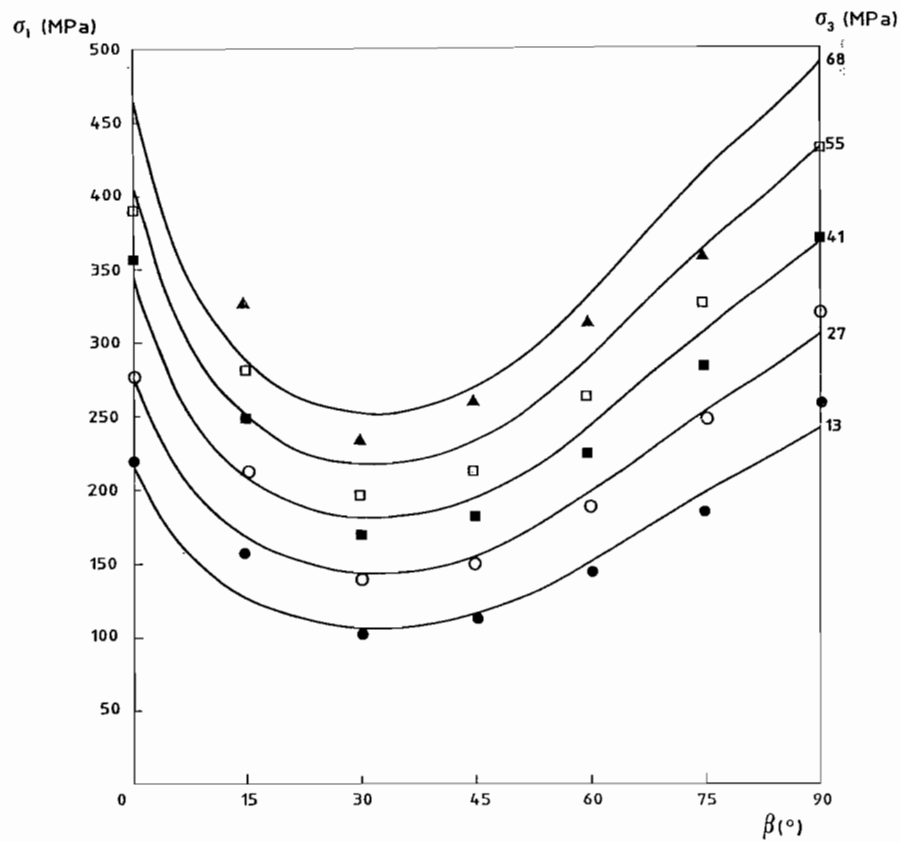


Fig. 11. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia di Penrhyn» secondo il criterio di Nova e Sacchi.  
 $(c_t = 22.20 \text{ MPa}; 2\mu_\tau = 0.50; \alpha = 3.30; \delta = 2.70)$



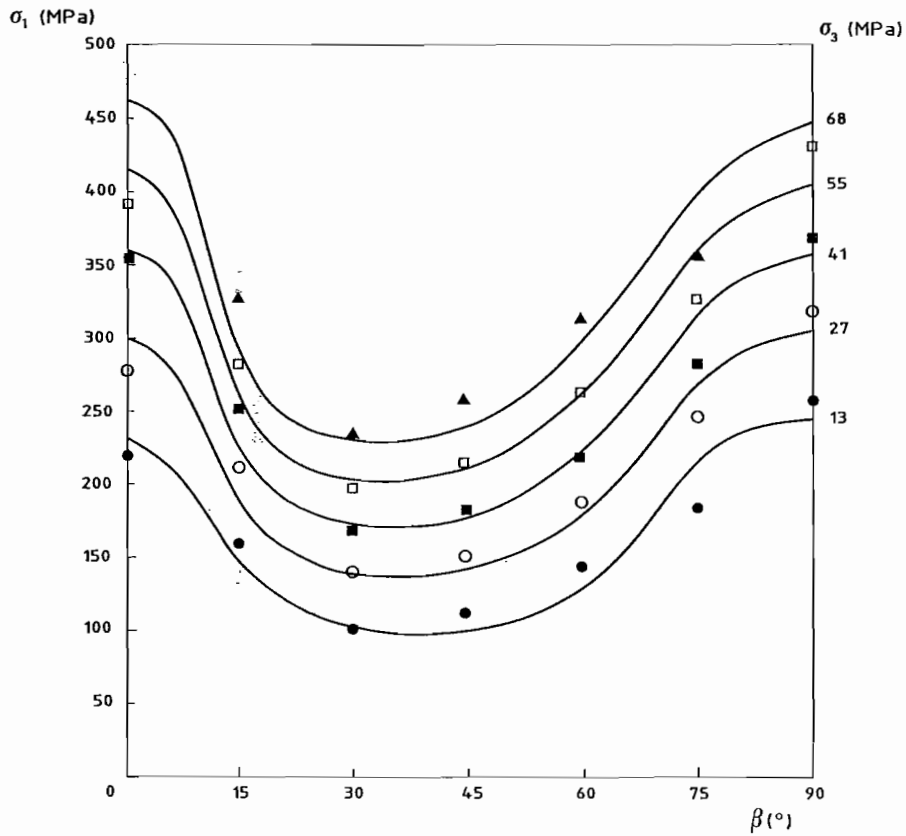


Fig. 12. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia di Penrhyn» secondo il criterio di Hoek e Brown.  
 $(\sigma_c = 181.50 \text{ MPa}; m_t = 10.79; \beta_m = 30^\circ; \beta_s = 45^\circ; N_1 = 0.82; N_2 = 18.08; N_3 = 0.39; P_1 = 0.02; P_2 = 44.22; P_3 = -0.22)$ .

