

Analisi di stabilità dei muri in terra rinforzata

R. MANGIAVACCHI *, R. NOVA **, G. PELLEGRINI ***

SOMMARIO: Sono illustrati alcuni dei metodi più usati per il calcolo dei muri in terra rinforzata e ne vengono messi in luce i limiti. Si propone quindi un nuovo metodo basato sul metodo dell'equilibrio limite.

La soluzione ottenuta, viene confrontata con quelle tradizionali e con i risultati sperimentali relativi a modelli ridotti ed in vera grandezza. Si mostra come il metodo proposto, a differenza dei metodi classici, dia risultati in buon accordo con la realtà sperimentale.

I risultati ottenuti vengono forniti in forma di abaco per permettere un dimensionamento semplice e razionale dei muri in terra rinforzata.

1. Introduzione

Negli ultimi anni si è andato diffondendo l'uso di un nuovo materiale da costruzione, economico e funzionale: la terra rinforzata. Impiegato inizialmente per la realizzazione di opere di sostegno, trova oggi un dominio di applicazione molto ampio che va dalle costruzioni stradali e ferroviarie (rilevati, muri di sostegno, spalle di ponti) a quelle marittime (frangiflutti, banchine, dighe), a quelle industriali (tramogge per materiali sciolti). Può essere utilizzato anche per la costruzione di terrazze e conseguente sistemazione per l'urbanizzazione di terreni in pendenza.

A fronte di un sempre crescente impiego costruttivo, tuttavia non fa riscontro un'adeguata comprensione del comportamento meccanico di questo tipo di materiale. Di conseguenza, i metodi di progetto oggi disponibili sono essenzialmente di tipo semiempirico e non consentono una razionale valutazione della sicurezza di un'opera in terra rinforzata.

In effetti il funzionamento della terra rinforzata è intuitivamente molto semplice. Com'è noto, la terra rinforzata è costituita da un ammasso di terreno di riempimento, in genere granulare, in cui sono annegate delle 'armature' costituite da strisce metalliche, oppure da nastri di materiale geotessile, oppure ancora da reti metalliche o in plastica. L'attrito tra le armature e il terreno di riempimento fornisce a quest'ultimo un contenimento laterale che impedisce alla sabbia di defluire lateralmente. Con opportune armature, è possibile costruire rilevati o muri di sostegno a parete

verticale anche molto alti, superiori ai 15 m, utilizzando sabbia come materiale di riempimento. In effetti, il principio di funzionamento della terra rinforzata è così elementare che i primi impieghi di essa, in forma rudimentale, possono essere fatti risalire addirittura ai Sumeri. La piramide (ziggurat) di Aqar Quf (Iraq), alta circa 57 m, risale al 1400 a.C.

A fronte della semplicità della concezione, fa tuttavia riscontro una situazione molto complessa dal punto di vista meccanico. Lo stato tensionale all'interno del terreno è infatti disuniforme e non è semplice determinare l'andamento delle trazioni nelle armature per un corretto dimensionamento sia del loro spessore che della 'lunghezza di ancoraggio'.

I metodi tradizionali di progetto hanno aggirato la difficoltà del problema della stabilità delle opere in terra rinforzata cercando di trovare una soluzione, cioè una distribuzione delle forze di trazione nelle armature, che garantisca l'equilibrio globale. Al confronto con la realtà sperimentale, però, questi metodi falliscono sia nella determinazione della forza di trazione nelle armature sia nella predizione dell'altezza critica per cui un muro di sostegno in terra rinforzata collassa.

È quindi necessario trovare un metodo di progetto che, pur salvaguardando la semplicità progettuale, consenta una determinazione più affidabile della sicurezza di un'opera in terra rinforzata. A questo scopo si propone di analizzare la stabilità di un muro in terra rinforzata con un metodo dell'equilibrio limite assumendo come linea di rottura una spirale logaritmica. Si dimostrerà che in questo modo è possibile cogliere bene l'andamento dei risultati sperimentali sia per ciò che riguarda l'altezza di collasso del muro sia per ciò che concerne l'andamento della linea di rottura.

* Dott. Ing. Roberto MANGIAVACCHI, libero professionista.

** Prof. Ing. Roberto NOVA, Professore Associato, Politecnico di Milano.

*** Dott. Ing. Giulia PELLEGRINI, Itairport, Milano.

Su questa base verrà fornito un nuovo schema progettuale che consente una semplice e razionale determinazione della sezione delle armature e della lunghezza di ancoraggio necessaria per evitarne lo sfilamento.

Nel seguito si farà essenzialmente riferimento a muri con armatura continua (geotessili o geomembrane). Il caso di armature discrete (terra armata) verrà esaminato in dettaglio nella parte finale dell'articolo in cui viene discussa la procedura di dimensionamento delle armature ed in particolare la determinazione della lunghezza di ancoraggio.

2. I metodi classici per il calcolo dei muri in terra rinforzata

I metodi classici per il progetto dei muri di terra rinforzata distinguono tra verifica della stabilità esterna e verifica della stabilità interna del muro. La stabilità esterna si riferisce alla stabilità del muro, inteso come un blocco rigido, al ribaltamento, scivolamento e sprofondamento, come per un normale muro a gravità. Questo aspetto non presenta differenze dai normali metodi di verifica della stabilità dei muri di sostegno e non verrà trattato nel seguito. L'analisi di stabilità interna si riferisce alla verifica che il muro, sotto l'azione del proprio peso e della spinta del terreno adiacente, non collassi o perché le armature raggiungono il limite di resistenza a trazione o perché esse si sfilano dal terreno per difetto d'ancoraggio.

