

Sulla stabilità elastica di travi su suolo a due parametri

M. LEMBO*

SOMMARIO: Il modello a due parametri di suolo elastico definisce le proprietà del suolo mediante due costanti meccaniche indipendenti e, poiché consente la presenza di sforzi di taglio, conferisce continuità al mezzo di fondazione. Esso, pertanto, rispetto al più semplice modello di Winkler, fornisce una rappresentazione del suolo più aderente al comportamento reale. Nel presente studio si esamina il problema di travi, in diverse condizioni di vincolo, poggianti su di un mezzo a due parametri e soggette a carichi assiali, discutendo le condizioni per l'insorgere di fenomeni di instabilità e determinando i valori del carico critico in relazione alle caratteristiche del complesso trave-suolo di fondazione. I valori critici del carico assiale sono, infine, posti a confronto con quelli conseguenti all'adozione del classico modello di Winkler.

1. Introduzione

In una precedente nota [LEMBO, 1987] si è preso in esame il modello di suolo elastico denominato «a due parametri», che consente di definire il comportamento meccanico del terreno mediante l'impiego di due costanti, allo scopo di determinare le rigidità di travi poggianti su di un tale letto elastico ed utilizzare le stesse per il calcolo di alcune semplici strutture; i risultati ottenuti sono stati, quindi, posti a confronto con quelli derivanti dall'impiego della classica schematizzazione di Winkler.

Nel presente studio si considera il problema della trave soggetta a carichi assiali e solidale ad un piano di fondazione rappresentato dal sistema elastico a due parametri, al fine di studiare le condizioni per la stabilità dell'equilibrio in diverse ipotesi di vincolo.

2. La trave su mezzo elastico in presenza di sforzo normale

Si consideri una trave, omogenea di sezione costante, poggiante su mezzo elastico (fig. 1), soggetta al carico trasversale di intensità $q(z)$ per unità di lunghezza, positivo se nel verso dell'asse y , alla reazione per unità di lunghezza del letto elastico $r(z)$, positiva se di verso opposto a y , allo sforzo normale N , positivo se di trazione.

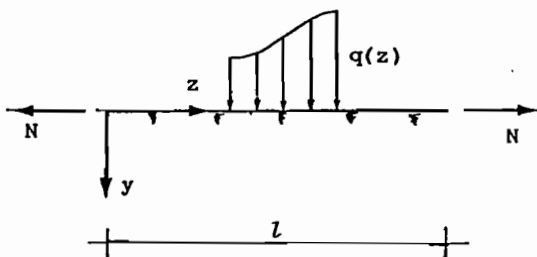


Fig. 1

L'equilibrio, alla traslazione verticale ed alla rotazione, di un elemento di trave di lunghezza dz (fig. 2), richiede che

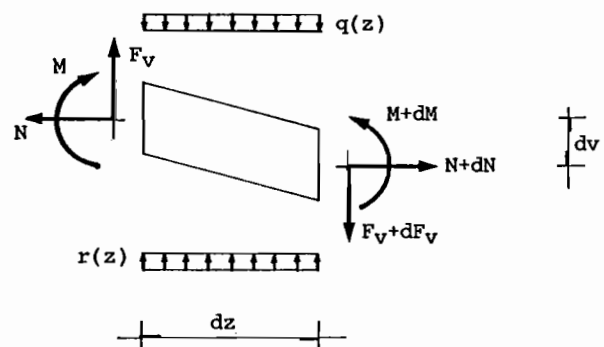


Fig. 2

$$\frac{dF_v}{dz} = r(z) - q(z) \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dz} + N \frac{dv}{dz} - F_v = 0 \quad (2)$$

La relazione tra F_v , componente verticale della risultante delle forze esercitate sulla sezione, ed il taglio T , componente secondo la normale alla linea elastica della medesima risultante, è espressa (fig. 3) da

$$T = F_v \cos \varphi + N \sin \varphi \approx F_v - N_v' \quad (3)$$

Derivando la (2) e sostituendo in essa F_v dalla (1), si ottiene l'equazione differenziale della linea elastica della trave:

$$EIv''''(z) - Nv''(z) = q(z) - r(z), \quad (4)$$

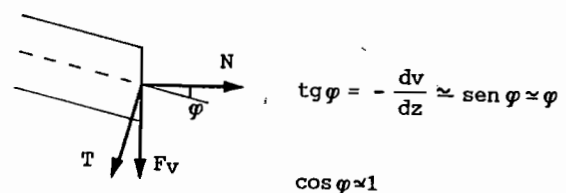


Fig. 3

* Dott. Ing. Marzio LEMBO - Dipartimento di Ingegneria Civile Edile - II Università degli Studi di Roma.

nella quale E è il modulo elastico del materiale costituente la trave ed I è il momento d'inerzia della sezione retta.

Se si adotta, per il letto di fondazione, la rappresentazione espressa dal modello a due parametri, la reazione del suolo per unità di lunghezza, detta b la larghezza della trave, si particolarizza in [LEMBO, 1986]:

$$r(z) = -Wv(z) + Pv''(z) \quad (5)$$

con

$$W = kb, \quad (6)$$

$$P = \bar{k}b, \quad (7)$$

nelle quali k è la costante positiva, dalle dimensioni fisiche di forza/volume, che corrisponde al «coefficiente di sottofondo» di Winkler, e \bar{k} è la seconda costante, non negativa e dalle dimensioni di forza/lunghezza, che consente di tener conto della resistenza del suolo agli scorrimenti verticali.

La (4), pertanto, diviene:

$$EIv''''(z) - (N+P)v''(z) + Wv(z) = q(z). \quad (8)$$

L'equazione algebrica, corrispondente all'omogenea associata alla (8), può porsi nella forma

$$s^4 - 4\omega\alpha^2s^2 + 4\alpha^4 = 0, \quad (9)$$

essendo

$$\alpha^4 = W/(4EI) > 0, \quad (10)$$

$$\omega = (P+N) / (2\sqrt{WEI}). \quad (11)$$

Si osservi che, al tendere di N a 0, la (8) e la (11) tendono alle rispettive relazioni valide per la trave su suolo a due parametri in presenza del solo carico trasversale [LEMBO, 1986]; al tendere di P a 0, la (8) e la (11) si riducono, rispettivamente, a

$$EIv''''(z) - Nv''(z) + Wv(z) = q(z), \quad (12)$$

$$\omega = N/(2\sqrt{WEI}), \quad (13)$$

valide [HETENYI, 1946] per la trave su suolo di Winkler soggetta al carico trasversale $q(z)$ ed allo sforzo normale N ; al tendere a zero sia di P sia di N , si ritrova l'equazione della trave su suolo di Winkler in presenza di solo carico trasversale.

Pur essendo il termine P non negativo, il coefficiente ω può assumere, in relazione all'entità di N , anche valori negativi. In dipendenza del valore assunto dal discriminante $\Delta = 4\alpha^4(\omega^2 - 1)$, la (9) presenta:

- quattro radici reali e distinte, per $\omega > 1$;
- due radici reali doppie, una positiva ed una negativa, per $\omega = 1$;
- quattro radici, a due a due complesse coniugate, per $1 > \omega > -1$;

- due radici immaginarie doppie, per $\omega = -1$;
- quattro radici immaginarie e distinte, per $\omega < -1$.