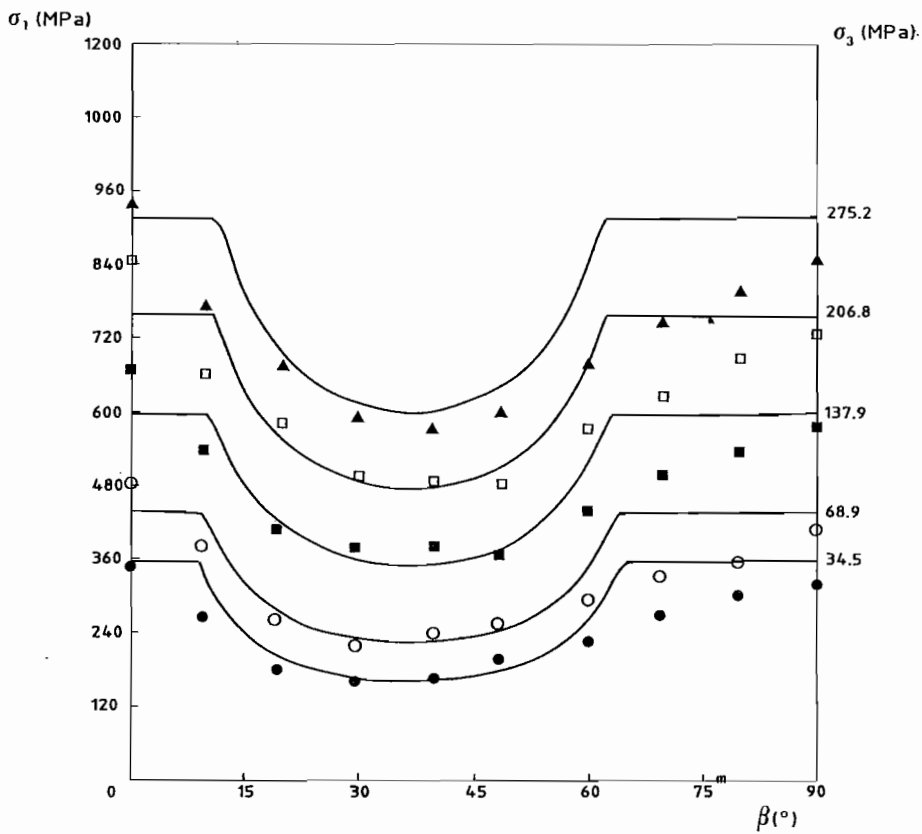


Fig. 13. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia di Austin» secondo il criterio di Coulomb (modificato).  
 $(c = 90.64 \text{ MPa}; \varphi = 23.53^\circ; c_j = 37.54 \text{ MPa}; \varphi_j = 16.66^\circ)$ .

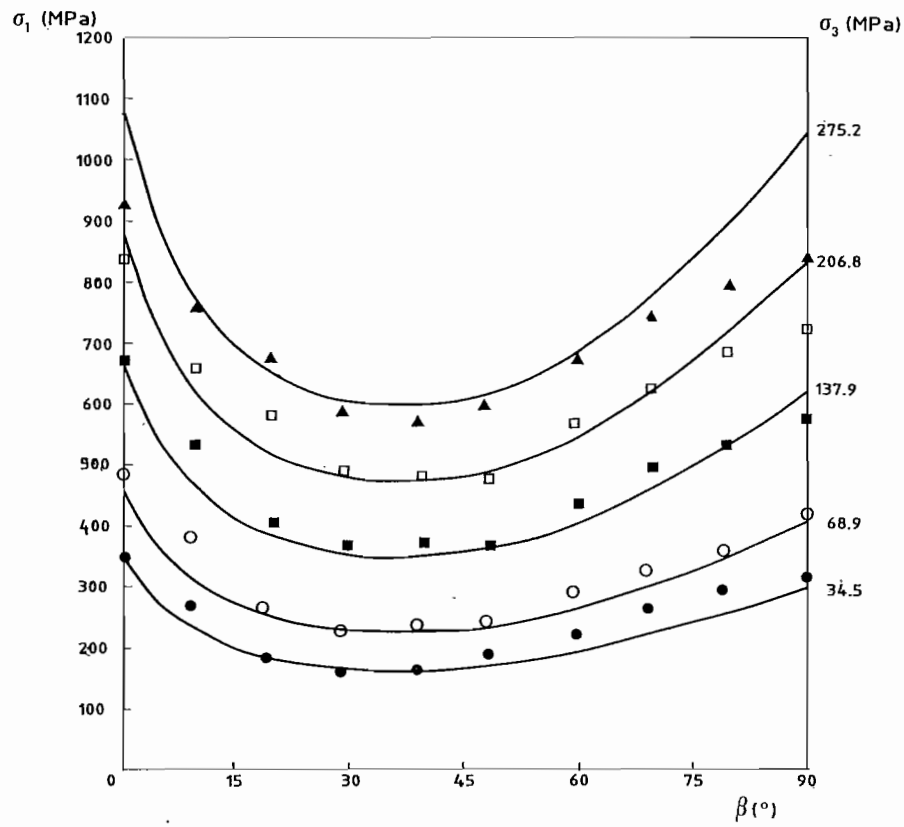


Fig. 14. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia di Austin» secondo il criterio di Nova e Sacchi. ( $\hat{c}_t = 37.52$  MPa;  $2\mu_t = 0.29$ ;  $\alpha = 2.60$ ;  $\delta = 4.00$ ).

