

Sul calcolo dell'interazione elastica terreno-struttura per i telai fondati su suolo a due parametri

M. LEMBO*

SOMMARIO: Il calcolo strutturale degli edifici richiede la determinazione delle sollecitazioni cui sono sottoposte le fondazioni, al fine di verificarne l'idoneità. L'insieme costituito dai due elementi, struttura in elevazione ed in fondazione, si comporta come un unico complesso elastico e come tale deve essere analizzato, risolvendo il problema iperstatico dell'interazione suolo-fondazione.

Il caso dei telai piani solidali alla trave di fondazione si affronta, in genere, assumendo per il terreno la semplice ipotesi di comportamento alla Winkler, ed il calcolo automatico della struttura nel suo complesso non presenta particolari difficoltà, in quanto è sufficiente inserire, nella matrice di rigidità della struttura, gli opportuni termini relativi alle travi di fondazione.

Nella presente nota si forniscono le espressioni delle matrici di rigidità delle travi di fondazione assumendo per il terreno il più complesso modello «a due parametri» che consente la presenza di sforzi di taglio nel suolo, conferendo ad esso continuità, e risulta, quindi, più aderente al comportamento reale. Lo studio si conclude con alcuni esempi applicativi.

1. Introduzione

Il calcolo delle strutture monodimensionali di fondazione si conduce, in genere, assumendo per il suolo il comportamento elastico proposto da Winkler, secondo il quale sussiste una semplice proporzionalità tra la componente verticale dello spostamento dei punti della struttura e la reazione del letto di appoggio. Tale schematizzazione corrisponde ad assimilare idealmente il terreno ad un sistema di elementi elastici, mutuamente indipendenti, caratterizzati da una costante k , denominata «coefficiente di sottofondo».

Il modello di Winkler, benché non consenta una compiuta rappresentazione delle complesse proprietà fisiche del suolo, ha incontrato, in virtù della sua semplice espressione analitica, ampia diffusione nel calcolo applicativo. I principali limiti della schematizzazione, che conseguono dalla sua natura discontinua e che lo pongono in contrasto con i risultati sperimentali, consistono nell'indipendenza degli spostamenti dei punti del suolo della forma e dall'estensione della superficie di carico, nonché dallo stato di sollecitazione nei punti circostanti.

Allo scopo di superare alcune limitazioni inerenti alle ipotesi di Winkler, senza tuttavia rinunciare ad una semplice caratterizzazione matematica del problema e quindi senza fare ricorso ai modelli elastici continui, è stata proposta, da diversi autori, una rappresentazione del suolo che possiede alcune proprietà caratteristiche dei corpi elastici continui e che va sotto la denominazione di «modello a due parametri», per la presenza di due costanti atte a definire le proprietà del mezzo. È interessante rilevare che alla formulazione di tale schema si può

pervenire sia a partire dal modello di Winkler, introducendo in esso un mezzo che consenta l'interazione tra i singoli elementi elastici (WIEGHARDT, FILONENKO-BORODICH, PASTERNAK), sia a partire dal modello elastico continuo, ricorrendo ad ipotesi semplificative sulle distribuzioni delle tensioni e degli spostamenti (VLASOV-LEONT'EV).

Le relazioni di equilibrio che derivano dall'impiego, nelle applicazioni, del modello a due parametri si presentano formalmente più complesse di quelle discendenti dallo schema di Winkler; ciò a causa della presenza, nella reazione del suolo, di un termine contenente la derivata seconda dello spostamento. Allo scopo di conservare una relazione algebrica lineare carichi-spostamenti nella scrittura delle equazioni di equilibrio per lo studio dell'interazione suolo-struttura, può risultare utile servirsi del metodo degli spostamenti, introducendo, per le travi poggianti sul suolo, rigidità modificate in modo da tener conto della particolare reazione che si assume per il letto di appoggio.

Nel presente studio si forniscono le espressioni delle rigidità per travi di fondazione su suolo a due parametri, ottenute dall'integrazione della relativa equazione differenziale di equilibrio, con riferimento ai casi di vincolo di più frequente ricorrenza; si presentano, quindi, alcuni esempi applicativi su semplici strutture, confrontando i risultati con quelli ottenuti dall'utilizzazione del classico modello di Winkler. Nell'ambito della presente trattazione non rientra lo studio della possibilità di riferire il modello adottato a classi di terreni reali; tale problema potrà essere oggetto di una separata ricerca.

2. La trave su suolo elastico a due parametri

Si consideri una trave di materiale elastico omogeneo, a sezione costante, poggiate su di un letto elastico, in assenza di attrito lungo la superficie di

* Dott. Ing. Marzio Lembo, Dipartimento di Ingegneria Civile Edile - II Università degli Studi di Roma.

contatto trave-suolo di fondazione. L'equazione differenziale della linea elastica, per piccoli spostamenti, risulta:

$$EIv''''(z) = q(z) - r(z) \quad (1)$$

nella quale (fig. 1)

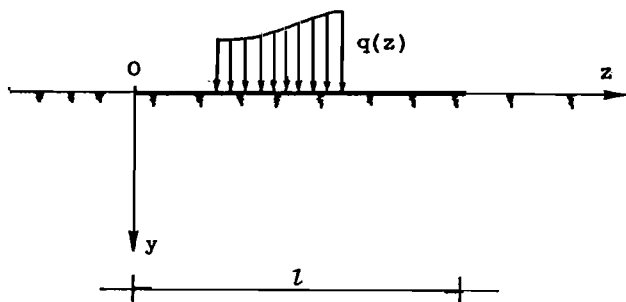


Fig. 1.

$v(z)$ = componente verticale dello spostamento dei punti appartenenti all'asse della trave, positiva secondo y ;

E = modulo di elasticità del materiale costituente la trave;

I = momento d'inerzia della sezione retta;

$q(z)$ = carico verticale per unità di lunghezza, positivo secondo y ;

$r(z)$ = reazione elastica per unità di lunghezza del suolo, positiva se di verso contrario a y .

Se si assume per il suolo la schematizzazione a due parametri, la reazione si esplicita in

$$r(z) = -kbv(z) + \bar{k}bv''(z) \quad (2)$$

in cui:

— k è una costante positiva, dalle dimensioni fisiche di forza/volume, che conserva il significato meccanico del «coefficiente di sottofondo» del modello di Winkler;

— \bar{k} è la seconda costante meccanica, caratteristica del modello, non negativa e dalle dimensioni fisiche di forza/lunghezza, che mette in conto la resistenza del terreno agli scorrimenti verticali;

— b è la larghezza della trave.

La (1) diviene quindi:

$$EIv''''(z) - Pv''(z) + Wv(z) = q(z) \quad (3)$$

avendo posto

$$P = \bar{k}b \quad (4)$$

$$W = kb \quad (5)$$

La (3) rappresenta l'equazione di equilibrio di una trave su suolo a due parametri nel caso monodimensionale, in quanto, in essa si considera la continuità del suolo unicamente nella direzione longitudinale della struttura. Gli effetti dovuti alla

continuità nel senso trasversale possono mettersi in conto [VLASOV-LEONT'EV, 1966], in via approssimata, mediante le posizioni

$$P = \left(1 + \frac{1}{\mu b}\right) \bar{k}b \quad (6)$$

$$W = \left(1 + \frac{2}{\mu b}\right) kb \quad (7)$$

essendo

$$\mu = \sqrt{k / \bar{k}} \quad (8)$$

Il significato fisico del parametro meccanico \bar{k} dipende dallo schema prescelto per lo sviluppo del modello [SELVADURAI, 1979]; in dettaglio si ha:

— \bar{k} uguale alla tensione di una membrana elastica sovrapposta agli elementi alla Winkler, per i modelli di Wieghardt e Filonenko-Borodich;

— \bar{k} uguale al modulo di elasticità tangenziale, per unità di lunghezza, di uno strato, avente resistenza alla sola deformazione tagliante, interposto tra gli elementi alla Winkler ed il carico esterno, per il modello di Pasternak;

— \bar{k} funzione dei moduli elastico e di Poisson del suolo e della legge assunta per approssimare la distribuzione verticale degli spostamenti, per il modello di Vlasov-Leont'ev.

La (3) è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. L'algebra corrispondente all'omogenea ad essa associata è di tipo biquadratica e si può porre nella forma:

$$s^4 - 4\omega\alpha^2s^2 + 4\alpha^4 = 0 \quad (9)$$

con

$$\alpha^4 = W/(4EI) > 0 \quad (10)$$

$$\omega = P/(2\sqrt{WEI}) \geq 0 \quad (11)$$

In dipendenza del valore del discriminante $\Delta = 4\alpha^4(\omega^2 - 1)$, la (9) avrà:

a) quattro radici reali distinte, due positive e due negative, per $\omega > 1$;

b) due radici reali doppie, una positiva ed una negativa, per $\omega = 1$;

c) quattro radici, a due a due complessi coniugate, per $\omega < 1$.

L'integrale generale dell'omogenea associata alla (3) ha, quindi, le seguenti espressioni:

a) per $P > 2\sqrt{WEI}$

$$v(z) = A \cosh(\alpha\beta z) \cosh(\alpha\delta z) + B \sinh(\alpha\beta z) \cosh(\alpha\delta z) + C \cosh(\alpha\beta z) \sinh(\alpha\delta z) + D \sinh(\alpha\beta z) \sinh(\alpha\delta z);$$

b) per $P = 2\sqrt{WEI}$

$$v(z) = A \cosh(\alpha\beta z) + B \sinh(\alpha\beta z) + Cz \cosh(\alpha\beta z) + D \sinh(\alpha\beta z);$$

c) per $P < 2\sqrt{WEI}$

$$v(z) = A \cosh(\alpha\beta z) \cos(\alpha\gamma z) + B \sinh(\alpha\beta z) \cos(\alpha\gamma z) + C \cosh(\alpha\beta z) \sin(\alpha\gamma z) + D \sinh(\alpha\beta z) \sin(\alpha\gamma z);$$

essendo:

$$\begin{aligned} \beta &= (1 + \omega)^{1/2} > 0; \\ \gamma &= (1 - \omega)^{1/2} > 0, \text{ per } \omega < 1; \\ \delta &= (\omega - 1)^{1/2} > 0, \text{ per } \omega > 1. \end{aligned}$$

In particolare, se risulta $P=0$, dal caso c consegue che $\omega=0$, $\beta=\gamma=1$, e

$$v(z) = A \cosh(\alpha z) \cos(\alpha z) + B \sinh(\alpha z) \cos(\alpha z) + C \cosh(\alpha z) \sin(\alpha z) + D \sinh(\alpha z) \sin(\alpha z)$$

che è la soluzione dell'omogenea associata all'equazione

$$EIv''''(z) + Wv(z) = q(z) \quad (12)$$

rappresentativa della trave su suolo di Winkler.