In ciascuno dei casi predetti, l'integrale dell'omogenea associata alla (8) ha, rispettivamente, l'espressione:

a) per $(P+N) > 2\sqrt{WEI}$

$$v(z) = A\cosh(\alpha\beta z)\cosh(\alpha\delta z) + B\sinh(\alpha\beta z)\cosh(\alpha\delta z) + C\cosh(\alpha\beta z)\sinh(\alpha\delta z) + D\sinh(\alpha\beta z)\sinh(\alpha\delta z);$$

b) per $(P+N) = 2\sqrt{WEI}$

$$v(z) = A\cosh(\alpha\beta z) + B\sinh(\alpha\beta z) + Cz\cosh(\alpha\beta z) + Dz\sinh(\alpha\beta z);$$

c) per $2\sqrt{WEI} > (P+N) > -2\sqrt{WEI}$

$$v(z) = A\cosh(\alpha\beta z)\cos(\alpha\gamma z) + B\sinh(\alpha\beta z)\cos(\alpha\gamma z) + C\cosh(\alpha\beta z)\sin(\alpha\gamma z) + D\sinh(\alpha\beta z)\sin(\alpha\gamma z);$$

d) per $(P+N) = -2\sqrt{WEI}$

$$v(z) = A\cos(\alpha\gamma z) + Bz\cos(\alpha\gamma z) + C\sin(\alpha\gamma z) + Dz\sin(\alpha\gamma z);$$

e) per $(P+N) < -2\sqrt{WEI}$

$$v(z) = A\cos(\alpha\varepsilon z)\cos(\alpha\gamma z) + B\sin(\alpha\varepsilon z)\cos(\alpha\gamma z) + C\cos(\alpha\varepsilon z)\sin(\alpha\gamma z) + D\sin(\alpha\varepsilon z)\sin(\alpha\gamma z);$$

essendo:

$$\beta = (1+\omega)^{1/2} > 0, \text{ per } \omega > -1;$$

$$\gamma = (1-\omega)^{1/2} > 0, \text{ per } \omega < 1;$$

$$\delta = (\omega-1)^{1/2} > 0, \text{ per } \omega > 1;$$

$$\varepsilon = (-1-\omega)^{1/2} > 0, \text{ per } \omega < -1.$$

La determinazione delle costanti di integrazione si ottiene imponendo le appropriate condizioni ai limiti. Occorre in ciò tener conto della presenza del taglio trasmesso dal suolo e della relazione, espressa dalla (3), tra taglio e forza verticale nella trave. Nelle condizioni ai limiti si fa ricorso, quindi, al taglio generalizzato verticale $Q_v(z)$:

$$Q_v(z) = F_v(z) + Pv'(z) = T(z) + (P+N)v'(z). \quad (14)$$

Ad esempio, le condizioni ai limiti per una trave con estremi liberi (fig. 4) sono

a) per $z = 0$

$$M(0) = 0, \text{ e}$$

$$Q_v^{(-)}(0) - Q_v^{(+)}(0) = F_1, \text{ che comporta}$$

$$EI'''(0) = F_1 + (P+N)v'(0) - P\mu v(0);$$

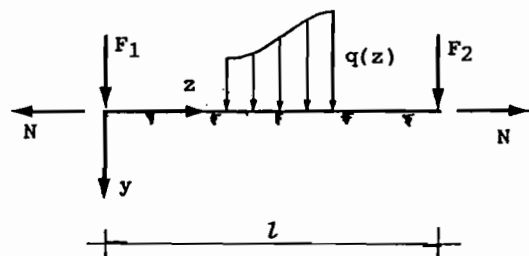


Fig. 4

b) per $z = l$

$$M(l) = 0, \text{ e}$$

$$Q_v^{(-)}(l) - Q_v^{(+)}(l) = F_2, \text{ che comporta}$$

$$-EIv'''(l) = F_2 - (P + N)v'(l) - P\mu v(l);$$

avendo indicato con $Q_v^{(-)}(z)$ e $Q_v^{(+)}(z)$ il taglio generalizzato verticale a sinistra e a destra della sezione all'ascissa z , e con μ il parametro definito da

$$\mu = \sqrt{k/\bar{k}}. \quad 15$$

3. La stabilità della trave su suolo elastico a due parametri

Nei paragrafi che seguono si esamina il problema della stabilità dell'equilibrio della trave su suolo elastico a due parametri, variamente vincolata agli estremi e soggetta ad una forza assiale F , positiva se di compressione, al fine di determinare il carico critico, ossia il più piccolo valore di F che da luogo ad una configurazione di equilibrio diversa dalla rettilinea.

3.1. La trave con due incastri

Si consideri (fig. 5) una trave vincolata con due incastri agli estremi e soggetta, oltre che alla forza $F = -N > 0$, ad un cedimento angolare anelastico φ_A , operante nella sezione $z=0$.

La coppia di reazione del vincolo in A può esprimersi nella forma:

$$M_A = \rho_{AB} \cdot \varphi_A, \quad (16)$$

in cui ρ_{AB} è la rigidezza flessionale della trave, ottenibile dall'integrazione della (8), associata alle condizioni ai limiti

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0,$$

$$v'(0) = -\varphi_A, \quad v'(l) = 0.$$

Dalla (16) appare che, al tendere a zero della distorsione φ_A (vale a dire riducendosi l'azione esterna alla sola forza F), la coppia M_A può assumere valore non nullo a condizione che la rigidezza ρ_{AB} tenda all'infinito. Poiché, per $(P + N)$ maggiore di $-2\sqrt{WEI}$, risulta

$$\rho_{AB} = \frac{4EI}{l} \cdot \frac{\lambda\beta\gamma [\gamma\sinh(\beta\lambda)\cosh(\beta\lambda) - \beta\sin(\gamma\lambda)\cos(\gamma\lambda)]}{2[\gamma^2\sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2\sin^2(\gamma\lambda)]}, \quad (17)$$

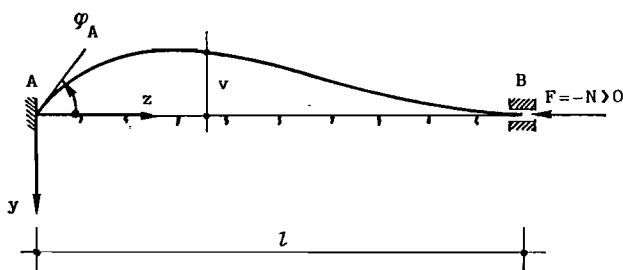


Fig. 5

essendo $\lambda = \alpha l$, la condizione affinché possa verificarsi instabilità è espressa dalla relazione

$$\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda) = 0, \quad (18)$$

e cioè

$$\gamma \sinh(\beta\lambda) \pm \beta \sin(\gamma\lambda) = 0. \quad (19)$$

Poiché β e γ sono positivi, risulta

$$\beta\lambda < \sinh(\beta\lambda) \text{ e } \sin(\gamma\lambda) < \gamma\lambda;$$

pertanto la (19) non ammette soluzioni reali. Ciò comporta l'impossibilità dell'insorgere di fenomeni di instabilità quando risulta $(P + N) > -2\sqrt{WEI}$. L'equazione che corrisponde alla (19) per valori di $(P + N) < -2\sqrt{WEI}$ è

$$\varepsilon \sin(\gamma\lambda) \pm \gamma \sin(\varepsilon\lambda) = 0. \quad (20)$$