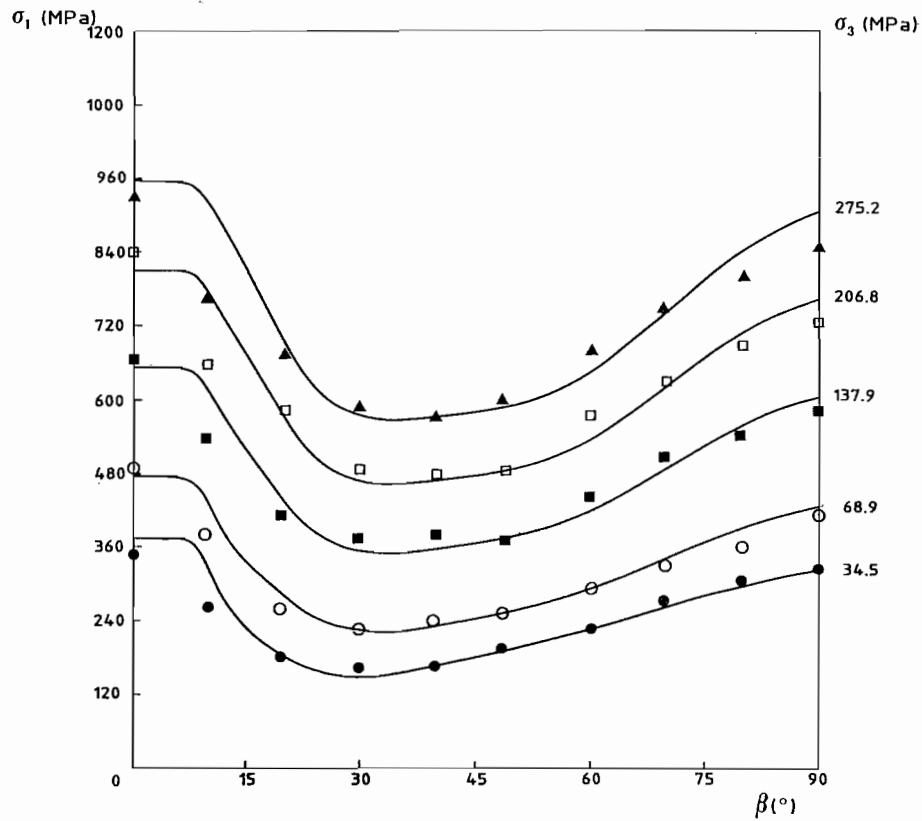


Fig. 15. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi all'«ardesia di Austin» secondo il criterio di Hoek e Brown. ( $\sigma_c = 259.40$  MPa;  $m_i = 5.62$ ;  $\beta_m = 40^\circ$ ;  $\beta_s = 20^\circ$ ;  $N_1 = 0.80$ ;  $N_2 = 20.98$ ;  $N_3 = 0.23$ ;  $P_1 = 1.00$ ;  $P_2 = 2.37$ ;  $P_3 = -0.80$ ).

Sul materiale sono state anche eseguite, presso il laboratorio di Meccanica delle Rocce (Dipartimento di Ingegneria Strutturale) del Politecnico di Torino, prove a compressione monoassiale e prove a compressione triassiale mediante cella triassiale di tipo ELE dotata di un sistema di controllo della pressione laterale.

Per la misura delle deformazioni si sono utilizzati estensimetri elettrici (quattro per ogni campione: due per la misura delle deformazioni assiali e due per quelle radiali). Nel corso delle prove si è utilizzato un sistema di acquisizione e restituzione automatica dei dati.

Si sono utilizzati provini di roccia aventi angolo di inclinazione  $\beta$  del piano di scistosità rispetto alla direzione dello sforzo principale maggiore  $\sigma_1$  variabile tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , con un incremento di  $15^\circ$ . Le pressioni confinamento laterale  $\sigma_3$ , nelle prove compressione triassiale, sono state di 10, 15, 20 MPa.

Per ogni inclinazione e per ogni pressione di confinamento si sono usati tre campioni aventi diametro nominale 54.74 mm, con tolleranza di  $\pm 0.75$  mm; il rapporto lunghezza/diametro è 2.5/1, per le prove a compressione monoassiale, e 2/1, per le prove a compressione triassiale.

Ad ogni prova si è eseguito un ciclo di isteresi, caricando poi il campione fino a raggiungere la rottura. I valori di  $\sigma_1$  a rottura determinati nelle prove eseguite sono riportati in Tabella 1 in funzione dell'inclinazione del piano di scistosità  $\beta$  e della pressione laterale  $\sigma_3$ .

Dall'osservazione dei provini al termine delle prove emerge che la rottura avviene:

- attraverso il materiale intatto per  $\beta = 0^\circ$  e  $\beta = 90^\circ$  (la superficie di rottura non appare influenzata dalla presenza dei piani di scistosità);
- lungo una superficie pressoché coincidente con un piano di scistosità per  $\beta = 30^\circ$ ;
- lungo una superficie mista interessante in parte il materiale intatto ed in parte i piani di scistosità per gli altri valori di  $\beta$ .

I risultati dell'interpretazione mediante il *criterio di Coulomb (modificato)* sono riportati in Figura 16

e sono stati ricavati a partire dai seguenti parametri caratteristici:

$$c = 18.30 \text{ MPa} \quad c_j = 13.97 \text{ MPa}$$

$$\varphi = 59.52^\circ \quad \varphi_j = 48.43^\circ$$

La Figura 17 mostra, invece, i risultati dell'interpretazione mediante il *criterio di Nova e Sacchi*. I valori dei parametri caratteristici sono i seguenti:

$$2\mu_t = 1.247$$

$$c_t = 16.67 \text{ MPa}$$

$$\varphi_{\min} = 51.27^\circ$$

$$\alpha = 1.686$$

$$\delta = 1.204$$

I risultati ottenuti dall'interpretazione con il *criterio di Hoek e Brown* sono riportati infine in Figura 18. Come resistenza a compressione monoassiale della roccia intatta si è assunto il valore ottenuto per  $\beta = 90^\circ$ :

$$\sigma_c = 152.44 \text{ MPa}$$

e come involucro caratteristico della roccia intatta quello corrispondente a  $\beta = 90^\circ$  che presenta i valori maggiori di resistenza. I valori ricavati di  $m$  e  $s$  alle varie inclinazioni sono riportati in Tabella 2.