Le costanti di integrazione si determinano imponendo le appropriate condizioni ai limiti. A questo riguardo, in considerazione del carattere continuo del modello a due parametri, diviene necessario definire il taglio generalizzato $Q(z)$ che tiene conto delle tensioni tangenziali nella trave e nel suolo. In una generica sezione del complesso trave-suolo di fondazione posta all'ascissa z , il taglio generalizzato è espresso dalla relazione [SELVADURAI, 1979]:

$$Q(z) = T(z) + Pv'(z) = -EI[v''''(z) - (P/EI)v'(z)] \quad (13)$$

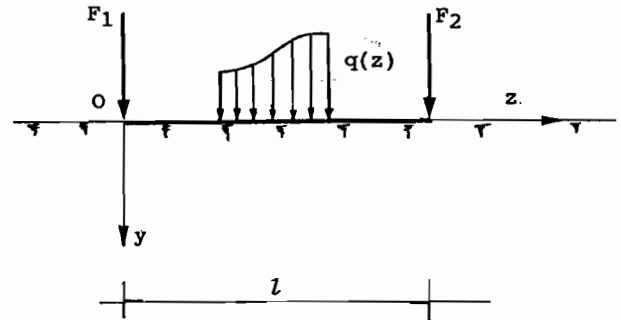
in cui $T(z)$ è il taglio agente sulla trave, mentre il termine $Pv'(z)$ tiene conto delle tensioni tangenziali nel suolo.

Nelle condizioni ai limiti occorre riferirsi al taglio generalizzato; si consideri, ad esempio, una trave di lunghezza l , con estremi liberi (fig. 2).

Le condizioni ai limiti sono:

a) per $z=0$

$$M(0) = 0$$



e

Fig. 2.

$$Q^{(-)}(0) - Q^{(+)}(0) = F_1$$

la quale comporta

$$EIv''''(0) = F_1 - P\mu v(0) + Pv'(0);$$

b) per $z=l$

$$M(l) = 0$$

e

$$Q^{(-)}(l) - Q^{(+)}(l) = F_2$$

la quale comporta

$$-EIv''''(l) = F_2 - P\mu v(l) - Pv'(l);$$

avendo indicato con $Q^{(-)}(z)$ e $Q^{(+)}(z)$ i tagli generalizzati a sinistra e a destra della sezione di ascissa z , ed essendo μ il parametro definito dalla (8).

3. Le matrici di rigidezza della trave su suolo a due parametri

Data una trave ad asse rettilineo, di sezione costante, soggetta (fig. 3) all'azione di un carico distribuito $q(z)$, la relazione che lega le reazioni vincolari al carico esterno ed alle componenti dello spostamento delle sezioni di estremità, si può porre nella forma:

$$\underline{f} = \underline{f}^q + \underline{K}\underline{\eta} \quad (14)$$

Nella (14) i simboli hanno i seguenti significati:

— \underline{f} è il vettore $[M_A, R_A, M_B, R_B]$, le cui componenti rappresentano le reazioni (coppie e forze verticali) esercitate dai vincoli sulla trave;

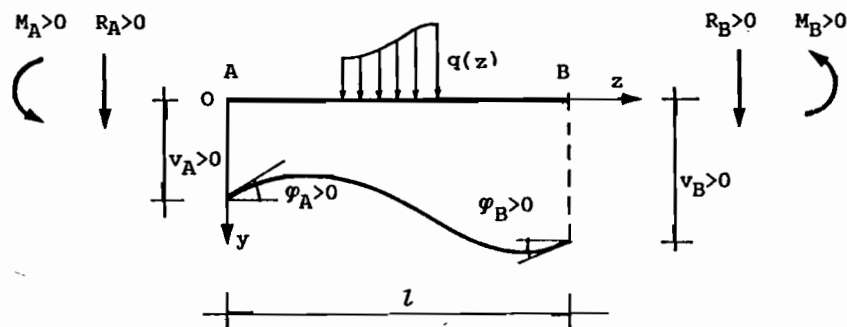


Fig. 3.

— \underline{f}^q è il vettore $[\bar{M}_A, \bar{R}_A, \bar{M}_B, \bar{R}_B]$, delle reazioni vincolari associate al carico $q(z)$, in condizioni di incastro perfetto;

— $\underline{\eta}$ è il vettore $[\varphi_A, v_A, \varphi_B, v_B]$, delle componenti dello spostamento delle sezioni di estremità;

— \underline{K} è la matrice di rigidezza.

Nel caso specifico della trave su mezzo elastico, si indichi con λ il prodotto della lunghezza della trave per la costante α definita dalla (10).

Detta \underline{K}^o la matrice di rigidezza di una trave in assenza di suolo, gli elementi della matrice \underline{K} , della stessa trave su mezzo elastico, si possono porre in una delle due seguenti forme:

a) se l'elemento k_{ij}^o di \underline{K}^o non è nullo, l'elemento corrispondente k_{ij} di \underline{K} è uguale al prodotto di k_{ij}^o per un coefficiente k'_{ij} funzione dei due parametri adimensionali λ e ω (quest'ultimo comparé attraverso i termini β, γ, δ):

$$k_{ij} = k_{ij}^o k'_{ij}(\lambda, \omega);$$

b) se k_{rs}^o è nullo, l'elemento k_{rs} di \underline{K} può porsi nella forma di prodotto di un termine dimensionale k_{rs}^t , del tipo EI/l^n , per un termine adimensionale k''_{rs} funzione di λ e di ω :

$$k_{rs} = k_{rs}^t k''_{rs}(\lambda, \omega).$$

Le componenti f_k^q del vettore \underline{f}^q si possono sempre porre nella forma di prodotto della corrispondente componente $f_k^{q^o}$, in assenza di suolo elastico, per un fattore $f_k^{q'}$ funzione di λ e di ω :

$$f_k^q = f_k^{q^o} f_k^{q'}(\lambda, \omega).$$

Nel caso di suolo di Winkler, caratterizzato da valore nullo di ω , i suddetti coefficienti risultano funzione del solo parametro λ . Ad essi si può pervenire da quelli corrispondenti alla trave su suolo a due parametri passando al limite per ω che tende a zero.

In Appendice si forniscono i valori dei coefficienti $k'_{ij}(\lambda, \omega)$, $k''_{rs}(\lambda, \omega)$ e $f_k^{q'}(\lambda, \omega)$ con riferimento al caso della trave incastrata alle estremità ed a quello della trave con un estremo incastrato e l'altro libero, in presenza sia di suolo a due parametri sia di suolo alla Winkler.

Per quanto concerne le convenzioni sui segni, si assume che le rotazioni e le coppie abbiano verso

positivo antiorario e che le forze e gli spostamenti verticali siano positivi se diretti verso il basso (fig. 3).

Allo scopo di facilitarne l'identificazione, gli elementi della matrice di rigidezza \underline{K} saranno, nel prosieguo, indicati con i simboli che figurano nell'eguaglianza che segue:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ R_A \\ M_B \\ R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_A \\ \bar{R}_A \\ \bar{M}_B \\ \bar{R}_B \end{bmatrix} + \underline{K} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ v_A \\ \varphi_B \\ v_B \end{bmatrix} = \quad (15)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{M}_A \\ \bar{R}_A \\ \bar{M}_B \\ \bar{R}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{AB} & \Gamma_{AB} & \rho_{BA} & \Gamma_{BA} \\ \rho_B & S_{AB} & \rho_{BA} & S_{BA} \\ \rho_{AB} & \Gamma_{AB} & \rho_{BA} & \Gamma_{BA} \\ \rho_{AB} & \Gamma_{AB} & \rho_{BA} & \Gamma_{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ v_A \\ \varphi_B \\ v_B \end{bmatrix}$$

Nel caso della trave con un estremo incastrato e l'altro libero, l'ordine della matrice \underline{K} si riduce a 2, con ovvie considerazioni. Per le altre condizioni di vincolo, si veda LEMBO [1986].

4. Esempi di calcolo di strutture su suolo elastico a due parametri

Nei paragrafi che seguono si presentano alcuni esempi di calcolo di semplici strutture poggianti su di un letto di fondazione rappresentabile mediante il modello a due parametri. I calcoli sono stati condotti con l'impiego delle funzioni di rigidezza fornite in Appendice, ponendo a confronto i risultati con quelli derivanti dall'utilizzazione del modello di Winkler.

4.1. Trave di fondazione

Si fa riferimento all'esempio di trave di fondazione [FRANCIOSI, 1966] i cui dati sono riportati nelle figure 4-5.

Le incognite del problema sono le rotazioni φ_i e gli spostamenti verticali v_i dei nodi A, B, C e

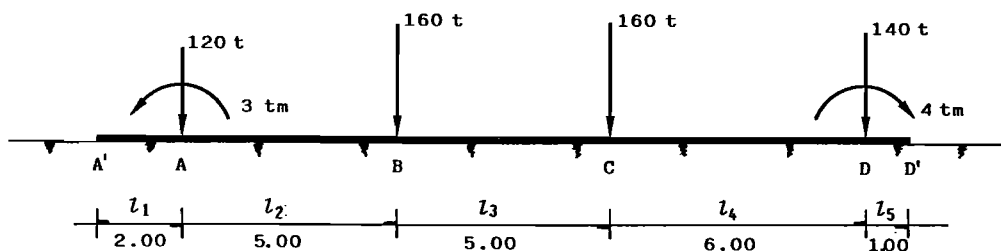


Fig. 4.

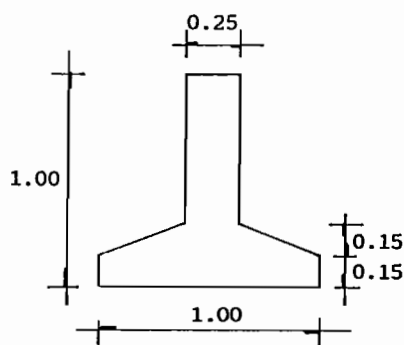


Fig. 5.