Introducendo le variabili

$$N' = N + P$$

$$\xi = N'_{cr} l^2 / (\pi^2 EI) = N'_{cr} / N_e \quad (21)$$

$$\eta = \sqrt{W l^4 / (EI)}$$

con $F_e = -N_e = \pi^2 EI / l^2$, carico critico euleriano per la trave con estremi appoggiati in assenza di suolo elastico, e sostituendo nella (20), si ottiene:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\pi^2 \xi + \eta}}{\sin \frac{1}{2} \sqrt{\pi^2 \xi - \eta}} = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 \xi + 2\eta}}{\sqrt{\pi^2 \xi - 2\eta}} \quad (22)$$

nella quale il segno + corrisponde a deformata antisimmetrica ed il segno - a deformata simmetrica.

Nella figura 6 sono riportate in diagramma le relazioni (22). Le curve relative si intersecano in punti appartenenti alla retta

$$\eta = \frac{\pi^2}{2} (\xi - 4)$$

I diagrammi della figura permettono la valutazione, tramite le (21), del carico critico F_{cr} : per un assegnato sistema trave-suolo di fondazione è definito il valore di η ; dal diagramma è possibile, quindi, determinare il corrispondente valore di ξ (quello di minore ascissa), dal quale si deduce N'_{cr} . Il carico critico risulta:

$$F_{cr} = -N_{cr} = -(N'_{cr} - P).$$

Si osservi che il grafico di figura 6 coincide con quello riportato in [HETENYI, 1946] per la determinazione del carico critico della trave su suolo di Winkler.

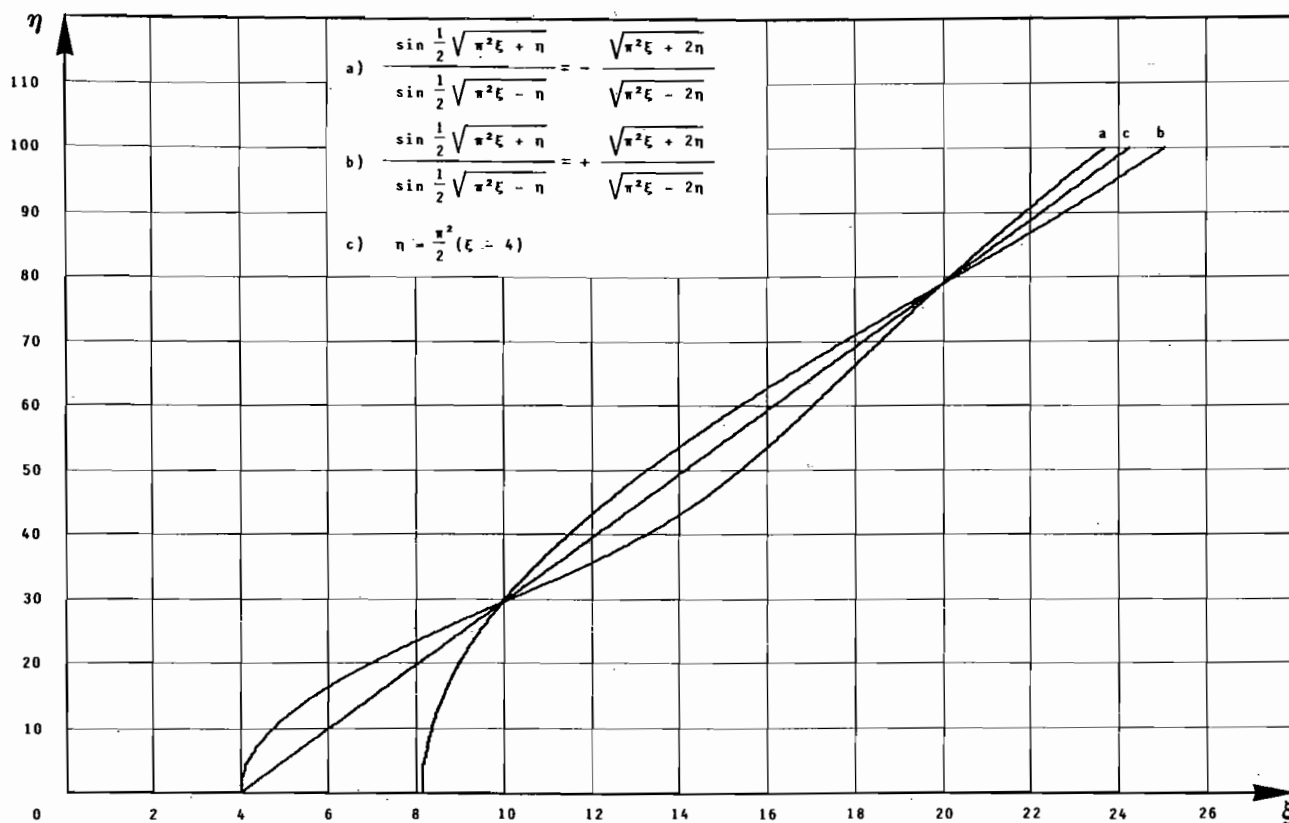


Fig. 6

3.2. La trave con incastro ed appoggio

Si consideri una trave vincolata ad un estremo con incastro ed all'altro con appoggio. Le sollecitazioni siano costituite dalla forza assiale di compressione F e da una coppia M_B agente nella sezione $z=l$ (fig. 7). Per effetto dei carichi applicati si abbia in B la rotazione φ_B .

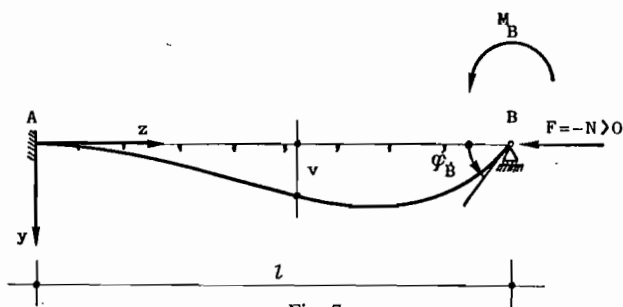


Fig. 7

Lo schema statico è equivalente a quello di una trave vincolata con due incastri alle estremità e soggetta, oltre che alla forza assiale F , all'azione, nella sezione B , di un cedimento angolare anelastico di ampiezza φ_B (fig. 8).