Da tali valori si sono ricavati i parametri intermedi del criterio, riassunti in Tabella 3 ed in Tabella 4.

Infine si sono determinati i valori di  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , riportati in Tabella 5.

## 5. Analisi dei risultati e conclusioni

Dall'analisi delle interpretazioni dei dati sperimentali è possibile trarre alcune considerazioni conclusive riguardo all'applicabilità dei criteri di resistenza considerati per la descrizione del comportamento meccanico delle rocce trasversalmente isotrope.

In generale il *criterio di Coulomb (modificato)* non approssima in modo soddisfacente i dati sperimentali (Figure 4, 7, 10, 13 e 16). Ciò può essere spiegato ricordando che il criterio:

Tabella 1. - Valori della tensione assiale a rottura  $\sigma_1$  (MPa) in funzione di  $\beta$  e  $\sigma_3$

$\sigma_3$ (MPa) \ $\beta$ (°)	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0	116.21	101.68	92.46	75.68	116.68	127.96	152.44
10	249.98	220.43	177.08	228.54	229.04	268.31	288.44
15	309.59	263.73	223.73	254.27	247.67	326.10	375.63
20	370.82	316.88	250.70	258.92	308.21	363.25	382.10

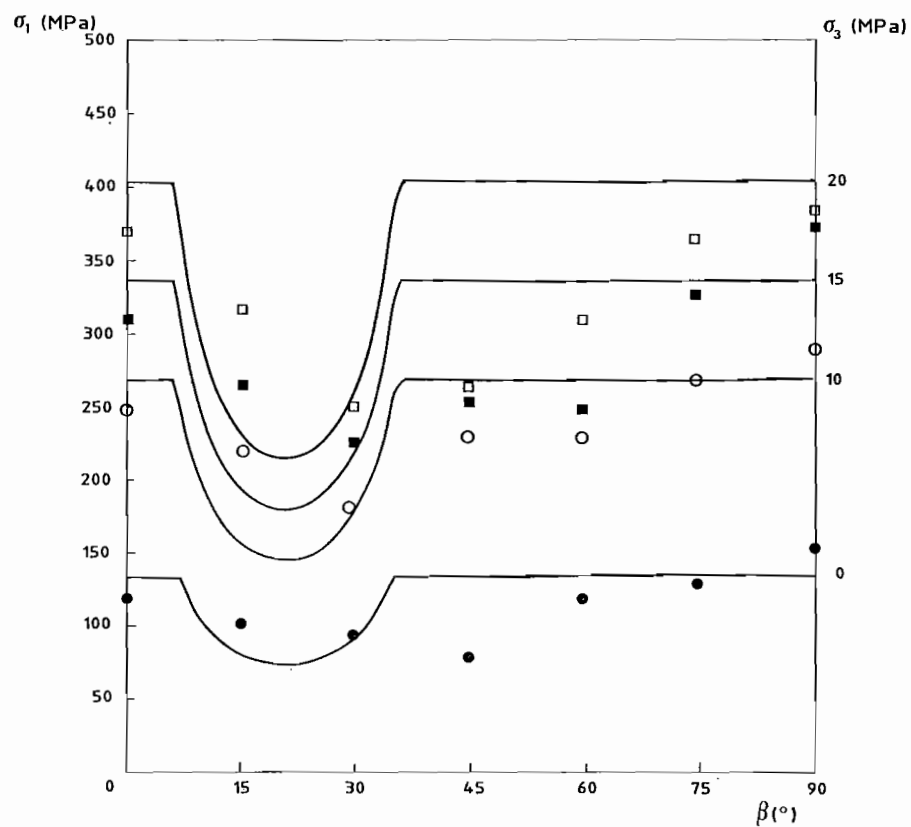


Fig. 16. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi allo «gneiss di Luserna» secondo il criterio di Coulomb (modificato).  
 ( $c = 18.30$  MPa;  $\varphi = 59.52^\circ$ ;  $c_j = 13.97$  MPa;  $\varphi_j = 48.43^\circ$ ).