D; le equazioni di equilibrio alla rotazione ed alla traslazione verticale, con riferimento per brevità al nodo A, si scrivono rispettivamente:

$$\begin{aligned} & \varphi_A \left(\frac{EI}{l_1} \rho''_{AA'} + \frac{4EI}{l_2} \rho'_{AB} \right) + \\ & + \varphi_B \frac{2EI}{l_2} \rho'_{BA} t'_{BA} + v_A \left(\frac{EI}{l_1^2} r''_{AA'} - \frac{6EI}{l_2^2} r'_{AB} \right) + \\ & + v_B \frac{EI}{l_2^2} r'_{AB} \tau'_{AB} = M_A, \\ & \varphi_A \left(\frac{EI}{l_1^2} \rho''_{AA'} - \frac{6EI}{l_2^2} \rho'_{AB} \right) - \varphi_B \frac{6EI}{l_2^2} \rho'_{BA} q'_{BA} + \\ & + v_A \left(\frac{EI}{l_1^3} s''_{AA'} + \frac{12EI}{l_2^3} s'_{AB} \right) - v_B \frac{12EI}{l_2^3} s'_{BA} \theta'_{BA} = F_A, \end{aligned}$$

essendo M_A e F_A la coppia e la forza applicate al nodo. È possibile predisporre un programma per ottenere in modo automatico la formazione e la soluzione di siffatte relazioni; per lo studio della presente struttura ciò è stato eseguito col computer Motorola VME/10 del Dipartimento di Ingegneria Civile Edile della II Università di Roma.

Si fa l'ipotesi che la trave si appoggi su suolo caratterizzato dai seguenti parametri meccanici:

$$\begin{aligned} k &= 10 \text{ kg/cm}, \\ \bar{k} &= 31500 \text{ kg/cm}, \end{aligned}$$

i quali, unitamente alle caratteristiche geometriche e fisiche della trave, $E = 200.000 \text{ kg/cm}^2$ ed $I = 3.651.000 \text{ cm}^4$, comportano

$$\omega = 0,06.$$

Il calcolo della struttura è stato eseguito nelle seguenti condizioni:

a) adottando il modello discontinuo di Winkler;

b) considerando gli effetti di continuità del suolo solo nella direzione dell'asse longitudinale della trave;

c) considerando, in via approssimata, gli effetti di continuità del suolo in senso trasversale, mediante l'amplificazione [cfr. (6)-(7)] della larghezza effettiva della trave.

I risultati sono raccolti, rispettivamente, nelle tabelle 4.1-I a, b, c. I diagrammi delle figure 6-9 pongono a confronto gli spostamenti e le caratteristiche della sollecitazione dei casi a (linee a tratti) e b (linee continue); nelle figure 10-13 sono raffrontati i risultati dei casi a (linee a tratti) e c (linee continue).

TABELLA 4.1-I-a

Nodo	Rotazione	Spostamento (cm)	
A	-2.03E-06	0.2966	
B	-6.09E-05	0.3587	
C	2.54E-04	0.3229	
D	-1.59E-03	0.5127	

Nodo	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	T sinistra (kg)	T destra (kg)
A	51295	48295	53755	-66244
B	67612	67612	79850	-80149
C	70670	70670	78631	-81368
D	26636	30636	81191	-58808

TABELLA 4.1-I-b

Nodo	Rotazione	Spostamento (cm)	
A	-1.73E-04	0.2753	
B	-5.07E-05	0.3587	
C	1.97E-04	0.3330	
D	-7.14E-04	0.3792	

Nodo	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	Q sinistra (kg)	Q destra (kg)
A	55868	52868	54428	-65571
B	66347	66347	79372	-80627
C	69310	69310	79529	-80470
D	43067	47067	74676	-65323

TABELLA 4.1-I-c

Nodo	Rotazione	Spostamento (cm)	
A	-3.96E-05	0.1441	
B	-1.88E-05	0.1842	
C	8.32E-05	0.1783	
D	-4.28E-04	0.1965	

Nodo	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	Q sinistra (kg)	Q destra (kg)
A	51692	48692	54764	-65235
B	61917	61917	79215	-80784
C	65338	65338	81349	-78650
D	43143	47143	71953	-68046

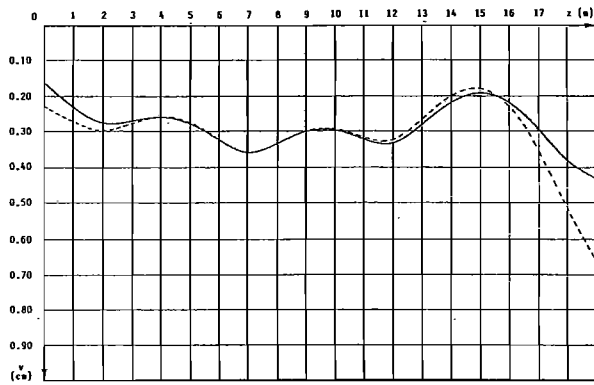


Fig. 6. - Spostamenti.

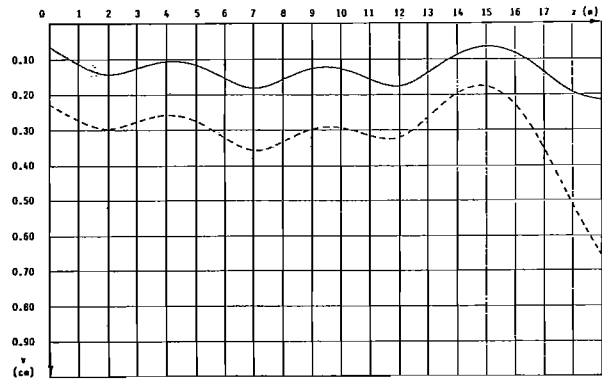


Fig. 10. - Spostamenti.

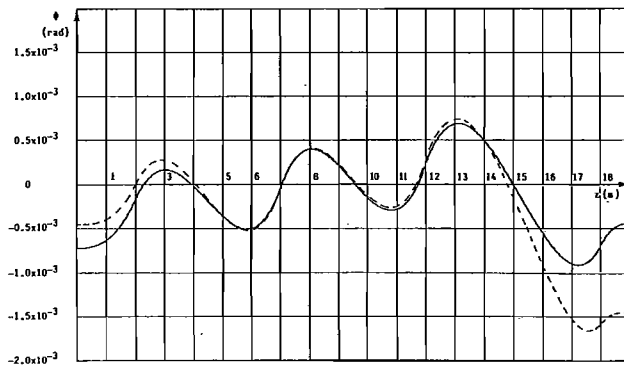


Fig. 7. - Rotazioni.

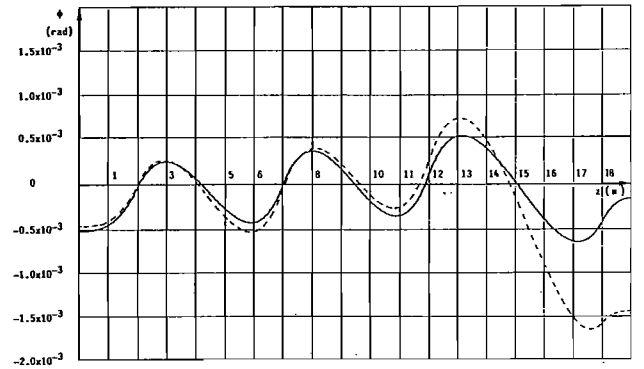


Fig. 11. - Rotazioni.

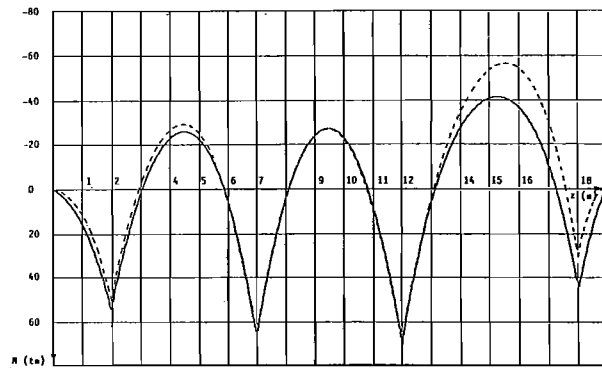


Fig. 8. - Momenti.

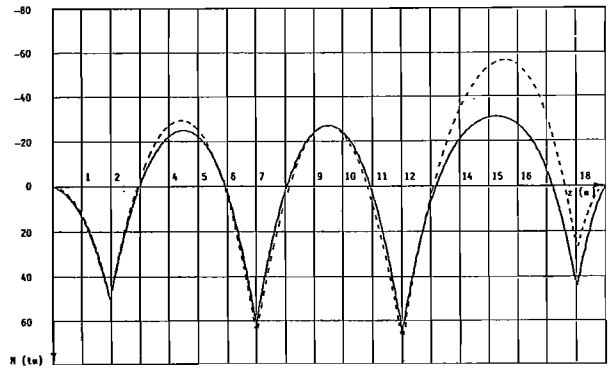


Fig. 12. - Momenti.

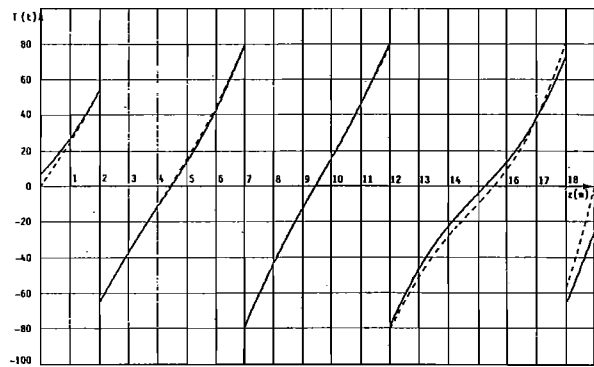


Fig. 9. - Tagli.

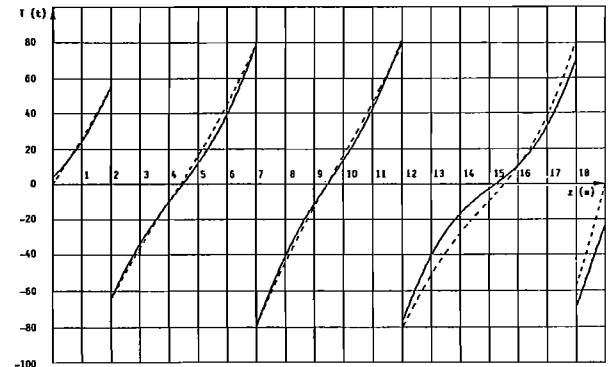


Fig. 13. - Tagli.