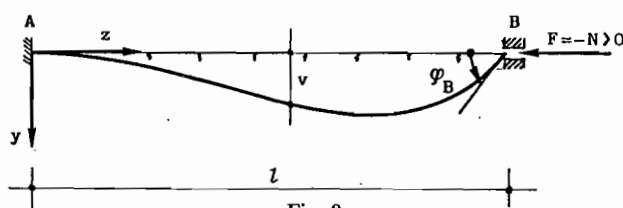


Fig. 8

La relazione tra M_B e φ_B è quindi espressa da:

$$\varphi_B = M_B / \rho_{BA}. \quad (23)$$

Dalla (23) si deduce che al tendere a zero di M_B (ossia riducendosi l'azione esterna alla sola F), la trave presenta nell'estremo B una rotazione non nulla (e quindi una deformata non rettilinea) a condizione che anche ρ_{BA} risulti infinitesimo. Ciò richiede (cfr. (17)) che sia, per $(P+N) > -2\sqrt{WEI}$:

$$\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda) = 0,$$

e cioè

$$\gamma \sinh(2\beta\lambda) - \beta \sin(2\gamma\lambda) = 0. \quad (24)$$

La (24) non ammette soluzioni reali. L'equazione corrispondente nel caso di $(P+N) < -2\sqrt{WEI}$ è la

$$\epsilon \sin(2\gamma\lambda) - \gamma \sin(2\epsilon\lambda) = 0,$$

la quale, con la sostituzione delle variabili adimensionali ξ ed η definite dalle (21), diviene:

$$\frac{\sin \sqrt{\pi^2 \xi + 2\eta}}{\sin \sqrt{\pi^2 \xi - 2\eta}} = \frac{\sqrt{\pi^2 \xi + 2\eta}}{\sqrt{\pi^2 \xi - 2\eta}} \quad (25)$$

In figura 9 è riportata in diagramma la (25) nel piano $\xi - \eta$, unitamente alla retta

$$\eta = \frac{\pi^2}{2} (\xi - 1)$$

che bene ne approssima l'andamento.

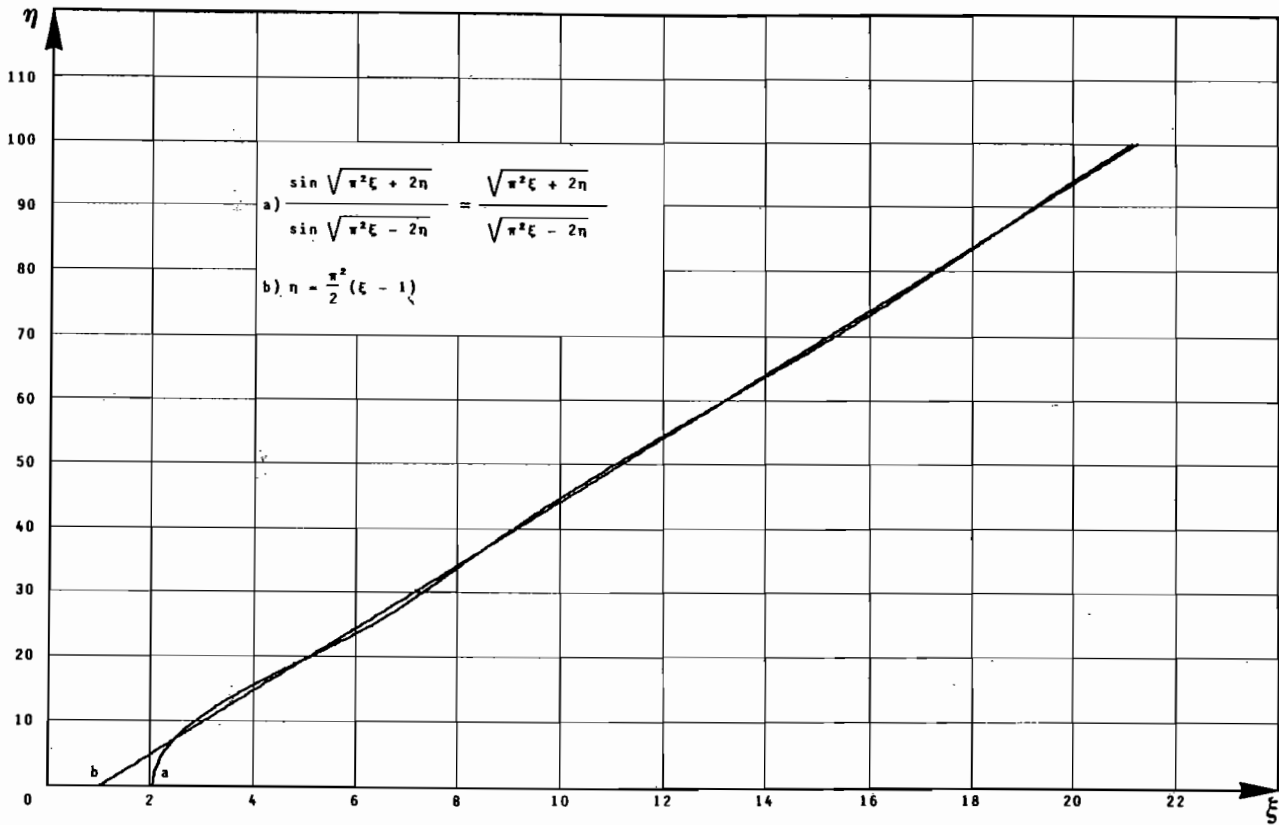


Fig. 9

3.3. La trave con incastro e bipendolo

La trave in esame sia vincolata ad un estremo con incastro ed all'altro con bipendolo. L'azione esterna sia costituita dalla forza assiale $F = -N > 0$, e dalla forza verticale F_B , operante all'estremità $z=1$ della trave. Lo spostamento nella sezione $z=1$, in conseguenza dell'azione dei carichi, applicati sia v_B (fig. 10).

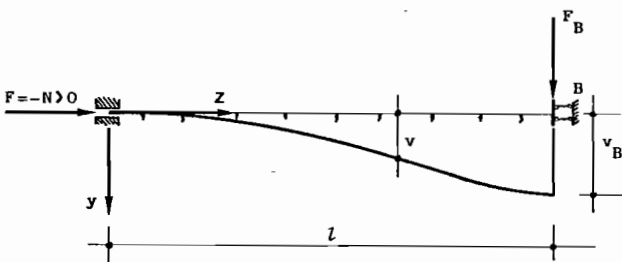


Fig. 10

Lo schema considerato è staticamente equivalente a quello della trave vincolata con due incastri e soggetta, oltre che alla forza F , ad un cedimento verticale anelastico $\delta = v_B$ del vincolo in B (fig. 11).