Si consideri il muro di fig. 1, di altezza H e con superficie libera orizzontale, costituito da un materiale di riempimento granulare, con angolo di attrito Φ e peso specifico γ , rinforzato

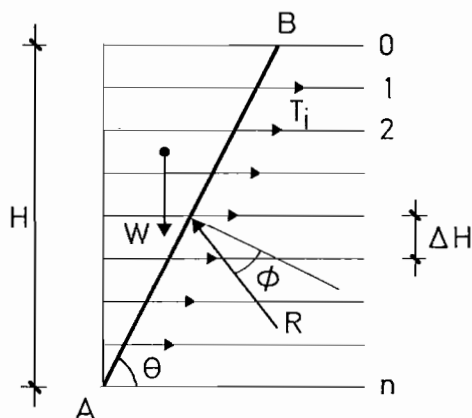


Fig. 1. - Muro di sostegno in terra rinforzata con superficie di rottura piana.

da una serie di armature continue di spessore t e lunghezza L , con una resistenza a trazione per unità di lunghezza pari ad R_t , uniformemente distribuite nel terreno con passo verticale ΔH . Si consideri il problema piano nelle deformazioni. Si assuma per il momento che la lunghezza di ancoraggio sia tale da prevenire lo sfilamento delle armature.

Il primo metodo di verifica, dovuto a SCHLOSSER e VIDAL [1969], è una generalizzazione del metodo di Coulomb. Assumendo che la linea AB di fig. 1 sia un potenziale piano di rottura inclinato di θ con l'orizzontale, imponendo l'equilibrio alla traslazione in direzione verticale e orizzontale del cuneo di rottura e ricordando che la risultante R delle reazioni vincolari esercitate sul cuneo di rottura del terreno deve essere inclinata di Φ con la normale alla linea di rottura per soddisfare la condizione di collasso di Coulomb, si ricava che la risultante delle azioni di trazione nelle armature, T_i , deve essere

$$\sum_{i=0}^n T_i = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cotg \theta \operatorname{tg}(\theta - \Phi) \quad (1)$$

Il massimo valore della risultante si ha per

$$\theta = \pi/4 + \Phi/2 \quad (2)$$

cosicché il valore di progetto risulta essere

$$\left(\sum_{i=0}^n T_i \right)_{\max} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_A \quad (3)$$

dove K_A è il coefficiente di spinta attiva di Rankine.

Per determinare il valore delle singole azioni nelle armature, Schlosser e Vidal assunsero arbitrariamente una distribuzione lineare delle trazioni cosicché, essendo $T_i = 0$ per $i = 0$,

$$T_i = \frac{i T_n}{n} \quad (4)$$

Dalle (3), (4) è facile allora ricavare che

$$T_i = \frac{2i}{n(n+1)} S_A = T_{ii} \quad (5)$$

dove

$$S_A = \frac{1}{2} \gamma K_A H^2 \quad (6)$$

Può essere interessante notare che ad un risultato analogo si giunge se si ammette che la tensione in ciascun livello di armatura sia tale da garantire l'equilibrio della porzione di muro sovrastante.

Si ha in questo caso per $i \geq 1$ ($T_0 = 0$)

$$T_i = \frac{2i - 1}{n^2} S_A = T_{i2} \quad (7)$$

che implica una variazione, lineare con la profondità, della trazione nelle armature.

Successivamente LEE [1976] propose un nuovo metodo in cui si impone anziché l'equilibrio alla traslazione, quello alla rotazione rispetto al punto medio della mase del muro. Si ha allora

$$\sum_0^n T_i (n - 1) \Delta H = \frac{1}{6} \gamma K_A H^3 \quad (8)$$

Assumendo ancora valida la (4) si ottiene

$$T_i = \frac{2i}{n^2 - 1} S_A = T_{i3} \quad (9)$$

Per valori abbastanza grandi di n la (5) e la (9) sono praticamente coincidenti. Per le armature più profonde, e quindi più sollecitate, anche la (7) fornisce in pratica lo stesso valore.

Tuttavia, questi metodi soffrono di un'importante debolezza concettuale. Infatti se la linea AB viene pensata come una linea di rottura allora le T_i devono essere le trazioni di collasso per le armature per cui

$$T_i = R_i \quad (10)$$

costanti con la profondità, in contraddizione con le (5), (7), (9). Se d'altro canto la linea AB è pensata come una semplice sezione ideale per cui le T_i non rappresentano necessariamente le azioni interne a rottura, allora non c'è motivo, a priori, perché la risultante delle reazioni vincolari sia inclinata di Φ con la normale alla linea AB, e allora la (1), su cui si basa la derivazione delle (5), (7) non è più valida. D'altro canto, il metodo di Lee presuppone che lo stato di sforzo nel terreno sia sostanzialmente identico nella zona armata e in quella non armata, ciò che è certamente falso a causa della presenza di sforzi di taglio sulle facce orizzon-

tali di elementi di terreno a contatto con le armature.

Sulla base dei tre metodi precedenti è possibile predire l'altezza limite di collasso di un muro in terra armata. Ammettendo per semplicità che n sia grande e definendo, in accordo con Schlosser e Vidal, come altezza limite l'altezza del muro per cui anche un solo livello di armatura raggiunge il valore limite si ha, per tutti e tre i metodi,

$$H_{L1} = \sqrt{\frac{n R_t}{\gamma K_A}} = \frac{R_t}{\gamma K_A \Delta H} \quad (11)$$

Questo valore è appropriato per armature che presentino un tipo di rottura fragile per cui quando la trazione raggiunge R_t l'armatura si spezza. È chiaro che in questo caso la forza di trazione relativa all'armatura spezzata deve ridistribuirsi sulle altre armature. Di solito ciò comporta che almeno un'altra armatura raggiunga il limite di collasso con un processo a catena che è la causa di un brusco crollo del muro.