4.2. Telaio solidale alla trave di fondazione

Si considera il telaio piano solidale alla trave di fondazione, per il quale [CAPURSO, 1977] i dati geometrici e meccanici che definiscono il problema sono indicati nelle figure 14-16 e nella tabella 4.2-I.

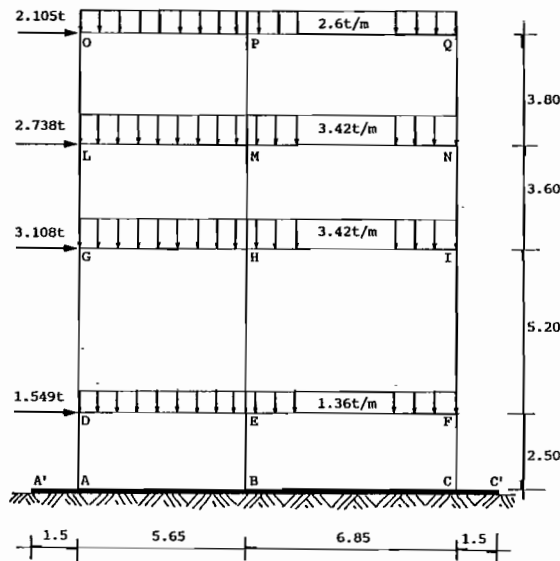


Fig. 14.

La struttura, che in CAPURSO [1977] è supposta poggiante su suolo di Winkler, viene qui esaminata nei tre casi già considerati per l'esempio precedente:

- suolo di Winkler;
- suolo a due parametri continuo nel solo senso longitudinale;
- suolo a due parametri continuo anche nel senso trasversale.

Si fa l'ipotesi che il telaio sia fondato su un suolo caratterizzato dai parametri:

$$k = 30 \text{ kg/cm}^2,$$

e

$$\bar{k} = 25500 \text{ kg/cm}^2,$$

per i quali si ritrova

$$\omega = 0,02.$$

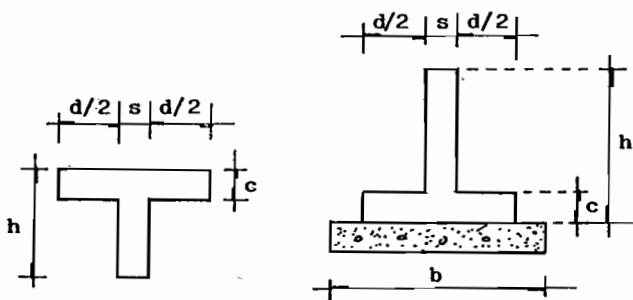


Fig. 15. - Sezione travi telaio.

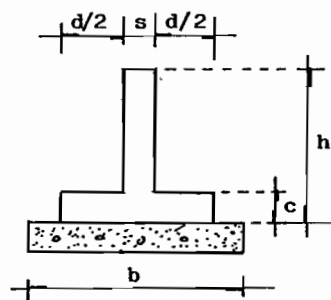


Fig. 16. - Sezione trave di fondazione.

TABELLA 4.2-I

Trave	l (m)	h (m)	d (m)	c (m)	s (m)	b (m)
A-A'	1.50	1.20	1.10	0.30	0.30	2.00
A-B	5.65	1.20	1.10	0.30	0.30	2.00
B-C	6.85	1.20	1.10	0.30	0.30	2.00
C-C'	1.50	1.20	1.10	0.30	0.30	2.00
A-D	2.50	0.50	0	0	0.65	—
B-E	2.50	0.50	0	0	0.65	—
C-F	2.50	0.50	0	0	0.65	—
D-E	5.65	0.80	0.40	0.18	0.30	—
E-F	6.85	0.80	0.40	0.18	0.30	—
D-G	5.20	0.50	0	0	0.60	—
E-H	5.20	0.50	0	0	0.60	—
F-I	5.20	0.50	0	0	0.60	—
G-H	5.65	0.80	0.40	0.18	0.30	—
H-I	6.85	0.80	0.40	0.18	0.30	—
G-L	3.60	0.40	0	0	0.50	—
H-M	3.60	0.40	0	0	0.50	—
I-N	3.60	0.40	0	0	0.50	—
L-M	5.65	0.80	0.35	0.18	0.25	—
M-N	6.85	0.80	0.35	0.18	0.25	—
L-O	3.80	0.40	0	0	0.40	—
M-P	3.80	0.40	0	0	0.40	—
N-Q	3.80	0.40	0	0	0.40	—
O-P	5.65	0.80	0.35	0.18	0.25	—
P-Q	6.85	0.80	0.35	0.18	0.25	—

modulo elastico travi $E = 300.000 \text{ kg/cm}^2$

TABELLA 4.2-II-a

Nodo	Rotazione	Spostamento orizzontale (cm)	Spostamento verticale (cm)
A	-7.69E-06	0.0000	0.0077
B	-7.83E-06	0.0000	0.0310
C	-5.57E-05	0.0000	0.0189
D	-2.28E-04	0.0427	0.0077
E	-1.20E-04	0.0427	0.0310
F	-1.22E-04	0.0427	0.0189
G	-3.26E-04	0.2847	0.0077
H	-1.38E-04	0.2847	0.0310
I	3.79E-05	0.2847	0.0189
L	-2.68E-04	0.3998	0.0077
M	-1.18E-04	0.3998	0.0310
N	2.02E-04	0.3998	0.0189
O	-2.06E-04	0.4622	0.0077
P	-9.60E-05	0.4622	0.0310
Q	2.91E-04	0.4622	0.0189

La struttura è stata risolta col metodo degli spostamenti; le incognite del problema sono costituite dalle rotazioni degli N_n nodi, le traslazioni orizzontali degli N_t traversi e le traslazioni verticali degli N_r ritti. Le equazioni di equilibrio dei nodi del telaio e quelle dei traversi sono analoghe alle corrispondenti per il telaio con incastri al piede, salvo per l'intervento degli spostamenti verticali e delle rotazioni alla base dei piedritti; le equazioni di equilibrio ai nodi della trave di fondazione sono del tipo di quelle già scritte nel precedente paragrafo e comportano l'uso delle rigidità variate, le quali intervengono anche nella determinazione delle forze verticali operanti alla base dei ritti. Si è predisposto un programma di calcolo automatico,

idoneo allo studio di strutture riconducibili allo schema in esame, che forma e risolve le $N_n + N_t + N_r$ equazioni e fornisce spostamenti e caratteristiche della sollecitazione.

Le tabelle 4.2-II e 4.2-III raccolgono i risultati relativi ai tre casi considerati; le figure 17-20 pongono a confronto le caratteristiche dello spostamento e della sollecitazione, nella trave di fondazione, nei casi *a* (linee a tratti) e *b* (linee continue); le figure 21-24 riportano i diagrammi delle stesse grandezze per i casi *a* (linee a tratti) e *c* (linee continue).

TABELLA 4.2-III-a

Trave di fondazione				
Nodo	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	T sinistra (kg)	T destra (kg)
A	4326	8695	6098	-13167
B	34544	40676	37121	-39953
C	10599	15132	19163	-19494

Telaio				
Trave	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	T sinistra (kg)	T destra (kg)
D-E	5198	-10317	1096	-6588
E-F	1339	-12019	2707	-6608
G-H	3882	-18417	5714	-13608
H-I	-8697	-15224	10760	-12666
L-M	-404	-15334	7019	-12304
M-N	-12193	-10226	12000	-11426
O-P	-626	-11409	5436	-9253
P-Q	-10793	-4302	9852	-7957

Ritto	M superiore (kgm)	M inferiore (kgm)	T superiore (kg)	T inferiore (kg)
A-D	781	-4369	2059	2059
B-E	4314	-6132	4178	4178
C-F	3447	-4533	3191	3191
D-G	3711	-4416	1563	1563
E-H	7209	-7342	2798	2798
F-I	9728	-8572	3519	3519
G-L	431	-171	167	167
H-M	2599	-2510	1419	1419
I-N	6225	-5496	3256	3256
L-O	-626	836	-385	-385
M-P	616	-541	304	304
N-Q	4302	-4001	2185	2185

TABELLA 4.2-II-b

Nodo	Rotazione	Spostamento orizzontale (cm)	Spostamento verticale (cm)
A	-1.11E-05	0.0000	0.0074
B	-7.99E-06	0.0000	0.0308
C	-3.84E-05	0.0000	0.0171
D	-2.27E-04	0.0420	0.0074
E	-1.18E-04	0.0420	0.0308
F	-1.23E-04	0.0420	0.0171
G	-3.26E-04	0.2834	0.0074
H	-1.37E-04	0.2834	0.0308
I	4.02E-05	0.2834	0.0171
L	-2.68E-04	0.3981	0.0074
M	-1.17E-04	0.3981	0.0308
N	2.04E-04	0.3981	0.0171
O	-2.06E-04	0.4602	0.0074
P	-9.50E-05	0.4602	0.0308
Q	2.94E-04	0.4602	0.0171

TABELLA 4.2-III-b

Trave di fondazione				
Nodo	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	q sinistra (kg)	q destra (kg)
A	4847	8999	6302	-13038
B	34070	40092	37052	-39899
C	12299	17243	19116	-19591

Telaio				
Trave	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	T sinistra (kg)	T destra (kg)
D-E	5074	-10194	1139	-6544
E-F	1398	-12121	2684	-6631
G-H	3859	-18375	5726	-13596
H-I	-8653	-15245	10751	-12676
L-M	-429	-15294	7030	-12292
M-N	-12154	-10252	11991	-11435
O-P	-638	-11375	5444	-9245
P-Q	-10760	-4315	9845	-7964

Ritto	M superiore (kgm)	M inferiore (kgm)	T superiore (kg)	T inferiore (kg)
A-D	652	-4152	1922	1922
B-E	4238	-6021	4104	4104
C-F	3565	-4943	3403	3403
D-G	3701	-4421	1562	1562
E-H	7213	-7354	2801	2801
F-I	9733	-8555	3517	3517
G-L	418	-157	159	159
H-M	2598	-2508	1418	1418
I-N	6239	-5512	3264	3264
L-O	-638	847	-391	-391
M-P	615	-541	304	304
N-Q	4315	-4012	2191	2191