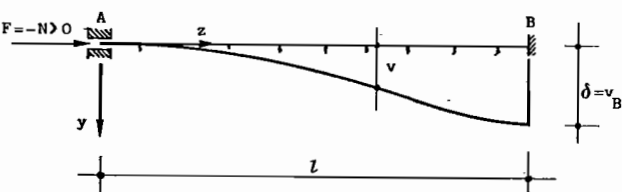


Fig. 11

Detta s_{BA} la rigidezza a taglio della trave con due incastri, la relazione tra F_B e v_B è quindi espressa da:

$$v_B = F_B / s_{BA}. \quad (26)$$

La (26) mostra che, al tendere di F_B a zero, lo spostamento in B può avere valore non nullo purché tenda a zero anche la rigidezza s_{BA} . Questa, supponendo che il vincolo in B sia di estremità, nel caso che risulti $(P + N) > -2\sqrt{WEI}$, è fornita da

$$s_{BA} = \frac{6EI \lambda^3}{1^3 3} \left\{ \frac{\beta\gamma [\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)]}{\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)} + \zeta \right\} \quad (27)$$

essendo

$$\zeta = \alpha / \mu. \quad (28)$$

Affinché la trave presenti fenomeni di instabilità si richiede, quindi, che sia

$$\beta\gamma [\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)] + \zeta [\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)] = 0. \quad (29)$$

Poiché risulta

$$\begin{aligned} \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad \zeta \geq 0, \\ \gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda) > 0, \\ \gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda) > 0, \end{aligned}$$

il primo membro della (29) è somma di un termine

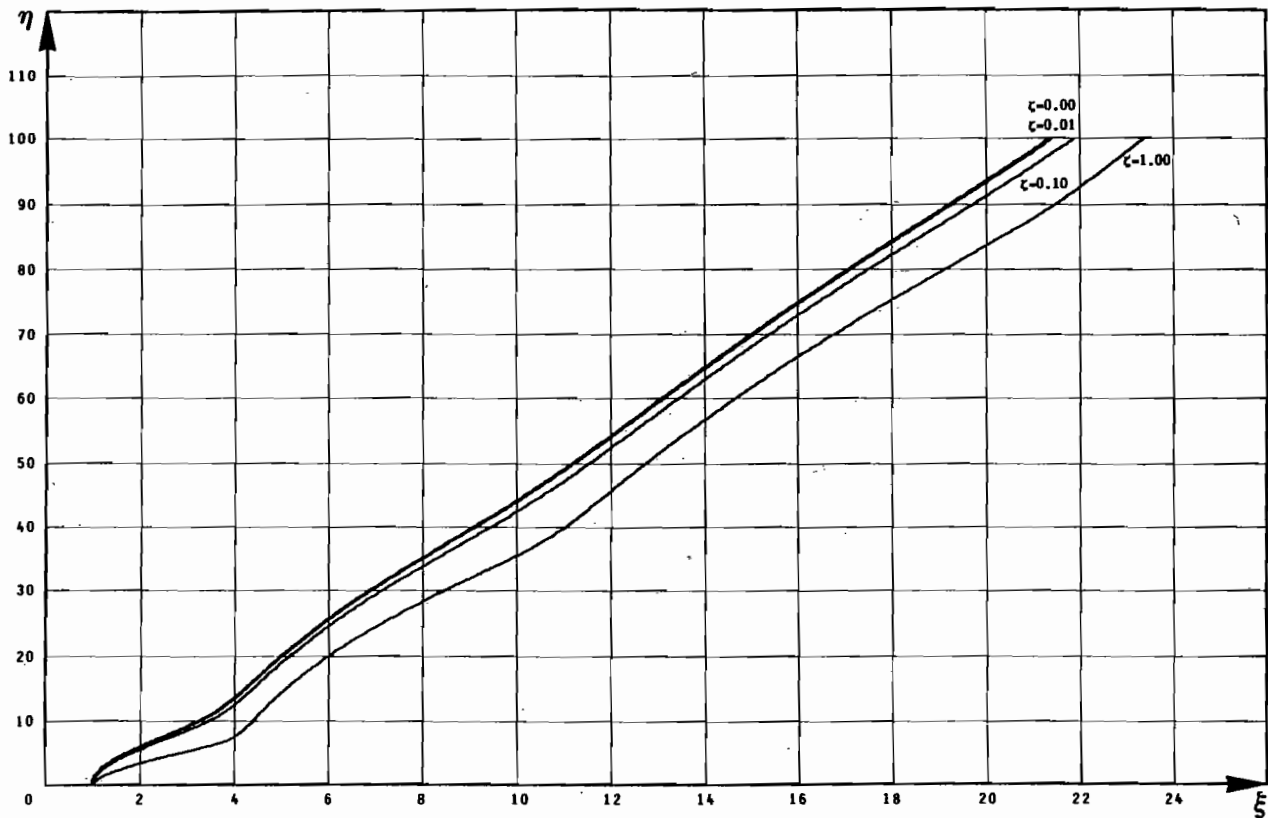


Fig. 12

positivo e di uno non negativo per cui non può annullarsi.

Per valori di $(P + N)$ minori di $-2\sqrt{WEI}$, l'equazione corrispondente alla (29) è:

$$\varepsilon\gamma [\gamma\sin(\varepsilon\lambda)\cos(\varepsilon\lambda) + \varepsilon\sin(\gamma\lambda)\cos(\gamma\lambda)] + \zeta[\gamma^2\sin^2(\varepsilon\lambda) - \varepsilon^2\sin^2(\gamma\lambda)] = 0; \quad (30)$$

ossia,

$$\frac{\sin(2\gamma\lambda) - 2\frac{\zeta}{\gamma}\sin^2(\gamma\lambda)}{\sin(2\varepsilon\lambda) + 2\frac{\zeta}{\varepsilon}\sin^2(\varepsilon\lambda)} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \quad (31)$$

Sostituendo nella (31) le variabili adimensionali ξ ed η precedentemente introdotte, si perviene alla

$$\frac{\sin\sqrt{\pi^2\xi+2\eta} - \zeta\frac{2\sqrt{2\eta}}{\sqrt{\pi^2\xi+2\eta}}\sin^2\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2\xi+2\eta}}{\sin\sqrt{\pi^2\xi-2\eta} + \zeta\frac{2\sqrt{2\eta}}{\sqrt{\pi^2\xi-2\eta}}\sin^2\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2\xi-2\eta}} = -\frac{\sqrt{\pi^2\xi+2\eta}}{\sqrt{\pi^2\xi-2\eta}} \quad (32)$$

Nella figura 12 sono riportate in diagramma, nel piano $\xi - \eta$, le curve rappresentate dalla (32), per diversi valori di ζ . In particolare, la curva relativa al valore $\zeta = 0$ corrisponde al caso del bipendolo interno per $\omega = (P + N)/(2\sqrt{WEI})$, ed al caso della trave su suolo di Winkler per $\omega = N/(2\sqrt{WEI})$.

3.4. La trave vincolata con incastro ad un estremo e libera all'altro

La trave su suolo elastico, vincolata ad un estremo con incastro e libera all'altro, sia impegnata

dalla forza assiale di compressione $F = -N > 0$ e dalla forza verticale F_B agente nella sezione $z = l$ (fig. 13). La sezione di applicazione della forza F_B subisce lo spostamento v_B .

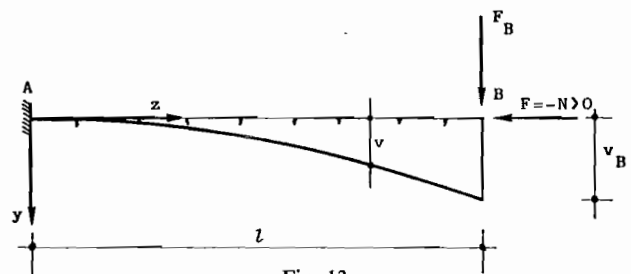


Fig. 13

La condizione è equivalente a quella della trave che presenti in B un appoggio e che soggetta alla forza F , subisca un cedimento verticale anelastico $\delta = v_B$ dell'appoggio stesso (fig. 14).