Un altro metodo proposto da Schlosser e Vidal per la determinazione delle trazioni nelle armature è basato su di un'estensione del metodo di Rankine. Si assume che ciascuna striscia d'armatura sostenga la spinta orizzontale del terreno che la separa dalla precedente, fig. 2. La forza T_i sarà allora data da

$$T_i = K_A \left(\sigma_{v_{i-1}} \Delta H + \frac{1}{2} \gamma \Delta H^2 \right) \quad (12)$$

Assumendo che lo stato di sforzo all'interno del muro sia lo stesso che si avrebbe in un terreno adiacente ad un muro liscio

$$\sigma_{v_{i-1}} = (i - 1) \gamma \Delta H \quad (13)$$

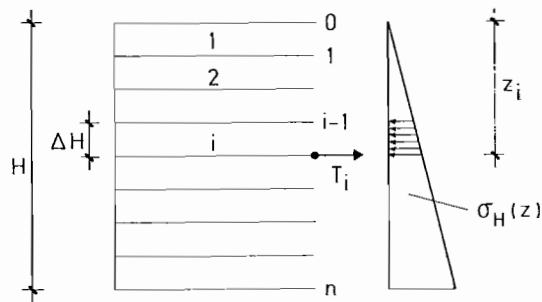


Fig. 2. - Schema concettuale per il calcolo delle trazioni nelle armature secondo SCHLOSSER e VIDAL [1969] ('metodo di Rankine').

da cui

$$T_i = \frac{2i - 1}{n^2} S_A \quad (14)$$

che coincide con la (7). Da un punto di vista pratico quindi tutti i metodi fin qui esposti non comportano differenze apprezzabili nella valutazione di T_i , per lo meno per n grande.

SCHLOSSER [1972] modificò la (12), assumendo una diversa distribuzione degli sforzi verticali. Infatti per l'equilibrio al ribaltamento del muro la distribuzione degli sforzi verticali sul terreno è diversa da quella geostatica. Assumendo che a ridosso del muro sia mobilitata la spinta attiva e che gli sforzi verticali si distribuiscano alla Meyerhof, fig. 3, il valore di $\sigma_{v_{i-1}}$ che appare nella 12 è dato da

$$\sigma_{v_{i-1}} = \alpha_i (i - 1) \gamma \Delta H \quad (15)$$

dove

$$\alpha_i = \frac{1}{1 - \frac{K_A}{3} \left[\frac{(i - 1) \Delta H}{L} \right]^2} \quad (16)$$

dove L è la lunghezza delle armature.

Per armature lunghe, $\alpha_i \approx 1$ e quindi la (14) fornisce ancora il valore delle trazioni nelle armature mentre la (11) fornisce il valore dell'al-

tezza limite per armature fragili. Nel caso generale la trazione massima è pari a

$$T_n = S_A \frac{1 + 2\alpha_n (n - 1)}{2n^2} \quad (17)$$

L'espressione dell'altezza critica può essere ottenuta imponendo $T_n = R_i$ nella (17). Poiché l'equazione che se ne deriva è in forma implicita, il valore di H_L può essere ottenuto per tentativi.

Il primo dei due metodi ipotizza una distribuzione di sforzi verticali sicuramente lontana dal vero. Infatti poiché le armature funzionano grazie agli sforzi di taglio comunicati dal terreno, gli sforzi orizzontali e verticali non sono certo sforzi principali e la teoria di Rankine non può essere applicata. Il secondo metodo rimuove in parte questo inconveniente perché lo stato attivo di Rankine è assunto esistere fuori dal muro, ma la validità della (14) non viene messa in discussione. Inoltre poiché $\alpha_i > 1$ le trazioni sono maggiori e l'altezza critica del muro è raggiunta prima. Poiché però, come si vedrà, in genere questi metodi forniscono valori troppo bassi dell'altezza di collasso del muro, si comprende come anche questo metodo non sia soddisfacente.

3. Il metodo di Juran e Schlosser

Un notevole passo avanti verso la definizione di un metodo di analisi che consentisse predizioni in migliore accordo con l'esperienza è stato compiuto da Juran e Schlosser (JURAN [1977], JURAN e SCHLOSSER [1979]). Gli autori osservarono sperimentalmente che il luogo dei punti in cui lo sforzo di trazione nelle armature è massimo può essere ben approssimato da una spirale logaritmica che passa per la base del muro e taglia ortogonalmente la superficie libera del terreno. Essi ipotizzarono che questa fosse la linea di rottura potenziale delle armature e che lungo di essa la resistenza al taglio del terreno fosse interamente mobilitata.

Lo sforzo di trazione nelle armature è lasciato incognito a priori così come l'altezza limite di collasso. Viene imposto l'equilibrio alla rotazione rispetto al piede del muro e l'equilibrio alla traslazione di strisce orizzontali di ampiezza ΔH poste a cavallo delle armature, fig. 4. Lo sforzo di taglio sulle facce orizzontali che delimitano le strisce è posto uguale a zero. Ciò è ragionevole se si pensa che lo sforzo di taglio

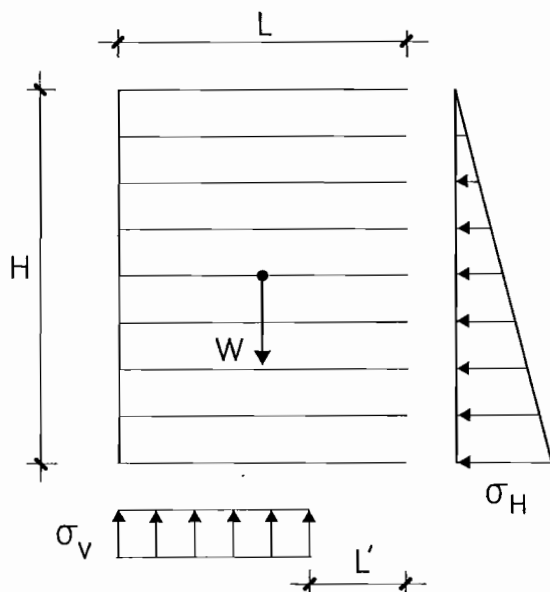


Fig. 3. - Schema di calcolo degli sforzi verticali secondo SCHLOSSER [1972]. Per l'equilibrio alla rotaz. $L' = K_A H^2 / 3L$.

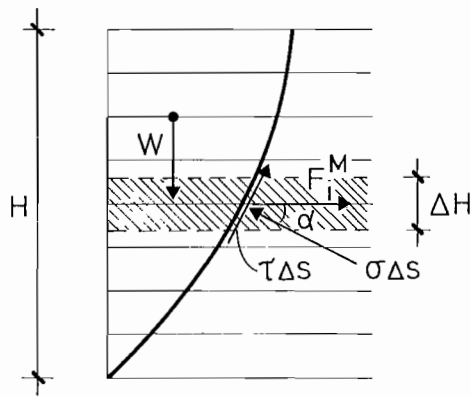


Fig. 4. - Schema concettuale per il calcolo di T_i secondo Juran e Schlosser.

agente sulle armature deve cambiare di segno nel passare da un'armatura all'altra.