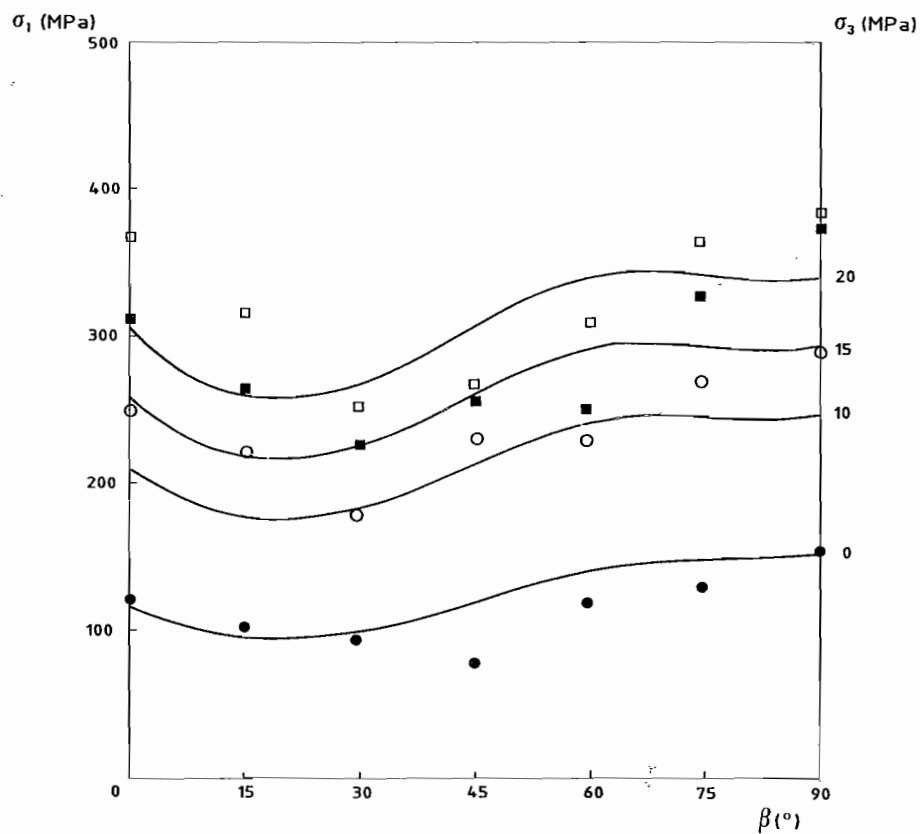


Fig. 17. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi allo «gneiss di Luserna» secondo il criterio di Nova e Sacchi.  
 ( $c_t = 16.67$  MPa;  $2\mu_t = 1.25$ ;  $\alpha = 1.69$ ;  $\delta = 1.20$ ).

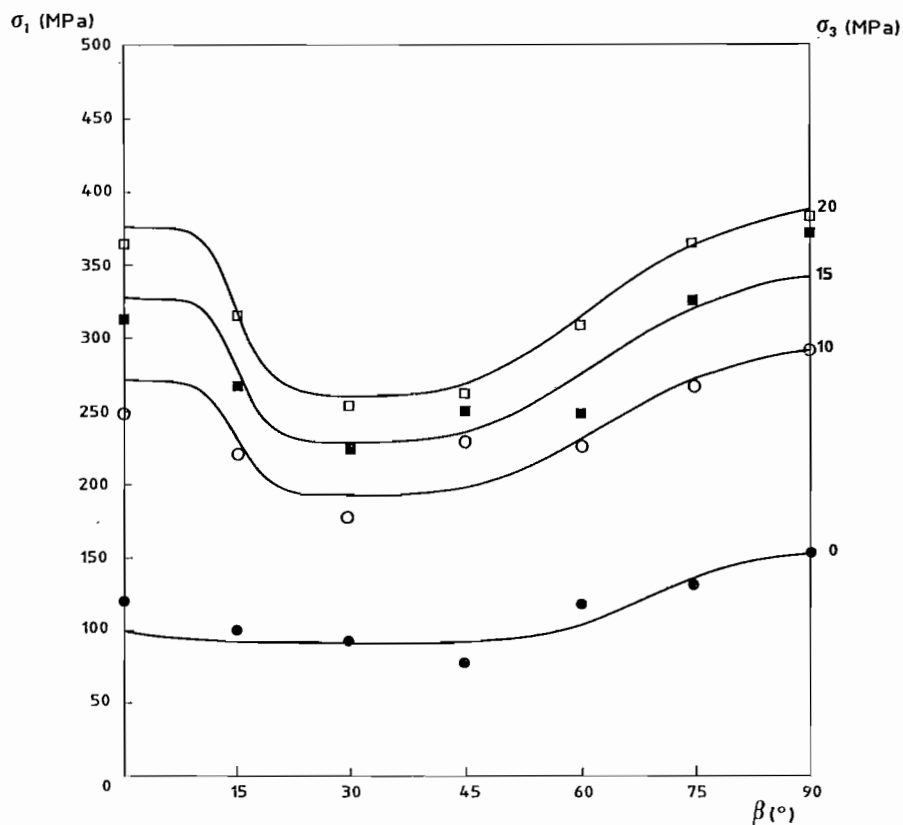


Fig. 18. - Interpretazione dei dati sperimentali relativi allo «gneiss di Luserna» secondo il criterio di Hoek e Brown.  
 $(\sigma_c = 152.44 \text{ MPa}; m_i = 38.28; \beta_m = 30^\circ; \beta_s = 30^\circ; N_1 = 0.58; N_2 = 11.44; N_3 = 0.40; P_1 = 0.64; P_2 = 52.44; P_3 = -0.13)$ .

Tabella 2. - Valori di  $m$ ,  $s$  e  $r^2$  \* in funzione di  $\beta$

$\beta(^{\circ})$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$m$	35.34	24.94	16.12	18.65	20.30	33.77	38.28
$s$	0.42	0.36	0.36	0.40	0.43	0.71	1.00
$r^2$	0.98	0.99	0.91	0.87	0.89	1.00	0.94

\*  $r^2$  è il coefficiente di correlazione (più è vicino all'unità, migliore è l'adattamento dell'equazione empirica ai dati sperimentali).

Tabella 3. - Valori di  $m_i$ ,  $m_{\min}$ ,  $s_{\min}$ ,  $\beta_m$ ,  $\beta_s$ ,  $s$  e  $N_1$ ,  $P_1$

$m_i$	$m_{\min}$	$s_{\min}$	$\beta_m$	$\beta_s$	$N_1$	$P_1$
38.2842	16.1224	0.3575	30°	30°	0.5789	0.6425

Tabella 4. - Valori di  $v$  e  $\zeta$  in funzione di  $\beta$

$\beta(^{\circ})$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\zeta$	-1.1919	-0.8438	0.1079	-0.5902	-0.6851	-1.1233	—
$\zeta$	-0.5323	-0.2738	0.0000	-0.5058	-0.5959	-0.9446	—

Tabella 5. - Valori di  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $P_2$ ,  $P_3$

$N_2 = 11.44$	$P_2 = 52.44$
$N_3 = 0.40$	$P_3 = -0.13$

– presuppone un andamento ( $\tau$ ,  $\sigma$ ) a rottura di tipo lineare;  
 – assume a priori due diversi ed indipendenti meccanismi di rottura, in contrasto con l'evidenza sperimentale.