La relazione tra F_B e v_B è pertanto:

$$v_B = F_B / S_{BA}, \quad (33)$$

ove, per valori di $(P + N) > -2\sqrt{WEI}$, si ha:

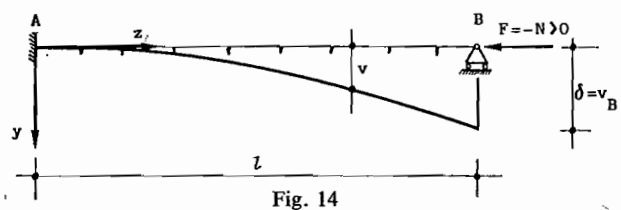


Fig. 14

$$s_{BA} = \frac{3EI}{l^3} \frac{\lambda^3}{3\beta\gamma} \left(\frac{(\beta^2 - \gamma^2) [\beta^2 \sin^2(\gamma\lambda) + \gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda)] + 2\beta^2\gamma^2 [\cosh^2(\beta\lambda) + \cos^2(\gamma\lambda)]}{\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)} + 4\beta\gamma\zeta \right) \quad (34)$$

Dalle (33) e (34) si trae che, al tendere a zero di F_B , la trave in esame può presentare una configurazione variata purché risulti infinitesimo anche s_{BA} , e cioè purché si abbia:

$$\frac{(\beta^2 - 3\gamma^2) \sin^2(\gamma\lambda) - 2\gamma\zeta \sin(2\gamma\lambda) + 2\gamma^2}{(3\beta^2 - \gamma^2) \sinh^2(\beta\lambda) + 2\beta\zeta \sinh(2\beta\lambda) + 2\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\beta^2} = 0. \quad (35)$$

A differenza delle analoghe espressioni che si sono ritrovate nelle condizioni di vincolo esaminate in precedenza, la (35) può, per opportuni valori di η e di ξ , essere soddisfatta anche da soluzioni reali.

Pertanto, la trave, nelle condizioni di vincolo considerate, può presentare fenomeni di instabilità anche per valori di N' maggiori di $-2\sqrt{WEI}$.

L'equazione che corrisponde alla (35) per valori di $(P+N) < -2\sqrt{WEI}$ è la:

$$\frac{(\epsilon^2 + 3\gamma^2) \sin^2(\gamma\lambda) + 2\gamma\zeta \sin(2\gamma\lambda) - 2\gamma^2}{(3\epsilon^2 + \gamma^2) \sin^2(\epsilon\lambda) - 2\epsilon\zeta \sin(2\epsilon\lambda) - 2\epsilon^2} + \frac{\gamma^2}{\epsilon^2} = 0. \quad (36)$$

Effettuando nelle (35) e (36) la sostituzione delle variabili adimensionali ξ ed η definite dalle (21), si ottengono, rispettivamente, le seguenti espressioni:

$$\frac{-(\pi^2\xi + \eta) \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi^2\xi + 2\eta} - \zeta \frac{\sqrt{\eta} \sqrt{\pi^2\xi + 2\eta}}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{\pi^2\xi + 2\eta} + \frac{1}{2} (\pi^2\xi + 2\eta)}{(\eta - \pi^2\xi) \sinh^2 \frac{1}{2} \sqrt{2\eta - \pi^2\xi} - \zeta \frac{\sqrt{\eta} \sqrt{2\eta - \pi^2\xi}}{\sqrt{2}} \sinh \sqrt{2\eta - \pi^2\xi} + \frac{1}{2} (2\eta - \pi^2\xi)} + \frac{2\eta + \pi^2\xi}{2\eta - \pi^2\xi} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{(\pi^2\xi + \eta) \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi^2\xi + 2\eta} + \zeta \frac{\sqrt{\eta} \sqrt{\pi^2\xi + 2\eta}}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{\pi^2\xi + 2\eta} - \frac{1}{2} (\pi^2\xi + 2\eta)}{(\pi^2\xi - \eta) \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{\pi^2\xi - 2\eta} - \zeta \frac{\sqrt{\eta} \sqrt{\pi^2\xi - 2\eta}}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{\pi^2\xi - 2\eta} - \frac{1}{2} (\pi^2\xi - 2\eta)} + \frac{\pi^2\xi + 2\eta}{\pi^2\xi - 2\eta} = 0. \quad (38)$$

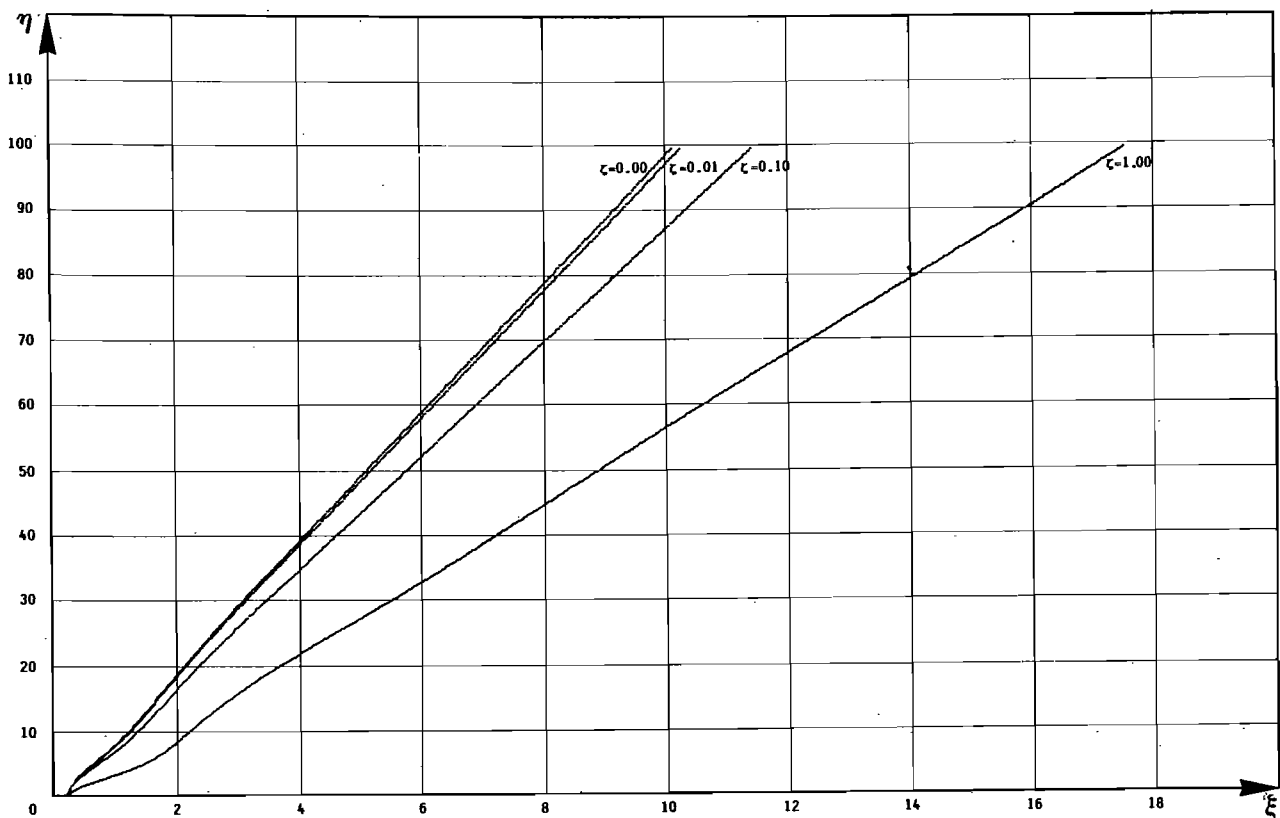


Fig. 15

Nella figura 15 sono tracciate, per diversi valori di ζ , le curve rappresentate dalle (37) e (38). La curva relativa a $\zeta=0$ corrisponde, per $\omega=N/(2\sqrt{WEI})$, al caso della trave su suolo di Winkler. In figura è riportata anche la retta

$$\pi^2\xi - 2\eta = 0,$$

la quale separa il campo di validità della (37) ($\eta > \pi^2\xi/2$), da quello della (38) ($\eta < \pi^2\xi/2$).