L'equilibrio alla traslazione di ciascuna striscia richiede allora che

$$T_i^M = \int_{\Delta S} (\sigma \cos \alpha(s) + \tau \sin \alpha(s)) ds \quad (18)$$

essendo α l'angolo formato dalla normale alla linea delle massime trazioni T_i^M con l'orizzontale. Poiché lo stato di sforzo nel terreno è per ipotesi a rottura:

$$\tau = \sigma \tan \Phi \quad (19)$$

Per ottenere l'espressione dello sforzo normale gli autori integrano un'equazione di Kötter (1888)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} + 2\sigma \tan \Phi \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \cos(\alpha + \Phi) \cos \Phi \quad (20)$$

sotto la condizione che in superficie lo sforzo normale sia nullo.

Le equazioni di Kötter, come è noto, vedi ad esempio SALENÇON [1974], impongono condizioni sullo stato di sforzo sulle linee caratteristiche del sistema iperbolico costituito dalle equazioni di equilibrio indefinito nel piano e dalla condizione di rottura del terreno pensato come un continuo omogeneo. La linea di rottura è una particolare linea caratteristica. Nell'ipotesi che lungo la linea delle massime trazioni il terreno mobiliti la resistenza a rottura e si trovi quindi nelle stesse condizioni che si avrebbero se il terreno fosse omogeneo, gli autori assumono la validità della (20) 'disaccop-

piando' il comportamento del terreno da quello delle armature.

Scelta una spirale logaritmica è possibile ottenere la soluzione della (20); anche la (18) può essere allora integrata ed è possibile così conoscere l'entità delle trazioni nelle armature.

Tra tutte le soluzioni ottenute al variare della linea di rottura si sceglie quella che rispetta l'equilibrio alla rotazione.

Il procedimento proposto da Juran e Schlosser è complesso ma il suo uso pratico è semplice. Infatti il valore dell'altezza di collasso del muro, la linea di rottura e la distribuzione delle T_i^M possono essere calcolate una sola volta per ogni Φ . Per semplificare ulteriormente il progetto, gli autori propongono di approssimare la distribuzione delle tensioni massime con una spezzata bilineare, fig. 5, di equazione

$$\begin{cases} T_i^n = K^* \gamma Z_i \Delta H & \text{per } Z_i \leq H_0 \\ T_i^M = K^* \gamma H_0 \Delta H & \text{per } Z_i \geq H_0 \end{cases} \quad (21)$$

dove

$$K^* = \frac{1 - \sin^2 \Phi}{1 + \sin^2 \Phi} \quad (22)$$

e H_0 è un valore caratteristico della profondità, che a rottura può essere determinato imponendo che il terreno si trovi in condizioni di spinta attiva. Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale si deve avere allora

$$\Sigma T_i^M = \frac{1}{2} \gamma K_A H_L^2 \quad (23)$$

per cui

$$H_0 = (1 - \sqrt{1 - K_A/K^*}) H_L \quad (24)$$

Per valori di Φ compresi tra 30° e 45° , H_0 è pari a circa un terzo di H_c . Il valore limite può essere ricavato imponendo che la resistenza a rottura sia raggiunta nelle armature poste nella parte inferiore del muro, per cui

$$R_t = K^* \gamma H_0 \Delta H \quad (25)$$

per cui tenendo conto della (24)

$$H_L^2 = \frac{R_t}{K^* \gamma \Delta H} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - K_A/K^*}} \quad (26)$$

La stima di H_L è quindi decisamente superiore a quella ottenibile con i metodi tradizio-

nali. Confrontando infatti la (26) con la (11) si ricava che

$$H_L/H_L' = \frac{K_A/K^*}{1 - \sqrt{1 - K_A/K^*}} \quad (27)$$

Per Φ compreso tra 30° e 45° la (27) implica che la stima dell'altezza di collasso sia incrementata di circa il 70%. Si noti però che la distribuzione da cui si è ricavato H_L è approssimata. Il metodo di Juran e Schlosser fornisce a rigore solo un incremento di circa il 50%.

Pur rimanendo ancora al di sotto dei valori osservati sperimentalmente su modello di circa il 20%, è chiaro che questo metodo consente una stima dell'altezza limite nettamente migliore rispetto ai metodi presentati nel capitolo precedente. Inoltre indagini sperimentali condotte su muri in vera grandezza in condizioni di esercizio hanno mostrato che l'andamento bilineare delle trazioni massime indicato dalla (21) approssima molto bene l'andamento osservato, lasciando H_0 come variabile libera.

Tuttavia, il metodo di Juran e Schlosser non può essere considerato totalmente soddisfacente per ragioni sia teoriche che pratiche. In primo luogo la linea delle trazioni massime non è una linea di rottura e quindi non c'è motivo, a priori, perché il terreno mobiliti lungo di essa tutta la sua resistenza. Inoltre, anche accettando questa ipotesi, la presenza delle armature altera sostanzialmente lo stato di sforzo che il terreno avrebbe in assenza di queste ultime. Quindi le linee caratteristiche del problema in esame sono diverse da quelle di un equivalente continuo omogeneo.

Non esiste nessuna ragione quindi per cui lungo la linea delle massime trazioni debba valere l'equazione di Kötter. Inoltre la determi-

nazione di H_L è basata sull'ipotesi che la spinta del terreno sia uguale a quella di Rankine, il che è certamente non aderente alla realtà per i motivi già esposti nel paragrafo precedente. Infine, non è chiaro come il metodo potrebbe essere esteso al caso di interesse pratico in cui il terreno avesse una superficie libera inclinata.