La migliore approssimazione dei risultati si ha:  
 – in corrispondenza di  $\beta = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ , in relazione alle modalità di determinazione dei parametri caratteristici;  
 – per le ardesie, nella porzione di curva rappresentativa dello scivolamento lungo il piano di scistosità (Figure 4, 7, 10, 13).

Particolare difficoltà viene rilevata per la rappresentazione dei dati relativi allo gneiss di Luserna (Figura 16). Ciò può essere probabilmente imputato al fatto che per questo litotipo i valori dei parametri di resistenza caratterizzanti il piano di scistosità non sono molto diversi da quelli caratterizzanti la roccia intatta (soprattutto per quel che riguarda la coesione), al contrario di quanto accade invece per le ardesie. Questi valori, relativamente simili dei parametri di resistenza, fanno quindi sì che maggior rilievo acquistino i fenomeni di rottura mista nel reale comportamento fisico, e rendono perciò meno interpretabili i risultati con il criterio di Coulomb.

In generale, quindi, il metodo di Jaeger, presupponendo una così drastica variazione da un meccanismo di rottura ad un altro e cioè due coppie distinte di parametri di resistenza, può solo rappresentare una ragionevole idealizzazione del comportamento di un materiale avente una singola discontinuità ben definita oppure un sistema di giunti aventi una ben determinata orientazione. Esso dà una raffigurazione troppo schematica del comportamento meccanico delle rocce anisotrope ordinarie, quali ardesie e gneiss, le quali tendono invece a rivelare una variazione continua delle proprietà meccaniche con l'orientazione mostrando così fenomeni di rottura mista.

I limiti del criterio di Coulomb modificato vengono in parte superati con l'interpretazione dei risultati mediante il *criterio di Nova e Sacchi* che, considerando i parametri di resistenza variabili con l'orientazione del piano di scistosità rispetto alle direzioni principali di sforzo, meglio si adatta alla realtà fisica (Figura 5, 8, 11, 14, 17).

Il *Criterio di Hoek e Brown* infine risulta quello che con maggior aderenza è in grado di interpretare i risultati sperimentali (Figura 6, 9, 12, 15, 18). Ciò

può essere spiegato dal carattere empirico del criterio che non assume a priori alcun meccanismo di rottura e che permette di impiegare tutti i dati sperimentali a disposizione per la determinazione dei parametri caratteristici, risultando così particolarmente flessibile nell'interpretare il comportamento meccanico dei vari litotipi.

#### BIBLIOGRAFIA

- ATTEWELL P.B., SANFORD M.R. (1974) - *Intrinsic Shear Strength of a Brittle Anisotropic Rock - Experimental and Mechanical Interpretation*. International Journal of Rock Mechanics Min. Sci. 11.
- BAKAS G.J. (1979) - *A Study of the Directional Mechanical Properties of an Anisotropic Rock Material*. A British Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Sheffield.
- BARLA G. (1974) - *Rock Anisotropy - Theory and Laboratory Testing*. Rock Mechanics. Udine, Springer Verlag.
- CHENEVERT M.E., GATLIN C. (1965) - *Mechanical Anisotropies of Laminated Sedimentary Rocks*. J. Soc. Petrol Engrs.
- CREA G., MARTINO D., RIBACCHI R. (1981) - *Influenza delle caratteristiche strutturali sull'anisotropia delle rocce*. R.I.G., Vol. 14/4.
- DONATH F.A. (1964) - *Strength Variation and Deformational Behaviour in Anisotropic Rocks*. State of Stress in the Earth's Crust, American Elsevier Publishing Co., New York.
- DONATH F.A. (1972) - *Effects of Cohesion and Granularity on Deformational Behaviour of Anisotropic Rock*. Mem. Geol. Soc. Am. 135.
- GRIFFITH A.A. (1921) - *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. Phil. Trans. Royal Soc., London Series A, Vol. 221.
- GRIFFITH A.A. (1924) - *Theory of Rupture*. Proc. Intl. Congress Appl. Mech., Delft.
- HEARMON R.F.S. (1961) - *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity*. Oxford University Press, Oxford.
- HOEK E. (1964) - *Fracture of Anisotropic Rock*. Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy, Vol. 64, no. 10 Johannesburg, South Africa.
- HOEK E., BROWN E.T. (1980) - *Empirical Strength Criterion for Rock Masses*. Journal of the Geotechnical Engineering Division.
- JAEGER J.C. (1959) - *The Physical Properties of Joints in Rock*. Geof. Pura e App., Vol. 43.
- JAEGER J.C. (1960) - *Shear Fracture of Anisotropic Rocks*. Geol. Magaz., Vol. 37.
- LEKHNITSKII S.G. (1963) - *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. Holden - Day Inc., San Francisco.
- MC LAMORE R., GRAY K.E. (1967) - *The Mechanical Behaviour of Anisotropic Sedimentary Rocks*. Journal of Engineering for Industry, Transactions, American Society of Mechanical Engineers.
- NOVA R., SACCHI G.A. (1979) - *A Generalized Failure Condition for Orthotropic Solids*. Euromech 115. Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, Villard del Lans.
- NOVA R. (1980) - *The Failure of Transversely Isotropic Rocks in Triaxial Compression*. International Journal of Rock Mechanics Min. Sci. and Geomech. Abstr., Vol. 17, Pergamon Press.
- RABINOVICH A.L. (1946) - *The Elastic Constants and the Stability of Anisotropic Materials*. Proc. of the Central Aero and Hydrodynamic Institute.

#### APPENDICE

Vengono nel seguito fornite alcune indicazioni sulle modalità di determinazione dei parametri che intervengono nei criteri di resistenza considerati.