Nel caso di suolo di Winkler le trattazioni restano valide sostituendo N' con N ed annullando i termini che contengono il parametro ζ .

3.5. Confronto con la trave su suolo di Winkler

I diagrammi delle figure 12 e 15, relativi a travi con un estremo vincolato ad incastro e l'altro vincolato con bipendolo o libero, mostrano come l'adozione del modello a due parametri comporta valori del carico critico F_{cr} più elevati rispetto a quelli relativi al suolo di Winkler: difatti per valori crescenti di \bar{k} ed a parità di η , il punto rappresentativo della crisi si ritrova su di una curva spostata dalla parte degli ξ crescenti, alla quale quindi corrisponde un valore più elevato di N'_{cr} . Anche negli altri casi di vincolo la presenza di suolo a due parametri determina un innalzamento del valore critico della forza F . Detto infatti N'_{cr} il valore di N' corrispondente al carico critico, il valore della forza assiale che sollecita la trave nelle condizioni di crisi è fornito dalla

$$F_{cr} = -N_{cr} = P - N'_{cr}$$

da cui risulta che N_{cr} è quantità negativa e decrescente con P e quindi che in presenza di suolo a due parametri lo sforzo normale di crisi è superiore a quello che si avrebbe su suolo di Winkler.

Gli effetti risultano ancora più marcati se si considera anche il comportamento tridimensionale del suolo a due parametri [LEMBO, 1987], e la conseguente amplificazione, nelle formule (6)-(7), della larghezza effettiva della trave.

Con riferimento alle travi vincolate ad un estremo con incastro ed all'altro con incastro, bipendolo od appoggio, la relazione

$$\sum F_i = 0$$

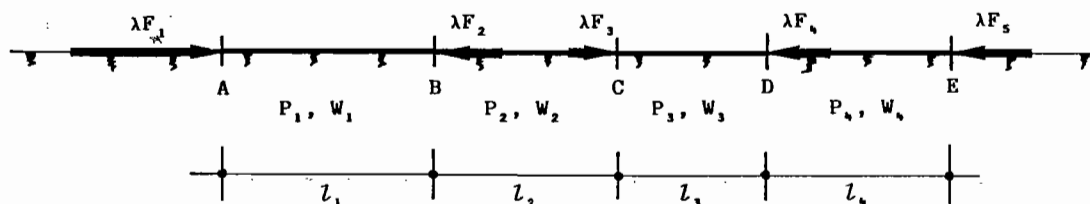


Fig. 17

$$N < -2\sqrt{WEI} - P$$

stabilisce la condizione necessaria affinché possano esistere configurazioni di equilibrio distinte dalla rettilinea. Da essa si trae che il modello a due parametri comporta l'innalzamento della soglia di $|N|$ al di sotto della quale non può verificarsi instabilità.

Al tendere a zero delle caratteristiche meccaniche del suolo, k e \bar{k} , si ha che η tende a zero ed N' ad N . In tali ipotesi, come si rileva anche dai diagrammi delle figure 6, 9, 12 e 15, il carico critico tende al valore del carico critico euleriano (cfr. fig. 16) per la stessa trave in assenza di suolo elastico.

	F_{cr}	ξ
	$\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	4
	$\sim \frac{2\pi^2 EI}{L^2}$	~ 2
	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	1
	$\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	0.25

Fig. 16

4. Cenno al problema della trave a più campate

Si consideri uno schema più complesso come quello di fig. 17. In questo caso non è possibile condurre un'analisi del tipo svolto nelle pagine precedenti. Il valore critico λ_c del moltiplicatore λ delle forze F_i si può, però, determinare come segue. Sia Δ il vettore delle incognite nodali (spostamenti e rotazioni) e \underline{K} la corrispondente matrice delle rigidità variate; dall'equazione di equilibrio

$$\underline{K} \Delta = 0$$

si trae che la condizione critica è espressa da

$$\det(\underline{K}(\lambda)) = 0. \quad (39)$$

Per valori crescenti di λ , si procede, quindi, alla costruzione della matrice \underline{K} ed al calcolo del suo determinante; il valore λ_c di λ che verifica la (39) fornisce la soluzione del problema.

BIBLIOGRAFIA

- HETENYI M. (1946) - *Beams on Elastic Foundation*. Ann Arbor, Michigan.
- LEMBO M. (1986) - *Calcolo dei sistemi di travi su mezzo elastico a due parametri*. DICE 10, Roma.
- LEMBO M. (1987) - *Sul calcolo dell'interazione elastica terreno-struttura per i telai fondati su suolo a due parametri*. Rivista Italiana di Geotecnica, n. 2.
- SELVADURAI A.P.S. (1979) - *Elastic Analysis of Soil - Foundation Interaction*. Elsevier, New York.
- VLASOV V.Z. - LEONT'EV U.N. (1966) - *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundation*. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem.

SUMMARY

On the elastic stability of beams on a two-parameters subsoil

In the present paper the problem of a straight bar resting on a two-parameter elastic medium and loaded by axial compressive forces, is examined. The two-parameter model, which defines the soil behaviour by means of two independent elastic constants, allows the presence of shear stresses in the foundation medium and gives to it a continuous behaviour eliminating this deficiency of the Winkler discontinuous model. For increasing magnitude of the compressive forces, a critical value is reached for which a buckling of the bar takes place. The buckling of bars, subjected to various types of restraints at the ends, is discussed and the critical values of the axial forces, depending on the characteristics of the beam and of the supporting medium, are determined. Buckling loads for beams on two-parameter medium are then compared to the corresponding ones for beams resting on Winkler medium.



Metodi probabilistici nell'ingegneria civile

MILTON E. HARR: *Reliability based design in civil engineering*. McGraw-Hill Book Co., 1987 (c/o ESIA, Via Palestro 50 - Roma)

Nell'ultimo decennio gli ingegneri civili hanno manifestato un crescente interesse per l'analisi probabilistica e le sue applicazioni; lo testimoniano lo sviluppo e la moltiplicazione delle ricerche e la progressiva diffusione dei concetti fondamentali della teoria della probabilità nella letteratura tecnica.