4. Un metodo basato sul concetto di equilibrio limite

Tutti i metodi presentati finora, pur mirando a definire lo stato di trazione nelle armature in condizioni di esercizio, utilizzano largamente, quando viene utile, concetti applicabili soltanto in condizioni di rottura. Essi prestano dunque il fianco a critiche dal punto di vista teorico. Dal momento che, oltre ad essere poco rigorosi, essi sottostimano il valore di collasso sperimentale e non sono quindi del tutto affidabili dal punto di vista pratico, si è pensato di studiare un nuovo metodo, basato sul concetto elementare di equilibrio limite su cui sono fondate tutte le analisi di stabilità comunemente effettuate in Ingegneria Geotecnica.

A questo scopo, si assumerà che le armature abbiano comportamento duttile, siano cioè in grado di sostenere uno sforzo di trazione pari ad R_t anche per grandi deformazioni. In genere le armature dei muri in terra rinforzata godono di questa caratteristica e l'ipotesi introdotta non sembra quindi essere fortemente limitativa.

Si ammetta, in prima approssimazione, che la rottura avvenga lungo una retta come in fig. 1. Per l'equilibrio, la (1) deve essere ancora valida e così la (3). A differenza di quanto fatto da Schlosser e Vidal, però, noi assumeremo che, perché il collasso avvenga, tutte le armature e non solo la più bassa debbano trovarsi al limite di resistenza R_t . Infatti se il collasso avviene tutte le armature sono chiamate a collaborare al massimo della loro resistenza, ammettendo naturalmente valida l'ipotesi di duttilità e di poter disporre di una lunghezza di ancoraggio delle armature sufficiente ad impedire lo sfilamento.

Si avrà allora

$$(n - 1) R_t = \frac{1}{2} K_A \gamma H^2 \quad (28)$$

per cui

$$H_L = H_L' = \sqrt{\frac{2(n-1)R_t}{\gamma K_A}} \approx \frac{2R_t}{\gamma K_A \Delta H} \quad (29)$$

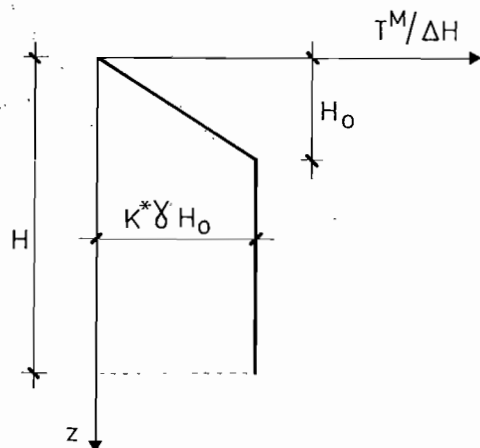


Fig. 5. - Schema semplificato di progetto per le trazioni nelle armature secondo Juran e Schlosser.

Si noti che il termine $(n - 1)$ compare al posto di n nella (29) perché, a parità di altezza del muro, la linea di rottura potrebbe svilupparsi appena sopra l'armatura più bassa, che non darebbe così alcun contributo alla resistenza.

Il valore di H_L ottenuto è esattamente il doppio (per n grande) del valore fornito dalla (11). Tuttavia non è detto che H_{L_3} sia il minore tra tutti i possibili valori associati a meccanismi di rottura.

Infatti, se come meccanismo di collasso si sceglie una spirale logaritmica che passa per il piede del muro si ottiene un valore dell'altezza limite che è inferiore a quello fornito dalla (29) ed è quindi più vicino al valore reale. È noto infatti che i metodi dell'equilibrio limite sovrastimano in genere il valore reale di collasso e quindi il minimo dei valori ottenuti per questa via costituisce la migliore approssimazione al valore di collasso effettivo.

Si consideri la fig. 6. Si assuma che il muro sia a collasso. Poiché il terreno non ha coesione, le reazioni vincolari esercitate dal terreno hanno retta d'azione che passa per il polo della spirale e non danno contributo al momento. Quindi l'equilibrio dei momenti intorno al polo della spirale richiede che

$$\sum_1^{(n-1)} R_i (r_o \sin \theta_o + i \Delta H) = \int_{\Omega} \gamma \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \quad (30)$$

essendo
$$f_1(\Phi, \theta_o, \theta_h) = \{ (3 \tan \Phi \cos \theta_h + \sin \theta_h) \exp [3 (\theta_h - \theta_o) \tan \Phi] - (3 \tan \Phi \cos \theta_o + \sin \theta_o) \} \cdot [3 (1 + 9 \tan^2 \Phi)]^{-1} \quad (34)$$

$$f_2(\Phi, \theta_o, \theta_h) = \frac{1}{6} (\cos^2 \theta_o - \cos^2 \theta_h \exp [2 \tan \Phi (\theta_h - \theta_o)]) \sin \theta_o \quad (35)$$

$$f_3(\Phi, \theta_o, \theta_h) = \frac{1}{3} (\sin \theta_h \exp [\tan \Phi (\theta_h - \theta_o)] - \sin \theta_o) \cdot \cos^2 \theta_h \exp [2 (\theta_h - \theta_o) \tan \Phi] \quad (36)$$

$$f_4(\Phi, \theta_o, \theta_h) = (\sin \theta_o + \sin \theta_h \exp [\tan \Phi (\theta_h - \theta_o)]) \cdot (\sin^2 \theta_h \exp [2 \tan \Phi (\theta_h - \theta_o)] - \sin^2 \theta_o) \quad (37)$$

La condizione $\theta_o \geq 0$ è necessaria affinché le armature lavorino solo a trazione. Il valore K_m può essere ottenuto numericamente per un assegnato valore di Φ , ad esempio facendo uso del metodo di minimizzazione noto come metodo del Simplex. Dalla (33) è quindi facile ricavare il valore dell'altezza critica una volta

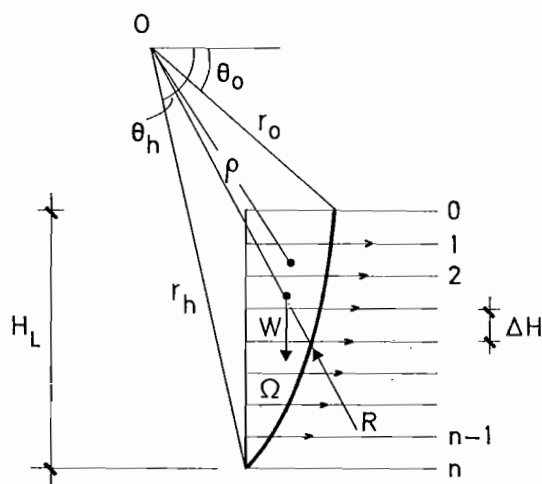


Fig. 6. - Schema di calcolo per il metodo proposto.