*Criterio di Coulomb (modificato)*

I parametri da determinare sono:

$c$ ,  $\varphi$ ,  $c_3$ ,  $\varphi_3$ .

• Per la determinazione di  $c$  e  $\varphi$  si considerino le inclinazioni  $\beta = 90^\circ$  e  $\beta = 0^\circ$  in corrispondenza delle quali il criterio assume che la rottura avvenga attraverso la roccia intatta. Per tali inclinazioni è valida la relazione (6) che può essere espressa nel modo seguente:

$$y = a x + b \quad (A1)$$

dove:

$$\begin{aligned} y &= \sigma_1 \\ x &= \sigma_3 \\ a &= \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\Pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ b &= 2 c \operatorname{tg} \left( \frac{\Pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned}$$

Tramite regressione lineare in corrispondenza delle due inclinazioni considerate si ottengono due coppie di valori di  $a$  e  $b$  e quindi di  $c$  e  $\varphi$ . I parametri caratteristici della roccia intatta sono definiti dalla media di tali valori.

• Per la determinazione di  $c_j$  e  $\varphi_j$  si consideri invece l'inclinazione  $\beta$  in corrispondenza della quale si sono ottenuti, come risultati sperimentali, i valori di  $\sigma_1$  più bassi, e la si assuma come l'inclinazione per cui si è avuta la rottura lungo il piano di scistosità. Utilizzando le relazioni (3) e (4), dopo aver posto  $\psi = \beta$ , per ogni coppia di valori ( $\sigma_1, \sigma_3$ ) disponibile si otterrà un numero corrispondente di coppie ( $\tau, \sigma$ ). Tramite regressione lineare si adatti la relazione (2) a tali coppie. Si otterranno quindi i valori di  $c_j$  e  $\varphi_j$ , parametri caratteristici del piano di scistosità.

#### Criterio di Nova e Sacchi

I parametri caratteristici indipendenti da determinare sono:

$$c_t, 2 \mu_t, \alpha, \delta.$$

• Per la determinazione di  $c_t$  e  $2 \mu_t$  si dovrebbe considerare l'inclinazione  $\beta$  in corrispondenza della quale si hanno i valori minimi di resistenza. Poiché, ovviamente, la registrazione della variazione di resistenza con  $\beta$  non è mai continua, una buona approssimazione è ottenibile considerando l'inclinazione  $\beta = 30^\circ$  a cui corrispondono i valori minimi di  $\sigma_1$  (Nova, 1980). Tramite regressione lineare si adatti a tali dati ( $\sigma_1, \sigma_3$ ) la retta data dalla relazione (8). Si trovano così  $c_t$  e  $2 \mu_t$ .

• La determinazione di  $\alpha$  e  $\delta$  è meno diretta; Nova (1980) propone due possibili procedure.

1) Si consideri che, per  $\beta = 0^\circ$ , il valore del massimo sforzo di taglio mobilizzato è dato da:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left[ (\alpha c_t + 2 \mu_t \delta \sigma_1) (c_t + 2 \mu_t \sigma_3) \right]^{1/2} \quad (A2)$$

da cui:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = 1 + 8 \mu_t^2 \delta (\rho + 1) + [16 \mu_t^2 (\alpha \rho + \delta) (\rho + 1) + 8 \mu_t^2 \delta (\rho + 1)]^{1/2} \quad (A3)$$

dove:

$$\rho = \frac{c_t}{2 \mu_t \sigma_3}$$

È possibile dimostrare che la (A3) è praticamente coincidente con l'equazione di una retta che, per valori di  $\rho$  non troppo piccoli, interpola bene i punti sperimentali. Il valore di  $\delta$  può essere determinato ponendo  $\rho = 0$ .

Per  $\beta = 90^\circ$ , il valore del massimo sforzo di taglio mobilizzato è dato da:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = [(c_t + 2 \mu_t \sigma_1) (\alpha c_t + 2 \mu_t \delta \sigma_3)]^{1/2} \quad (A4)$$

da cui:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = 1 + 8 \mu_t^2 (\alpha \rho + \delta) + [16 \mu_t^2 (\alpha \rho + \delta) (\rho + 1) + 8 \mu_t^2 (\alpha \rho + \delta)]^{1/2} \quad (A5)$$

Ponendo  $\rho = 0$ , si ottiene un valore del rapporto tensionale uguale a quello che si ricava in corrispondenza di  $\beta = 0^\circ$ . Anche la (A5) è praticamente coincidente con l'equazione di una retta che interpola bene i punti sperimentali. Il valore di  $\alpha$  può essere determinato adattando le relazioni (A3) e (A5) ai risultati sperimentali.

È bene notare che il rapporto tensionale a rottura per  $\beta = 0^\circ$  è più grande di quello per  $\beta = 90^\circ$ , se  $\alpha < \delta$  e viceversa.

I valori di  $\alpha$  e di  $\delta$  possono, secondo il suggerimento di Nova, essere leggermente modificati per ottenere un miglior adattamento ai risultati sperimentali per altri valori di  $\beta$ , se necessario.

2) In alternativa  $\alpha$  e  $\delta$  possono essere ricavati dai risultati delle prove a compressione monoassiale, se disponibili. Infatti, dalla relazione (A4) si ha (ponendo  $\sigma_3 = 0$ ):

$$\alpha = \frac{\sigma_{1/90}^2}{4 c_t (c_t + 2 \mu_t \sigma_{1/90})} \quad (A6)$$

e, dalla (A2):

$$\delta = \frac{\frac{\sigma_{1/0}^2}{4 c_t} - \frac{\sigma_{1/90}^2}{4 (c_t + 2 \mu_t \sigma_{1/90})}}{2 \mu_t \sigma_{1/0}} \quad (A7)$$

dove  $\sigma_{1/0}$  e  $\sigma_{1/90}$  sono i valori degli sforzi principali maggiori a rottura quando  $\beta = 0^\circ$  e  $\beta = 90^\circ$  rispettivamente.