TABELLA 4.2-II-c

Nodo	Rotazione	Spostamento orizzontale (cm)	Spostamento verticale (cm)
A	-7.46E-06	0.0000	0.0059
B	-8.38E-06	0.0000	0.0257
C	-3.23E-05	0.0000	0.0139
D	-2.22E-04	0.0414	0.0059
F	-1.15E-04	0.0414	0.0257
G	-1.24E-04	0.0414	0.0139
H	-3.21E-04	0.2817	0.0059
I	-1.35E-04	0.2817	0.0257
L	3.88E-05	0.2817	0.0139
M	-2.62E-04	0.3957	0.0059
N	-1.15E-04	0.3957	0.0257
O	2.02E-04	0.3957	0.0139
P	-1.99E-04	0.4570	0.0059
Q	-9.28E-05	0.4570	0.0257
R	2.90E-04	0.4570	0.0139

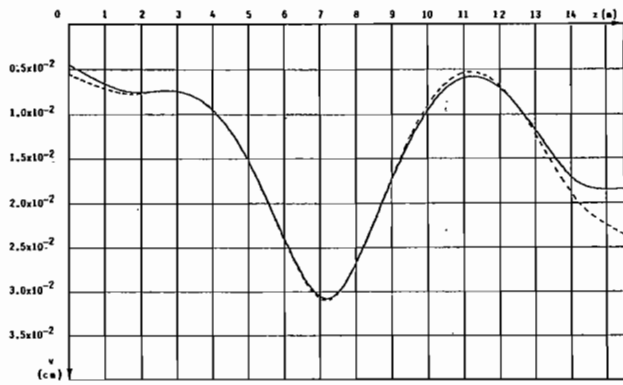


Fig. 17. - Spostamenti.

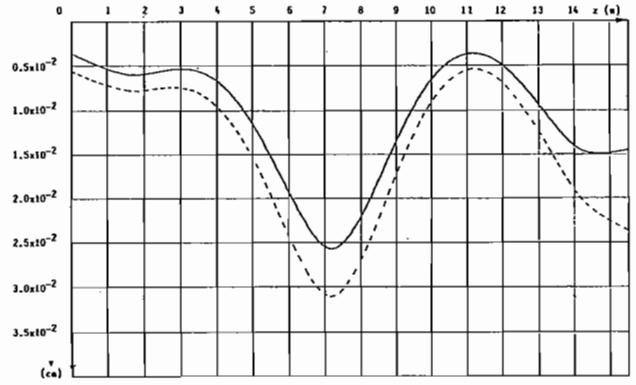


Fig. 21. - Spostamenti.

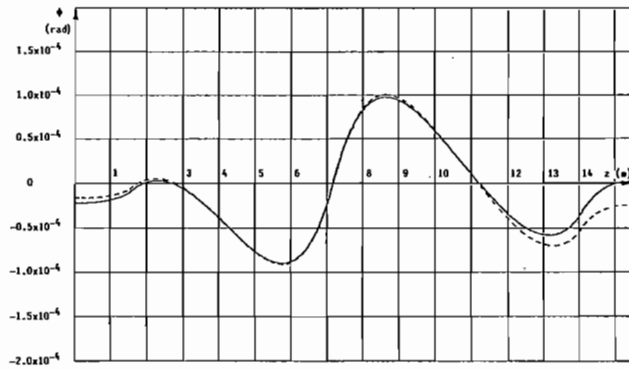


Fig. 18. - Rotazioni.

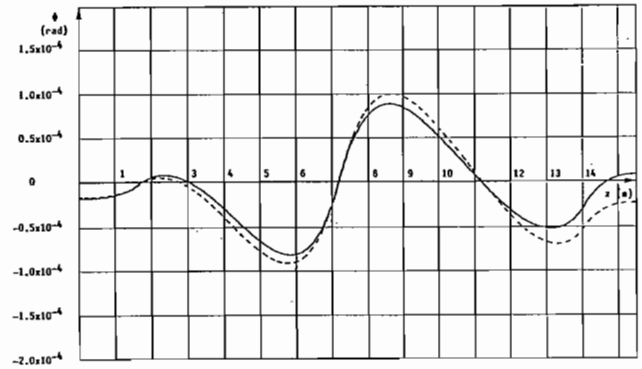


Fig. 22. - Rotazioni.

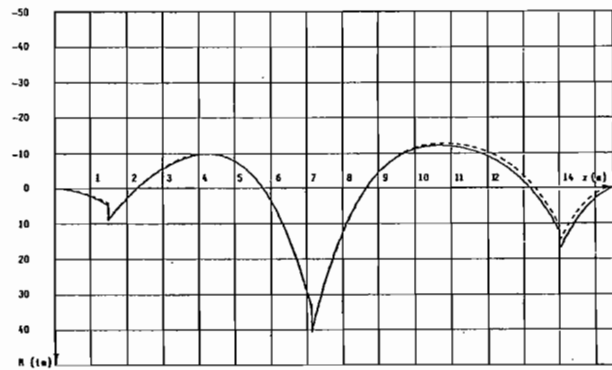


Fig. 19. - Momenti.

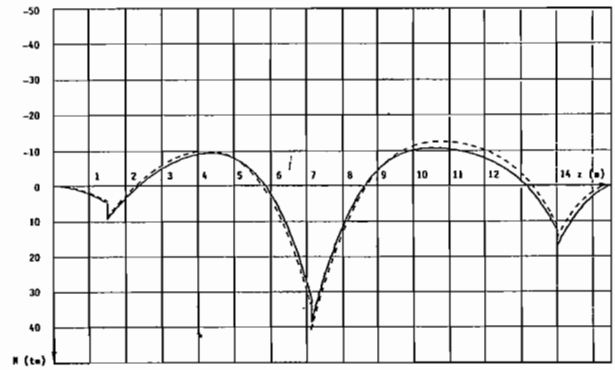


Fig. 23. - Momenti.

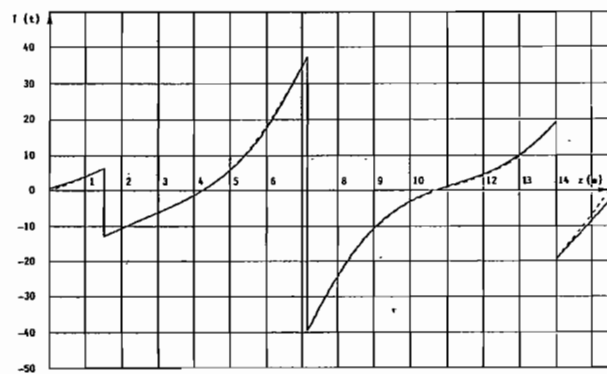


Fig. 20. - Tagli.

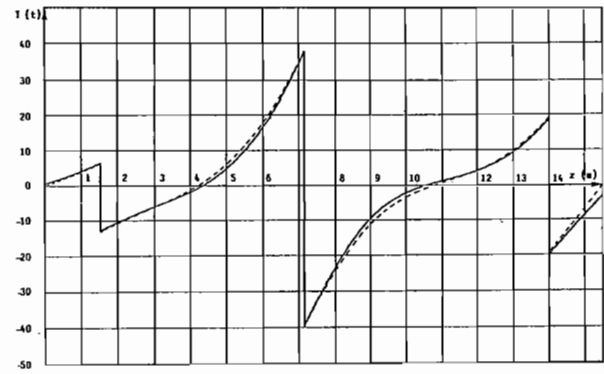


Fig. 24. - Tagli.

TABELLA 4.2-III-c

Trave di fondazione				
Nodo	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	q sinistra (kg)	q destra (kg)
A	4909	9128	6423	-12735
B	32384	38313	37236	-40050
C	12206	17203	18667	-19886

Telaio				
Trave	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	T sinistra (kg)	T destra (kg)
D-E	5215	-10368	1083	-6600
E-F	1194	-11983	2734	-6581
G-H	3975	-18559	5673	-13649
H-I	-8830	-15125	10794	-12632
L-M	-338	-15443	6988	-12334
M-N	-12300	-10158	12026	-11400
O-P	-592	-11502	5414	-9276
P-Q	-10884	-4266	9871	-7938

Ritto	M superiore (kgm)	M inferiore (kgm)	T superiore (kg)	T inferiore (kg)
A-D	733	-4219	1980	1980
B-E	4197	-5929	4050	4050
C-F	3500	-4998	3398	3398
D-G	3769	-4482	1587	1587
E-H	7219	-7365	2804	2804
F-I	9660	-8483	3489	3489
G-L	466	-205	186	186
H-M	2599	-2509	1419	1419
I-N	6189	-5464	3237	3237
L-O	-592	805	-367	-367
H-P	617	-543	305	305
N-Q	4266	-3968	2167	2167

4.3. Telaio con fondazione su pali

Si considera il problema del calcolo di un telaio che presenti fondazioni del tipo a palificata su plinti. Si utilizza quale esempio lo stesso telaio

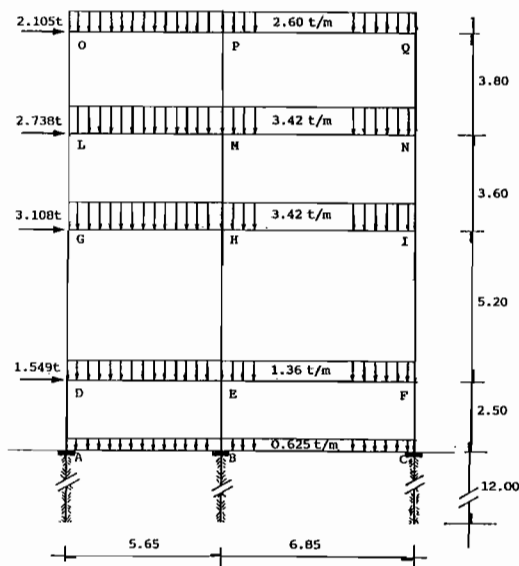


Fig. 25.

preso in esame nel paragrafo precedente; in questo caso i ritti in luogo di essere connessi alla trave di fondazione, presentano alla base una trave di collegamento e poggiano su plinti a due pali. I dati del problema sono indicati nelle figure 25 e 26 e nelle tabelle 4.3-I e 4.3-II.

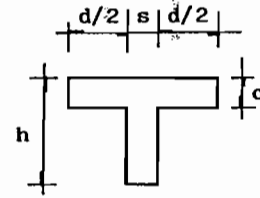


Fig. 26. - Sezione travi.