Essendo

$$r = r_o e^{(\theta - \theta_o) \tan \Phi} \quad (31)$$

l'equazione della spirale logaritmica, dopo lunghi passaggi algebrici si ricava che

$$H_{L_4} = \sqrt{\frac{(n-1) R_t}{\gamma K_m}} \approx \frac{R_t}{\gamma K_m \Delta H} \quad (32)$$

dove

$$K_m(\Phi) = \max_{\theta_o, \theta_h} \left\{ \frac{2(f_1 - f_2 - f_3)}{f_4} \mid \theta_h \geq \theta_o \geq 0 \right\} \quad (33)$$

fissati il numero e la resistenza delle armature.

Poiché ai fini pratici potrebbe essere scomoda l'utilizzazione di un coefficiente K_m non facilmente esprimibile in forma chiusa è conveniente fornire una semplice espressione approssimata di H_L .

Come si può notare dalla fig. 7, la differenza tra il valore corretto di H_L ottenibile con la (32) e il valore approssimato H_{L5} ottenibile ponendo

$$K_m = .55 K_A \quad (38)$$

è trascurabile in un intervallo ampio di valori di Φ che copre la zona di interesse pratico.

La fig. 7 riporta per confronto anche i valori di H_L ottenuti con gli altri metodi presentati in questo articolo.

È possibile a questo punto un confronto con i dati sperimentali ottenuti al L.C.P.C. (da LEGEAY [1978]) su muri modello in cui le armature sono discrete, anziché continue come si è supposto in tutto quanto precedeva. Se b è la larghezza delle armature, ed e è la distanza orizzontale tra gli assi di queste ed r_t è la resistenza unitaria a trazione di ciascuna delle armature, la resistenza R_t da introdurre nelle formule che forniscono il valore dell'altezza limite è

$$R_t = r_t \frac{b}{e} \quad (39)$$

Quindi la resistenza varia linearmente al variare della larghezza delle armature. Le formu-

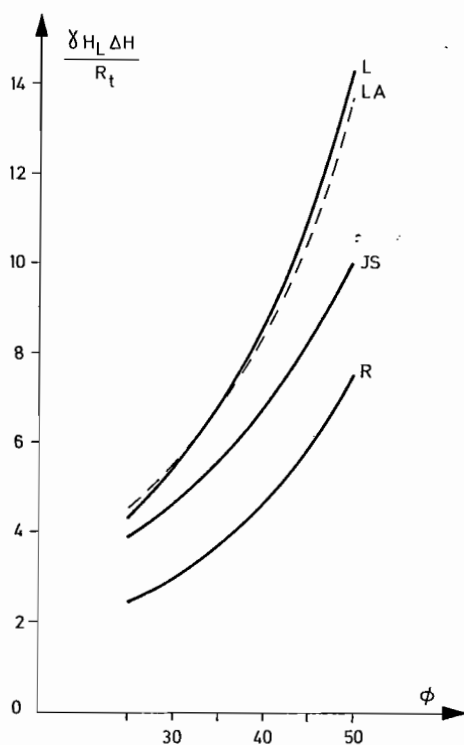


Fig. 7. - Variazione dell'altezza limite normalizzata secondo i vari metodi L = Equilibrio limite, LA = Equilibrio limite approssimato (Eq. 38) JS = Metodo di Juran e Schlosser, R = Metodi del § 2.

le teoriche (11), (26), (32) predicono tutte che l'altezza limite vari linearmente con R_t e quindi per la (39) con b . In fig. 8 sono riportati i valori sperimentali di collasso e le predizioni teoriche ottenute con il metodo tradizionale, con il metodo di Juran e Schlosser e con quello presentato in questo articolo. Si può notare come quest'ultimo dia l'approssimazione migliore. Risultati del tutto analoghi si ottengono confrontando i metodi teorici con i risultati sperimentali di BEN ASSILA e EL AMRI [1984], ottenuti all'E.N.P.C.

Si noti che il metodo dell'equilibrio limite essendo un metodo cinematico dovrebbe fornire un valore approssimato per eccesso mentre in questo caso i valori sperimentali sono comunque superiori a quelli teorici. A parte possibili incertezze sul valore esatto di Φ , che in questo caso è stato assunto pari a 35° in accordo con quanto suggerito da LEGEAY [1978], la differenza tra i valori sperimentali e quelli calcolati può essere dovuta all'effetto della rigidità del paramento che nell'analisi condotta è stata completamente trascurata, operando così a favore della sicurezza.

Negli esperimenti al L.C.P.C. si è notato che la linea di rottura è una spirale logaritmica, in accordo quindi sia con il metodo di Juran e Schlosser che con quello proposto in questa sede.

Inoltre l'intercetta della linea di rottura con la superficie libera del terreno è leggermente superiore al 30% dell'altezza del muro. Nel metodo proposto in questo articolo per $\Phi = 35^\circ$ il rapporto tra intercetta e altezza del muro è .3336. In effetti il valore di questo rapporto si mantiene molto vicino a .3 per tutto il campo di valori realistici dell'angolo d'attrito, come osservato sperimentalmente.

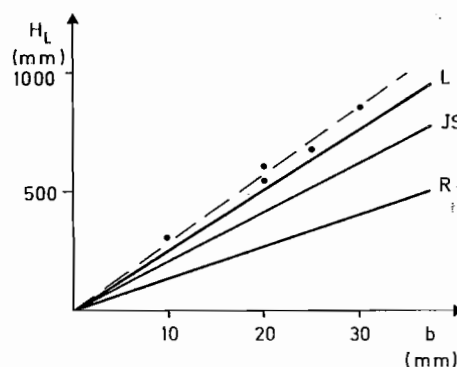


Fig. 8. - Confronto tra predizioni teoriche ($\Phi = 35^\circ$) e risultati sperimentali ottenuti da LEGEAY [1978] su muri modello.