Questo secondo procedimento dovrebbe essere evitato, secondo Nova (1980), se la variazione di resistenza con l'orientazione è riferita a pressioni di confinamento relativamente alte.

I valori di  $\alpha$  e  $\delta$  possono anche essere determinati attraverso una procedura di identificazione rigorosa basata sul metodo dei minimi quadrati, ma le due procedure sopra descritte forniscono un grado di accuratezza sufficiente per la maggior parte dei problemi pratici.

#### Criterio di Hoek e Brown

I parametri da determinare sono:

$$\sigma_c, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3.$$

• Come valore di  $\sigma_c$  (resistenza a compressione monoassiale della roccia intatta) si ritiene approssimativamente corretto assumere il valore sperimentale ottenuto da una prova a compressione monoassiale in corrispondenza dell'inclinazione  $\beta = 90^\circ$  (o  $\beta = 0^\circ$ ), cioè il valore massimo di  $\sigma_1$  per  $\sigma_3 = 0^\circ$ . Tale inclinazione è dunque quella a cui corrisponde l'involuppo caratteristico della roccia intatta. Si assume quindi, per  $\beta = 90^\circ$  (o  $\beta = 0^\circ$ ),  $s = 1$ .

• Per arrivare alla determinazione di  $N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3$ , è necessario prima ricavare i valori di  $m$  e di  $s$  in corrispondenza delle varie inclinazioni. A questo scopo si esprima la relazione (9) nel modo seguente:

$$y = m \sigma_c x + s \sigma_c^2 \quad (A8)$$

dove:

$$\begin{aligned} y &= (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \\ x &= \sigma_3 \end{aligned}$$

Tramite regressione lineare, per ogni inclinazione, si otterranno i valori di  $m \sigma_c$  e  $\sigma_c^2$  e quindi i valori di  $m$  e di  $s$ .

Si noti che, nel caso non si abbiano a disposizione risultati di prove a compressione monoassiale per la determinazione di  $\sigma_c$ , dalla regressione lineare in corrispondenza di  $\beta = 90^\circ$  (o  $\beta = 0^\circ$ ), si possono determinare  $m$  e  $\sigma_c$ , anziché  $m$  ed  $s$ , dal momento che  $s$  è noto.

Considerando che per le relazioni (12) e (13) si ha:

$$\text{per } \beta = \beta_m \rightarrow \theta = 0$$

$$\text{per } \beta = \beta_s \rightarrow \zeta = 0$$

e dalle relazioni (10) e (11) è:

$$\theta = \left[ \log_e \left( \frac{N_1}{1 - m/m_i} \right) \right]^{1/4} \quad (A9)$$

$$\zeta = \left[ \log_e \left( \frac{P_1}{1 - s} \right) \right]^{1/4} \quad (A10)$$

quindi:

$$\theta = 0 \quad \text{per} \quad \frac{N_1}{1 - m/m_i} = 1$$

$$\zeta = 0 \quad \text{per} \quad \frac{P_1}{1 - s} = 1$$

Perciò  $N_1$  e  $P_1$  saranno dati da:

$$N_1 = \left( 1 - \frac{m_{\min}}{m_i} \right)$$

$$P_1 = \left( 1 - s_{\min} \right)$$

Dalle relazioni (A9) e (A10) si determinino ora i valori di  $\theta$  e di  $\zeta$  alle varie inclinazioni utilizzando i valori di  $m$  e di  $s$  corrispondenti.

Riscrivendo le relazioni (12) e (13) nel modo seguente:

$$y^* = N_2 + N_3 x$$

$$y^{**} = P_2 + P_3 x$$

dove:

$$y^* = \frac{\beta - \beta_m}{\theta}$$

$$y^{**} = \frac{\beta - \beta_s}{\zeta}$$

$$x = \beta$$

tramite regressione lineare si otterranno i valori di  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ .

## SUMMARY

### Shear strength of anisotropic rock in triaxial compression

The present paper is devoted to the anisotropy of rocks, with reference to strength properties. The most important strength criteria, accounting for transversal anisotropy, have been reviewed: (1) the Coulomb criterion, as modified by Jaeger to account for anisotropy; (2) the Nova-Sacchi criterion; and (3) the Hoek-Brown criterion. These criteria have been used firstly to interpret a number of experimental results available in Rock Mechanics literature. Then, they have been applied to analyse a set of results obtained during testing of the «Luserna» gneiss, under both uniaxial and triaxial compressive conditions.

A number of conclusions have been drawn with reference to the use of these criteria when interpreting experimental results for rock materials exhibiting an anisotropic behaviour. It is shown that, for all the rock types considered (Martinsburg slate, Coninston slate, Penrhyn slate, Austin slate, and Luserna gneiss), the Coulomb criterion (modified) does not always allow for an appropriate representation of the experimental data (Figures 4, 7, 10, 13, 16). The best fit is obtained for this criterion when considering sliding in slates along the plane of anisotropy. The strength anisotropic behaviour of the Luserna gneiss is not satisfactorily captured (Figure 16). A possible explanation for this is found in the peculiar strength anisotropy of this rock, where the anisotropic behaviour is not comparatively strong.

A better fitting of the experimental data is obtained when using both the Nova-Sacchi (Figures 5, 8, 11, 14, 17) and the Hoek-Brown (Figures 6, 9, 12, 15, 18) criteria for all the rock types considered. However, given the empirical basis of the latter, where no specific «a priori» rupture mechanism is assumed as the Nova-Sacchi criterion, the Hoek-Brown criterion gives the most representative interpretation.