TABELLA 4.3-I

modulo elastico telaio = 300.000 kg/cm²
 modulo elastico pali = 200.000 kg/cm²
 lunghezza pali = 12 m
 diametro pali = 40 cm

Per ciascun plinto si suppone che i pali siano allineati su di un piano ortogonale a quello del telaio ed assialmente indeformabili. Per questo esempio, le incognite sono gli spostamenti orizzontali dei traversi del telaio e dell'orizzontamento dei plinti, nonché le rotazioni dei nodi, sia in elevazione che in fondazione. Le rigidzze variate che intervengono sono solo quelle corrispondenti alla rotazione ed alla traslazione orizzontale della testa dei pali di fondazione. La struttura è stata risolta nell'ipotesi di suolo di Winkler (caso a) e di suolo a due parametri (caso b). I risultati sono riassunti nelle tabelle 4.3-III e 4.3-IV.

TABELLA 4.3-II

Trave	l (m)	h (m)	d (m)	c (m)	s (m)
A - B	5,65	0,50	0	0	0,50
B - C	6,85	0,50	0	0	0,50
A - D	2,50	0,50	0	0	0,65
B - E	2,50	0,50	0	0	0,65
C - F	2,50	0,50	0	0	0,65
D - E	5,65	0,80	0,40	0,18	0,30
E - F	6,85	0,80	0,40	0,40	0,30
D - G	5,20	0,50	0	0	0,60
E - H	5,20	0,50	0	0	0,60
F - I	5,20	0,50	0	0	0,60
G - H	5,65	0,80	0,40	0,18	0,30
H - I	6,85	0,80	0,40	0,18	0,30
G - L	3,60	0,40	0	0	0,50
H - M	3,60	0,40	0	0	0,50
I - N	3,60	0,40	0	0	0,50
L - M	5,65	0,80	0,35	0,18	0,25
M - N	6,85	0,80	0,35	0,18	0,25
L - O	3,80	0,40	0	0	0,40
M - P	3,80	0,40	0	0	0,40
N - Q	3,80	0,40	0	0	0,40
O - P	5,65	0,80	0,35	0,18	0,25
P - Q	6,85	0,80	0,35	0,18	0,25

Il confronto con la soluzione del telaio pensato incastrato alla base dei piedritti (caso c) mostra gli scarti riportati nella seguente tabella 4.3-V.

Il presente lavoro è stato svolto con finanziamento MPI 60%.

TABELLA 4.3-III-a

Nodo	Rotazione	Spostamento orizzontale (cm)
A	-2.32E-04	0,0234
B	-1.93E-04	0,0234
C	-1.81E-04	0,0234
D	-2.14E-04	0,0894
E	-1.17E-04	0,0894
F	-1.64E-04	0,0894
G	-2.92E-04	0,3302
H	-1.26E-04	0,3302
I	2.93E-05	0,3302
L	-2.31E-04	0,4407
M	-1.04E-04	0,4407
N	-1.90E-04	0,4407
O	-1.60E-04	0,4982
P	-8.18E-05	0,4982
Q	2.69E-04	0,4982

TABELLA 4.3-IV-a

Pali di fondazione		
Gruppo	M (kgm)	T (kg)
A	125	2813
B	535	3241
C	661	3374

Telaio

Trave	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	T sinistra (kg)	T destra (kg)
A-B	1978	-5088	515	-3016
B-C	148	-4981	1391	-2289
D-E	6974	-12317	427	-7256
E-F	1059	-12458	2684	-6631
G-H	4723	-19678	5342	-13980
H-I	-9806	-14451	11035	-12391
L-M	176	-16293	6746	-12576
M-N	-13132	-9632	12224	-11202
O-P	-325	-12224	5238	-9451
P-Q	-11596	-3986	10016	-7794

Ritto	M superiore (kgm)	M inferiore (kgm)	T superiore (kg)	T inferiore (kg)
A-D	2152	-1852	1602	1602
B-E	5949	-4701	4260	4260
C-F	4598	-4319	3567	3567
D-G	4256	-4822	1745	1745
E-H	7361	-7427	2844	2844
F-I	9254	-7859	3291	3291
G-L	740	-466	335	335
H-M	2607	-2510	1421	1421
I-N	5912	-5197	3086	3086
L-O	-325	563	-234	-234
M-P	628	-553	311	311
N-Q	3986	-3719	2027	2027

TABELLA 4.3-III-b

Nodo	Rotazione	Spostamento orizzontale (cm)
A	-2.23E-04	0,0216
B	-1.86E-04	0,0216
C	-1.72E-04	0,0216
D	-2.13E-04	0,0865
E	-1.16E-04	0,0865
F	-1.63E-04	0,0865
G	-2.92E-04	0,3270
H	-1.26E-04	0,3270
I	2.93E-05	0,3270
L	-2.31E-04	0,4374
M	-1.04E-04	0,4374
N	1.90E-04	0,4374
O	-1.60E-04	0,4950
P	-8.18E-05	0,4950
Q	2.69E-04	0,4950

TABELLA 4.3-IV-b

Pali di fondazione		
Gruppo	M (kgm)	T (kg)
A	-116	2824
B	289	3222
C	452	3382

Telaio

Trave	M sinistra (kgm)	M destra (kgm)	T sinistra (kg)	T destra (kg)
A-B	1831	-4956	564	-2967
B-C	41	-4862	1424	-2856
D-E	6926	-12268	444	-7239
E-F	1016	-12413	2697	-6618
G-H	4720	-19676	5343	-13979
H-I	-9807	-14449	11035	-12391
L-M	176	-16293	6746	-12576
M-N	-13132	-9632	12224	-11202
O-P	-325	-12224	5238	-9451
P-Q	-11596	-3986	10016	-7794

Ritto	M superiore (kgm)	M inferiore (kgm)	T superiore (kg)	T inferiore (kg)
A-D	2102	-1947	1620	1620
B-E	5855	-4708	4225	4225
C-F	4550	-4410	3584	3584
D-G	4253	-4824	1745	1745
E-H	7357	-7429	2843	2843
F-I	9252	-7863	3291	3291
G-L	740	-466	335	335
H-M	2607	-2510	1421	1421
I-N	5912	-5197	3086	3086
L-O	-325	563	-234	-234
M-P	628	-553	311	311
N-Q	3986	-3719	2027	2027

TABELLA 4.3-V

Pila-stro	Spostamento orizzontale in testa (cm)			Momento flettente al piede (tm)		
	a	b	c	a	b	c
A-D	0,023	0,022	0,038	-1,853	-1,948	-4,253
D-G	0,089	0,086	0,273	-4,822	-4,824	-4,864
G-L	0,330	0,327	0,383	-0,467	-0,467	-0,473
L-O	0,498	0,495	0,441	0,564	0,564	0,564

BIBLIOGRAFIA

- CAPURSO M. (1965) - *Sul calcolo delle travi di fondazione su suolo di Wieghardt*. La ricerca scientifica, anno 35, volume 8.
- CAPURSO M. (1965) - *Su una generalizzazione del suolo di Wieghardt per le strutture di fondazione bidimensionali*. La ricerca scientifica, anno 35, volume 8.
- CAPURSO M. (1965) - *Sul calcolo delle strutture di fondazione su suolo di Wieghardt generalizzato*. La ricerca scientifica, anno 35, volume 8.
- CAPURSO M. (1977) - *Introduzione al calcolo automatico delle strutture*. E.S.A.C., Roma.
- FRANCIOSI V. (1966) - *Scienza delle costruzioni*. Vol. III, Liguori, Napoli.
- HETENYI M. (1946) - *Beams on Elastic Foundation*. Ann Arbor, Michigan.
- LEMBO M. (1986) - *Calcolo dei sistemi di travi su mezzo elastico a due parametri*. DICE 10, Roma.
- SELVADURAI A.P.S. (1979) - *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*. Elsevier, New York.
- VLASOV V.Z., LEONT'EV U.N. (1966) - *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundation*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
- WIEGHARDT K. (1922) - *Über den Balken auf Nachgiebiger Unterlage*. Z. Angew. Math. Mech.

SUMMARY

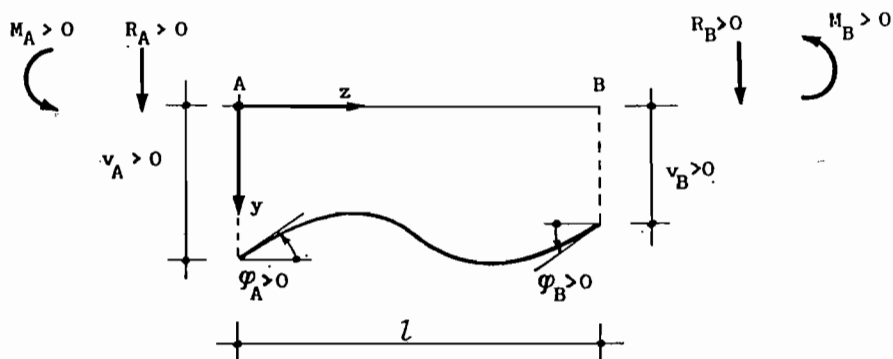
Soil-structure interaction for frames on a two-parameters subsoil

The analysis of the soil-foundation interaction is of a fundamental importance for the structural design of foundations and to check stresses and deformations within the supporting soil. The very complex behaviour of real soils has led to the development of many simplified models to be applied in this field. The Winkler's hypothesis, by which the foundation is considered as a system of mutually independent linear springs, allows a very simple analysis and is widely used in structural engineering. The computer analysis of building frames, with continuous strip footings resting on a Winkler medium, is easily accomplished by introducing the beam stiffness terms in the global stiffness matrix. As well-know, the Winkler model is characterized by the fact that the displacements occur under the loaded area only and are independent of deflections produced elsewhere; the deficiency of this model in depicting the real continuous soil behaviour can give incorrect results. The two-parameter soil models, which define the soil behaviour by means of two independent elastic constants, eliminate the discontinuity providing shear stresses in the elastic medium.

In this paper the stiffness matrices of beams resting on a two-parameter soil model are determined by the solution of the differential equation of the elastic line. Some examples of computer analysis of simple structures on two-parameter media are presented.