5. Dimensionamento delle armature

Sulla base del metodo proposto è possibile un rapido dimensionamento delle armature. In genere l'altezza del muro e le caratteristiche meccaniche del terreno γ e Φ sono da considerarsi dei dati. A seconda del tipo di armatura che si decide di impiegare (discreta o continua) l'incognita può essere o il passo ΔH o la resistenza a trazione R_t . In ambedue i casi la (32) può essere riscritta come

$$F_R H = \frac{R_t}{\gamma K_m \Delta H} \quad (40)$$

per cui prefissato il coefficiente di sicurezza F_R è possibile decidere o la resistenza, e quindi le caratteristiche della sezione delle armature discrete, o il passo a cui mettere le armature.

Più delicata è la procedura di dimensionamento della lunghezza d'ancoraggio. Si consideri innanzitutto il caso di armatura continua. Sia T_i lo sforzo di trazione nell'armatura i -esima posta ad una profondità Z_i e si assuma che lo sforzo verticale a quella profondità sia dato da

$$\sigma_v = \gamma Z_i = \gamma_i \Delta H \quad (41)$$

Lo sforzo di taglio di aderenza sarà

$$\tau_i = \sigma_v \tan \Phi = \gamma Z_i \tan \Phi \quad (42)$$

e l'equilibrio alla traslazione orizzontale imporrà, fig. 9, che

$$T_i = 2 \gamma Z_i \tan \Phi L_{a_i} \quad (43)$$

dove L_{a_i} è la lunghezza d'ancoraggio dell'arma-

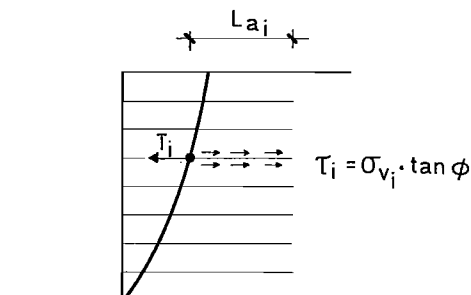


Fig. 9. - Schema concettuale per il calcolo della lunghezza di ancoraggio.

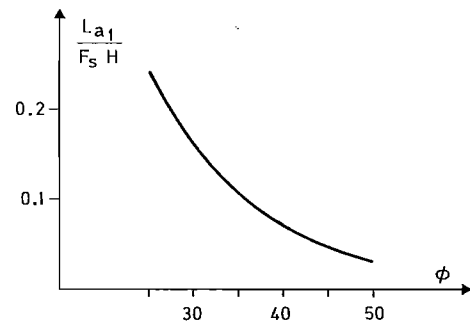


Fig. 10. - Lunghezza d'ancoraggio necessaria per il primo strato di armatura per muri ad armatura continua.

tura i -esima. In condizioni di esercizio il tasso medio di lavoro delle armature sarà pari a R_t/F_R . Quindi introducendo un opportuno coefficiente di sicurezza allo sfilamento si avrà

$$\begin{aligned} L_{a_i} &= \frac{F_s R_t / F_R}{2 \gamma Z_i \tan \Phi} = \\ &= F_s \frac{K_m}{2 i \tan \Phi} H = \beta_i F_s H \end{aligned} \quad (44)$$

Dalla (44) appare evidente come la lunghezza di ancoraggio necessaria diventi sempre minore con la profondità. La situazione più pericolosa per lo sfilamento si avrà per $i = 1$ non essendo chiaramente reagente lo strato posto ad $i = 0$. Si può notare dalla fig. 10 che il valore della lunghezza di ancoraggio è piccolo, anche per valori bassi dell'angolo d'attrito.

Le spirali logaritmiche che definiscono il meccanismo di collasso al variare di Φ' non divergono granché da una retta verticale posta ad una distanza di circa $0.3 H$ dal paramento, nella parte superiore del muro. Quindi la lunghezza delle armature può essere calcolata in prima approssimazione come

$$L \approx (0.3 + \beta_i F_s) H \quad (45)$$

Se le armature sono discrete anziché continue la lunghezza d'ancoraggio aumenta notevolmente, come è ovvio. La (44) infatti diviene

$$L_{a_i} = F_s \frac{K_m e}{2 i \tan \Phi b} H \quad (46)$$

Poiché il rapporto e/b è di solito compreso tra 10 e 20 è chiaro che, a meno di utilizzare

lunghezze d'ancoraggio dell'ordine dell'altezza del muro e anche più, le armature superiori si troveranno più vicine al collasso per sfilamento che a quello per raggiungimento della resistenza limite, su cui si è basata l'analisi precedente.

Si consideri ad esempio un muro in terra armata. Di solito la lunghezza delle armature è costante con la profondità a pari a $.7H$. Poiché la linea di rottura passa a $.3H$ dal paramento, la lunghezza di ancoraggio delle armature superiori è pari a $.4H$. Indipendentemente dalla resistenza delle armature, la massima trazione sopportabile sarà allora pari a

$$T_i^M = .8 \gamma Z_i \tan \Phi H_b \quad (47)$$

Quindi la trazione massima nelle armature varia linearmente con la profondità fino ad una quota Z_c per cui $T_i = r_i b$. Dalla (47) si ricava facilmente che

$$Z_c = \frac{r_i}{.8 \gamma \tan \Phi H} \quad (48)$$

Non stupisce allora che JURAN e SCHLOSSER [1979] abbiano misurato su muri in vera grandezza proprio un andamento delle trazioni che cresce linearmente dalla superficie libera del muro fino ad una certa quota e rimane quindi costante al di sotto di essa.

Il metodo proposto in questo articolo va quindi modificato nel caso di muri con armatura discreta non sufficientemente lunga da garantire ancoraggio pieno. Nell'equazione 20, le armature poste nella parte del muro daranno infatti un contributo al momento resistente pari alla trazione di sfilamento e non pari ad R_i . La determinazione dell'altezza limite diventa necessariamente più laboriosa anche se è concettualmente altrettanto semplice.