In parte questa tendenza si può collegare allo sviluppo dell'ingegneria sismica, il settore dove sono più evidenti l'indeterminatezza e l'aleatorietà delle azioni applicate alle opere di ingegneria e più diretta è l'esigenza di valutarne in termini probabilistici l'evenienza e l'intensità. In parte è connessa ai recenti progressi della scienza dei materiali (in particolare del calcestruzzo) ed alla migliore conoscenza del grado di indeterminatezza dei parametri che ne descrivono le caratteristiche meccaniche.

In forma generale ed usando termini moderni si può dire che, se l'ingegneria civile ha lo scopo di dare la migliore risposta a precisi problemi della società civile, riguardanti opere ed infrastrutture, è emersa con maggiore chiarezza la necessità di valutare quantitativamente la validità delle soluzioni proposte, in relazione agli obiettivi da conseguire ed ai mezzi impiegati. Per ogni specifico sistema si confronta una *Richiesta R* con una *Capacità C*. Applicando questa terminologia al progetto di una struttura, le azioni che la struttura deve sopportare costituiscono la *Richiesta*, la resistenza della struttura la *Capacità*.

L'impostazione tradizionale della progettazione nell'ingegneria civile è quella di confrontare direttamente *Richiesta* e *Capacità* attraverso il coefficiente di sicurezza, $F = C/R$, presumendo che ad un adeguato valore di $F > 1$ corrisponda la *sicurezza* che l'opera soddisfi i requisiti progettuali. Il valore di F che si ritiene adeguato dipende dalle precedenti esperienze e può tener conto solo indirettamente dell'indeterminatezza, o dell'approssimazione, di cui i valori di C e di R sono affetti. Si spiega così la varietà dei valori di F che normalmente si assumono nella progettazione di varie opere.

I limiti di questa impostazione sono di per sé evidenti. Con l'avvento e lo sviluppo di nuove opere, tipologie strutturali, metodologie costruttive e procedure di analisi, e con il progredire delle tecniche di osservazione e delle conoscenze delle proprietà dei materiali e del comportamento delle strutture, vengono a mancare, o perdono valore, i criteri tradizionali di valutazione della validità di una soluzione progettuale. In particolare non è possibile esprimere questo concetto attraverso

il valore di F , mancando i termini di riferimento in precedenti esperienze.

Occorre poi considerare quanto si sia amplificato negli ultimi anni l'interesse generale per l'ingegneria civile, a causa della sua diretta influenza sulla vita sociale e l'ambiente, e come si siano corrispondentemente accresciuti i vincoli ambientali ed i requisiti di sicurezza imposti alle opere. A queste nuove richieste i metodi tradizionali di progettazione non rispondono in modo soddisfacente. Anzi, essi traducono implicitamente l'idea che con l'assunzione di un determinato coefficiente di sicurezza sia possibile realizzare opere totalmente ed assolutamente sicure, ciò che sappiamo impossibile. Questo concetto errato della sicurezza emerge sistematicamente in ogni caso di rottura di un'opera, o fallimento di un progetto.

Una più moderna filosofia progettuale, che potrà cambiare sostanzialmente questo quadro e fornire risposte corrette e non fuorvianti alle domande sociali, si fonda sulla valutazione quantitativa della validità di una soluzione utilizzando l'analisi probabilistica. In particolare essa permette di definire il grado di affidabilità, o la sicurezza di una struttura, con un numero, la probabilità di collasso, che deriva dall'analisi probabilistica delle azioni cui sarà sottoposta (*Richieste*) e della resistenza che può offrire (*Capacità*).

In questa direzione è già orientata la moderna ingegneria civile, come appare dalla Conferenza Internazionale di Firenze (1983) su «Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering».

Sono già numerose le pubblicazioni scientifiche sull'analisi di affidabilità delle opere di ingegneria e le applicazioni del calcolo delle probabilità. Mancava però un testo non specialistico, di carattere introduttivo, che presentasse l'argomento in termini adatti alla generalità degli ingegneri civili.

Ha queste caratteristiche il libro ora pubblicato da Milton E. HARR, un autore ben noto agli ingegneri geotecnici per le classiche opere sulla filtrazione e sulla meccanica dei mezzi granulari, che già in parte prefigurano gli attuali sviluppi dell'analisi probabilistica. Il libro ha carattere didattico ed è rivolto agli studenti di ingegneria civile, ma è di grande interesse per gli ingegneri già inseriti nella professione, che vogliano riconsiderare le basi concettuali della loro attività di analisi e progettazione.

Nella Presentazione l'A. espone immediatamente gli scopi del libro:

- 1) fornire agli ingegneri civili ed agli studenti i concetti ed i metodi necessari per valutare l'affidabilità dei sistemi di ingegneria;
- 2) fornire i mezzi per aumentare il loro grado di affidabilità;
- 3) presentare questa materia come un corpo di conoscenze organico, logico e sistematico;

4) permettere agli ingegneri di capire l'importanza della teoria della probabilità, in rapporto alle applicazioni pratiche;

5) dare la possibilità di comprendere ed assimilare i futuri sviluppi, attraverso la letteratura tecnica che apparirà in futuro.

Nello sviluppare questi argomenti l'A. ha privilegiato certamente gli aspetti didattici ed i passaggi introduttivi, per mettere il libro alla portata di ogni ingegnere, senza richiederli particolari conoscenze matematiche, o eccessivi sforzi per seguire gli sviluppi analitici.

La materia è suddivisa in 5 capitoli, ognuno dei quali si conclude con numerosissimi esercizi e con listati di semplici programmi di calcolo.

Il primo Capitolo espone i fondamenti del calcolo delle probabilità, procedendo dai concetti più elementari e con le applicazioni di più immediata comprensione, fino all'esame delle distribuzioni continue, di tipo normale. Nel secondo Capitolo si introduce la distribuzione generale «Beta» e si analizzano le relazioni tra variabili aleatorie. Nel terzo si tratta l'analisi dell'affidabilità dei sistemi e se ne definiscono i limiti. Nel quarto si espongono i metodi per l'analisi di affidabilità e nell'ultimo quelli per la sua pratica applicazione nell'ingegneria civile. In ogni capitolo si ha una lenta progressione dai concetti più facili ed immediatamente assimilabili a quelli più complessi, accompagnata da esempi applicativi e da commenti, che in parte esulano dai campi dell'ingegneria civile tradizionale.

L'A. mostra una grande capacità espositiva, soprattutto nel rendere piacevole e interessante ogni aspetto della materia trattata e nel facilitare l'assimilazione di concetti difficili, offrendone originali applicazioni pratiche. È auspicabile che questo testo divenga il supporto didattico di corsi universitari e post-universitari non specialistici, comuni ai diversi settori dell'ingegneria civile, favorendo la necessaria evoluzione degli attuali metodi di analisi e progettazione. È un peccato che la veste tipografica e la carta non siano proporzionate al valore ed al costo (piuttosto elevato) del libro.

(Giovanni Calabresi)

BIBLIOGRAFIA

- M.E. HARR (1962) - *Groundwater and seepage*. McGraw-Hill, New York.
- M.E. HARR (1966) - *Foundations of theoretical soil mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- M.E. HARR (1976) - *Fundamentals of probability theory*. Transp. Res. Rec., n. 575.
- M.E. HARR (1977) - *Mechanics of particulate media: a probabilistic approach*. McGraw-Hill, New York.