APPENDICE

Trave con due incastri



$$\alpha = \sqrt[4]{W/4EI}; \quad \lambda = \alpha l; \quad \omega = P/\sqrt{4WEI}$$

$$\beta = (1 + \omega)^{1/2},$$

$$\gamma = (1 - \omega)^{1/2}, \quad [\omega < 1]$$

$$\delta = (\omega - 1)^{1/2}, \quad [\omega > 1]$$

	M _A	R _A	M _B	R _B
	$(4EI/l)q'_{AB}$	$-(6EI/l^2)p'_{AB}$	$(2EI/l)q'_{AB}t'_{AB}$	$(6EI/l^2)p'_{AB}q'_{AB}$
	$-(6EI/l^2)r'_{AB}$	$(12EI/l^3)s'_{AB}$	$-(6EI/l^2)r'_{AB}t'_{AB}$	$-(12EI/l^3)s'_{AB}q'_{AB}$
	$(2EI/l)q'_{BA}t'_{BA}$	$-(6EI/l^2)p'_{BA}q'_{BA}$	$(4EI/l)q'_{BA}$	$(6EI/l^2)p'_{BA}$
	$(6EI/l^2)r'_{BA}t'_{BA}$	$-(12EI/l^3)s'_{BA}q'_{BA}$	$(6EI/l^2)r'_{BA}$	$(12EI/l^3)s'_{BA}$
	$(ql^2/12)\bar{M}'_A$	$-(ql/2)\bar{R}'_A$	$-(ql^2/12)\bar{M}'_B$	$-(ql/2)\bar{R}'_B$

$$q'_{BA} = q'_{AB} \quad s'_{BA}q'_{BA} = s'_{AB}q'_{AB}$$

$$p'_{AB} = r'_{AB} = r'_{BA} = p'_{BA} \quad p'_{AB}q'_{AB} = r'_{AB}t'_{AB} = p'_{BA}q'_{BA} = r'_{BA}t'_{BA}$$

$$q'_{BA}t'_{BA} = q'_{AB}t'_{AB} \quad \bar{M}'_B = \bar{M}'_A$$

$$s'_{BA} = s'_{AB} \quad \bar{R}'_B = \bar{R}'_A$$

$$e'_{AB}$$

$\omega > 1$	$\frac{\lambda\beta\delta}{2} \cdot \frac{\delta \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\delta\lambda)}{\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)}$
$\omega = 1$	$\frac{\lambda\beta}{2} \cdot \frac{\sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta\lambda}{\sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2\lambda^2}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$\frac{\lambda\beta\gamma}{2} \cdot \frac{\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)}{\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)}$
$\omega = 0$	$\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\sinh \lambda \cosh \lambda - \sin \lambda \cos \lambda}{\sinh^2 \lambda - \sin^2 \lambda}$

$$p'_{AB}$$

$\omega > 1$	$\frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{\beta^2 \sinh^2(\delta\lambda) + \delta^2 \sinh^2(\beta\lambda)}{\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)}$
$\omega = 1$	$\frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{\sinh^2(\beta\lambda) + \beta^2\lambda^2}{\sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2\lambda^2}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$\frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) + \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)}{\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)}$
$\omega = 0$	$\frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{\sinh^2 \lambda + \sin^2 \lambda}{\sinh^2 \lambda - \sin^2 \lambda}$

$$e'_{AB}t'_{AB}$$

$\omega > 1$	$\lambda\beta\delta \frac{\beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \delta \cosh(\delta\lambda) \sinh(\beta\lambda)}{\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)}$
$\omega = 1$	$\lambda\beta \frac{\beta\lambda \cosh(\beta\lambda) - \sinh(\beta\lambda)}{\sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2\lambda^2}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$\lambda\beta\gamma \frac{\beta \sin(\gamma\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \gamma \cos(\gamma\lambda) \sinh(\beta\lambda)}{\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)}$
$\omega = 0$	$\lambda \frac{\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda}{\sinh^2 \lambda - \sin^2 \lambda}$

$$p'_{AB}q'_{AB}$$

$\omega > 1$	$\frac{2 \lambda^2 \beta \delta}{3} \cdot \frac{\sinh(\beta\lambda) \sinh(\delta\lambda)}{\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)}$
$\omega = 1$	$\frac{2 \lambda^2 \beta}{3} \cdot \frac{\lambda \sinh(\beta\lambda)}{\sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \lambda^2}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$\frac{2 \lambda^2 \beta \gamma}{3} \cdot \frac{\sinh(\beta\lambda) \sin(\gamma\lambda)}{\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)}$
$\omega = 0$	$\frac{2 \lambda^2}{3} \cdot \frac{\sin \lambda \sinh \lambda}{\sinh^2 \lambda - \sin^2 \lambda}$

$$s'_{AB}$$

$\varepsilon > 1$	$\frac{\lambda^3 \beta \delta}{3} \cdot \frac{\beta \cosh(\delta\lambda) \sinh(\delta\lambda) + \delta \cosh(\beta\lambda) \sinh(\beta\lambda)}{\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)}$
$\varepsilon = 1$	$\frac{\lambda^3 \beta}{3} \cdot \frac{\beta\lambda + \cosh(\beta\lambda) \sinh(\beta\lambda)}{\sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \lambda^2}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \varepsilon < 1$	$\frac{\lambda^3 \beta \gamma}{3} \cdot \frac{\beta \cos(\gamma\lambda) \sin(\gamma\lambda) + \gamma \cosh(\beta\lambda) \sinh(\beta\lambda)}{\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)}$
$\varepsilon = 0$	$\frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{\sin \lambda \cos \lambda + \sinh \lambda \cosh \lambda}{\sinh^2 \lambda - \sin^2 \lambda}$

$$s'_{AB} \theta'_{AB}$$

$\omega > 1$	$\frac{\beta \delta \lambda^3}{3} \cdot \frac{\beta \cosh(\beta\lambda) \sinh(\delta\lambda) + \delta \sinh(\beta\lambda) \cosh(\delta\lambda)}{\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)}$
$\omega = 1$	$\frac{\beta \lambda^3}{3} \cdot \frac{\sinh(\beta\lambda) + \beta\lambda \cosh(\beta\lambda)}{\sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \lambda^2}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$\frac{\beta \gamma \lambda^3}{3} \cdot \frac{\gamma \sinh(\beta\lambda) \cos(\gamma\lambda) + \beta \cosh(\beta\lambda) \sin(\gamma\lambda)}{\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)}$
$\omega = 0$	$\frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda}{\sinh^2 \lambda - \sin^2 \lambda}$

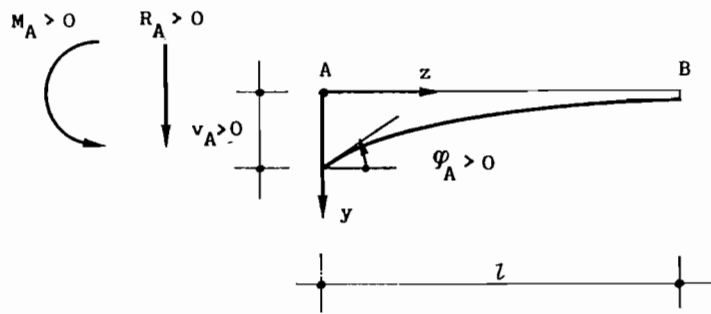
\bar{M}'_A

$\omega > 1$	$\frac{6}{\lambda^2} \cdot \frac{\delta \sinh(\beta\lambda) - \beta \sinh(\delta\lambda)}{\delta \sinh(\beta\lambda) + \beta \sinh(\delta\lambda)}$
$\omega = 1$	$\frac{6}{\lambda^2} \cdot \frac{\sinh(\beta\lambda) - \beta\lambda}{\sinh(\beta\lambda) + \beta\lambda}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$\frac{6}{\lambda^2} \cdot \frac{\gamma \sinh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda)}{\gamma \sinh(\beta\lambda) + \beta \sin(\gamma\lambda)}$
$\omega = 0$	$\frac{6}{\lambda^2} \cdot \frac{\sinh \lambda - \sin \lambda}{\sinh \lambda + \sin \lambda}$

 \bar{R}'_A

$\omega > 1$	$\frac{2 \beta \delta}{\lambda} \cdot \frac{\cosh(\beta\lambda) - \cosh(\delta\lambda)}{\delta \sinh(\beta\lambda) + \beta \sinh(\delta\lambda)}$
$\omega = 1$	$\frac{2 \beta}{\lambda} \cdot \frac{\cosh(\beta\lambda) - 1}{\sinh(\beta\lambda) + \beta\lambda}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$\frac{2 \beta \gamma}{\lambda} \cdot \frac{\cosh(\beta\lambda) - \cos(\gamma\lambda)}{\gamma \sinh(\beta\lambda) + \beta \sin(\gamma\lambda)}$
$\omega = 0$	$\frac{2}{\lambda} \cdot \frac{\cosh \lambda - \cos \lambda}{\sinh \lambda + \sin \lambda}$

Trave con un estremo incastrato e l'altro libero

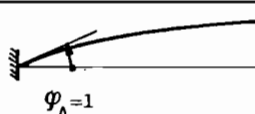
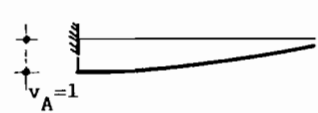



$$\alpha = \sqrt[4]{W/4EI}; \quad \lambda = \alpha l; \quad \omega = P/\sqrt{4WEI}$$

$$\beta = (1 + \omega)^{1/2},$$

$$\gamma = (1 - \omega)^{1/2}, \quad [\omega < 1]$$

$$\delta = (\omega - 1)^{1/2}, \quad [\omega > 1]$$

	M_A	R_A
	$(EI/l)e''_{AB}$	$-(EI/l^2)p''_{AB}$
	$-(EI/l^2)r''_{AB}$	$(EI/l^3)s''_{AB}$
	$(q l^2/2)\bar{M}'_A$	$-q/l \bar{R}'_A$

$$r''_{AB} = p''_{AB}$$

Q_{AB}''

$\omega > 1$	$2 \beta \delta \lambda \frac{(3\beta^2 + \delta^2) \delta \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + (3\delta^2 + \beta^2) \beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\delta\lambda) + [2(\beta^2 + \delta^2)]^{1/2} \beta \delta [\cosh^2(\beta\lambda) - \cosh^2(\delta\lambda)]}{(\beta^2 + \delta^2)[\beta^2 \sinh^2(\delta\lambda) + \delta^2 \sinh^2(\beta\lambda)] + 2\beta^2 \delta^2 [\cosh^2(\beta\lambda) + \cosh^2(\delta\lambda)] + 2\beta \delta [2(\beta^2 + \delta^2)]^{1/2} [\delta \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\delta\lambda)]}$
$\omega = 1$	$2 \beta \lambda \frac{3 \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + \beta \lambda + 2 \sqrt{2} \sinh^2(\beta\lambda)}{\beta^2 \lambda^2 + 4 \cosh^2(\beta\lambda) - \sinh^2(\beta\lambda) + 2 \sqrt{2} [\sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \lambda]}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$2 \beta \gamma \lambda \frac{(3\beta^2 - \gamma^2) \gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - (3\gamma^2 - \beta^2) \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda) + 2\beta\gamma [2(\beta^2 - \gamma^2)]^{1/2} [\cosh^2(\beta\lambda) - \cos^2(\gamma\lambda)]}{(\beta^2 - \gamma^2)[\beta^2 \sin^2(\gamma\lambda) + \gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda)] + 2\beta^2 \gamma^2 [\cosh^2(\beta\lambda) + \cos^2(\gamma\lambda)] + 2\beta\gamma [2(\beta^2 - \gamma^2)]^{1/2} [\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)]}$
$\omega = 0$	$2 \lambda \frac{\sinh \lambda \cosh \lambda - \sin \lambda \cos \lambda}{\cosh^2 \lambda + \cos^2 \lambda}$

P_{AB}''

$\omega > 1$	$2 \lambda^2 \frac{(\beta^2 + \delta^2) [\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)] + 2\beta^2 \delta^2 [\cosh^2(\beta\lambda) - \cosh^2(\delta\lambda)] + 2\beta \delta [2(\beta^2 + \delta^2)]^{1/2} [\delta \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + \beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\delta\lambda)]}{(\beta^2 + \delta^2) [\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) + \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)] + 2\beta^2 \delta^2 [\cosh^2(\beta\lambda) + \cosh^2(\delta\lambda)] + 2\beta \delta [2(\beta^2 + \delta^2)]^{1/2} [\delta \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\delta\lambda)]}$
$\omega = 1$	$2 \lambda^2 \frac{3 \sinh^2 \beta \lambda - \beta^2 \lambda^2 + 2 \sqrt{2} [\sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + \beta \lambda]}{\beta^2 \lambda^2 + 4 \cosh^2(\beta\lambda) - \sinh^2(\beta\lambda) + 2 \sqrt{2} [\sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \lambda]}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$2 \lambda^2 \frac{(\beta^2 - \gamma^2) [\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)] + 2\beta^2 \gamma^2 [\cosh^2(\beta\lambda) - \cos^2(\gamma\lambda)] + 2\beta\gamma [2(\beta^2 - \gamma^2)]^{1/2} [\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)]}{(\beta^2 - \gamma^2) [\beta^2 \sin^2(\gamma\lambda) + \gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda)] + 2\beta^2 \gamma^2 [\cosh^2(\beta\lambda) + \cos^2(\gamma\lambda)] + 2\beta\gamma [2(\beta^2 - \gamma^2)]^{1/2} [\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)]}$
$\omega = 0$	$2 \lambda^2 \frac{\cosh^2 \lambda - \cos^2 \lambda}{\cosh^2 \lambda + \cos^2 \lambda}$

$\omega > 1$	$4 \beta \delta \lambda^3 \frac{(3\beta^2 + \delta^2) \delta \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - (3\delta^2 + \beta^2) \beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\delta\lambda) + 2 \beta \delta [2(\beta^2 + \delta^2)]^{1/2} [\cosh^2(\delta\lambda) + \sinh^2(\beta\lambda)]}{(\beta^2 + \delta^2) [\beta^2 \sinh^2(\delta\lambda) + \delta^2 \sinh^2(\beta\lambda)] + 2\beta^2 \delta^2 [\cosh^2(\delta\lambda) + \cosh^2(\beta\lambda)] + 2 \beta \delta [2(\beta^2 + \delta^2)]^{1/2} [\delta \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\delta\lambda)]}$
$\omega = 1$	$4 \beta \lambda^3 \frac{3 \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \lambda + 2 \beta [1 + \sinh^2(\beta\lambda)]}{\beta^2 \lambda^2 - \sinh^2(\beta\lambda) + 4 \cosh^2(\beta\lambda) + 2 \beta [\sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \lambda]}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$4 \beta \gamma \lambda^3 \frac{(3\beta^2 - \gamma^2) \gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + (3\gamma^2 - \beta^2) \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda) + 2 \beta \gamma [2(\beta^2 - \gamma^2)]^{1/2} [\cos^2(\gamma\lambda) + \sinh^2(\beta\lambda)]}{(\beta^2 - \gamma^2) [\beta^2 \sin^2(\gamma\lambda) + \gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda)] + 2\beta^2 \gamma^2 [\cos^2(\gamma\lambda) + \cosh^2(\beta\lambda)] + 2\beta \gamma [2(\beta^2 - \gamma^2)]^{1/2} [\gamma \cosh(\beta\lambda) \sinh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)]}$
$\omega = 0$	$4 \lambda^3 \frac{\sinh \lambda \cosh \lambda + \sin \lambda \cos \lambda}{\cosh^2 \lambda + \cos^2 \lambda}$

$\omega > 1$	$\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{(\beta^2 + \delta^2) [\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)] + 2\beta^2 \delta^2 [\cosh^2(\beta\lambda) - \cosh^2(\delta\lambda)] + 4\beta \delta [(\beta^2 + \delta^2)/2]^{1/2} [\delta \sinh(\beta\lambda) - \beta \sinh(\delta\lambda)] [\cosh(\beta\lambda) - \cosh(\delta\lambda)]}{(\beta^2 + \delta^2) [\delta^2 \sinh^2(\beta\lambda) + \beta^2 \sinh^2(\delta\lambda)] + 2\beta^2 \delta^2 [\cosh^2(\beta\lambda) + \cosh^2(\delta\lambda)] + 4\beta \delta [(\beta^2 + \delta^2)/2]^{1/2} [\delta \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\delta\lambda)]}$
$\omega = 1$	$\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\beta [\sinh^2 \beta\lambda (\beta\lambda) - \beta^2 \lambda^2] + 2\beta [\cosh^2(\beta\lambda) - 1] + 4 [\sinh(\beta\lambda) - \beta\lambda] [\cosh(\beta\lambda) - 1]}{\beta [\sinh^2 \beta\lambda + \beta^2 \lambda^2] + 2 \beta [\cosh^2(\beta\lambda) + 1] + 4 [\sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta\lambda]}, \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{(\beta^2 - \gamma^2) [\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) - \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)] + 2\beta^2 \gamma^2 [\cosh^2(\beta\lambda) - \cos^2(\gamma\lambda)] + 4\beta \gamma [(\beta^2 - \gamma^2)/2]^{1/2} [\gamma \sinh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda)] [\cosh(\beta\lambda) - \cos(\gamma\lambda)]}{(\beta^2 - \gamma^2) [\gamma^2 \sinh^2(\beta\lambda) + \beta^2 \sin^2(\gamma\lambda)] + 2\beta^2 \gamma^2 [\cosh^2(\beta\lambda) + \cos^2(\gamma\lambda)] + 4\beta \gamma [(\beta^2 - \gamma^2)/2]^{1/2} [\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)]}$
$\omega = 0$	$\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\cosh^2 \lambda - \cos^2 \lambda}{\cosh^2 \lambda + \cos^2 \lambda}$

$\omega > 1$	$\frac{\beta\delta}{\lambda} \cdot \frac{(3\beta^2 + \delta^2)\delta \sinh(\beta\lambda)\cosh(\beta\lambda) - (3\delta^2 - \beta^2)\beta\sinh(\delta\lambda)\cosh(\delta\lambda) + 2[(\beta^2 + \delta^2)/2]^{1/2} [2\beta\delta \{\sinh^2(\beta\lambda) + \cosh^2(\delta\lambda) - \cosh(\delta\lambda) \cosh(\beta\lambda)\} - (\beta^2 + \delta^2)\sinh(\beta\lambda)\sinh(\delta\lambda)]}{(\beta^2 + \delta^2)[\beta^2\sinh^2(\delta\lambda) + \delta^2\sinh^2(\beta\lambda)] + 2\beta^2\delta^2[\cosh^2(\delta\lambda) + \cosh^2(\beta\lambda)] + 4\beta\delta[(\beta^2 + \delta^2)/2][\delta \sinh(\beta\lambda)\cosh(\beta\lambda) - \beta \sinh(\delta\lambda) \cosh(\delta\lambda)]}$
$\omega = 1$	$\frac{\beta}{\lambda} \cdot \frac{\beta [3 \sinh \beta\lambda \cosh(\beta\lambda) - \beta\lambda] + 4[\sinh^2(\beta\lambda) + 1 - \cosh(\beta\lambda)] - 2\beta\lambda \sinh(\beta\lambda)}{\beta[\beta^2\lambda^2 + \sinh^2(\beta\lambda) + 2\beta[1 + \cosh^2(\beta\lambda)] + 4[\sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta\lambda]} , \text{ per } \beta = \sqrt{2}$
$0 < \omega < 1$	$\frac{\beta\gamma}{\lambda} \cdot \frac{(3\gamma^2 - \beta^2)\beta \sin(\gamma\lambda)\cos(\gamma\lambda) + (3\beta^2 - \gamma^2)\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) + 2[(\beta^2 - \gamma^2)/2]^{1/2} [2\beta\gamma\{\sinh^2(\beta\lambda) + \cos^2(\gamma\lambda) - \cos(\gamma\lambda)\cosh(\beta\lambda)\} - (\beta^2 - \gamma^2) \sin(\gamma\lambda) \sinh(\beta\lambda)]}{(\beta^2 - \gamma^2)[\beta^2\sin^2(\gamma\lambda) + \gamma^2\sinh^2(\beta\lambda)] + 2\beta^2\gamma^2[\cos^2(\gamma\lambda) + \cosh^2(\beta\lambda)] + 4\beta\gamma[(\beta^2 - \gamma^2)/2]^{1/2} [\gamma \sinh(\beta\lambda) \cosh(\beta\lambda) - \beta \sin(\gamma\lambda) \cos(\gamma\lambda)]}$
$\omega = 0$	$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda \cosh \lambda + \sin \lambda \cos \lambda}{\cosh^2 \lambda + \cos^2 \lambda}$