Va inoltre notato che le armature superiori danno un contributo modesto alla stabilità globale del muro, in primo luogo perché la loro resistenza allo sfilamento è bassa, ed in secondo luogo perché il braccio delle trazioni rispetto al polo della spirale è più piccolo di quello delle armature poste più in basso. Per un progetto ottimale dei muri in terra armata sembra quindi consigliabile diradare il passo delle armature nella parte alta del muro, affidando ad esse il compito di evitare rotture locali, di evitare cioè che si formino meccanismi di rottura che coinvolgono soltanto la parte superiore del muro.

6. Conclusioni

In questo articolo si sono presentati vari metodi per il calcolo dei muri in terra rinforzata. Tra di essi solo il metodo di Juran e Schlosser e quello basato su un'analisi limite proposto in questa sede, sono in grado di predire con sufficiente approssimazione l'altezza di collasso osservata sperimentalmente. Nel caso esaminato il metodo dell'equilibrio limite si avvicina di più ai risultati sperimentali ed identica conclusione si ha per i risultati del muro modello realizzato all'E.N.P.C.

Per muri con armatura continua, il metodo presentato consente un facile dimensionamento delle armature, le cui lunghezze di ancoraggio sono in genere assai limitate. Nel caso di muri ad armatura discreta, le armature poste nella parte superiore del muro giungono a collasso per sfilamento anziché per raggiungimento della resistenza limite. Infatti la lunghezza di ancoraggio necessaria per raggiungere lo snervamento dell'armatura è così grande da essere economicamente svantaggiosa. Volendo limitare la lunghezza delle armature entro limiti ragionevoli, si mostra che la trazione massima disponibile cresce linearmente con la profondità fino al raggiungimento della trazione di snervamento. Per calcolare l'altezza limite è allora necessario modificare il metodo proposto tenendo conto nell'equazione di equilibrio dei momenti a collasso della ridotta resistenza delle armature nella parte alta del muro.

Sempre nel caso di armature discrete, il contributo delle armature superiori risulta modesto sia per la ridotta resistenza disponibile sia perché il braccio di queste forze rispetto al polo è piccola. Sembra quindi consigliabile in questo caso diradare il passo delle armature nella zona superiore del muro affidando ad esse il compito di evitare possibili rotture locali.

Un vantaggio notevole del metodo presentato è che esso consente di calcolare con lo stesso schema concettuale anche muri di sostegno con sovraccarico o con superficie libera inclinata. Inoltre il metodo dell'equilibrio limite può essere utilizzato anche per calcolare la stabilità di un rilevato in terra rinforzata. In tutti questi casi è solo necessario modificare l'equazione di equilibrio limite tenendo conto della diversa geometria o dei sovraccarichi. Inoltre esso mantiene inalterata la filosofia tradizionale del calcolo di stabilità per i muri di sostegno e pendii.

7. Appendice

Una delle critiche che potrebbero essere mosse al metodo presentato è che il metodo dell'equilibrio limite non consente di stabilire rigorosamente se il valore di collasso ottenuto sia un maggiorante o un minorante del valore di collasso reale. Si potrebbe allora pensare di condurre l'analisi utilizzando il metodo cinematico dell'analisi limite. A questo scopo è necessario assumere che valga la legge di normalità. Si può dimostrare che in questo caso il valore di collasso ottenuto in questo modo coincide con quello trovato col metodo dell'equilibrio limite. Si noti inoltre che la famiglia di spirali logaritmiche assunta come famiglia di potenziali linee di rottura nel metodo presentato è l'unica cinematicamente ammissibile dal punto di vista dell'analisi limite.

È noto però che se la legge di normalità è applicata al criterio di Mohr-Coulomb, la dilatazione a collasso è largamente superiore a quella osservata nei terreni granulari. La legge di scorrimento deve quindi essere non associata. Si può dimostrare (RADENKOVIC [1961]) che se un insieme di carichi produce il collasso per un materiale con legge di scorrimento associata, esso lo provocherà anche se lo stesso materiale non obbedisce alla legge di normalità. Quindi il valore dell'altezza di collasso ottenuto con il metodo dell'equilibrio limite, che coincide con il valore ottenuto con il metodo cinematico per un materiale con legge di scorrimento associata, è, in virtù del teorema di Radenkovic, un maggiorante del valore reale di collasso.

Allo stesso risultato sono giunti MANGIAVACCHI e PELLEGRINI [1985] che hanno applicato la teoria del calcolo a rottura di SALENÇON [1983] ad un muro in terra armata 'omogeneizzato'. L'insieme terreno-armature è stato cioè trasformato in un continuo equivalente omogeneo, ma anisotropo, e su di essa è stata condotta l'analisi.

Il criterio di rottura proposto dagli autori per il materiale omogeneizzato si è dimostrato in ottimo accordo con i risultati sperimentali ottenuti in prove triassiali su campioni di terra armata con differenti inclinazioni delle armature.

RINGRAZIAMENTI

Parte della ricerca è stata finanziata con fondi del MPI e del CNR.

BIBLIOGRAFIA

- BEN ASSILA A., EL AMRI M. (1984) - *Comportement à la rupture des murs en terre armée et clouées*. Thèse fin d'études E.N.P.C., Paris.
- JURAN I. (1977) - *Dimensionnement interne des ouvrages en terre armée*. Thèse doc. ing. L.C.P.C., Paris.
- JURAN I., SCHLOSSER F. (1979) - *Etude théorique des efforts de tractions dans les armatures des ouvrages en terre armée*. C.R. Coll. Int. Renforcements des Sols, Paris, 1979.
- KÖTTER F. (1988) - *Über das problem der Erddruckbestimmung*. Verh. Phys. Ges., Berlin 7, 1-8.
- LEGEAY G. (1978) - *Etude sur modèles réduits des murs en terre armée*. Thèse Univ. P. et M. Curie, Paris.
- LEE K. L. (1976) - *Reinforced-earth: an old idea in a new setting*. New Horizons in Constr. Mat., Pennsylvania, Euro Publ. 1, 655-682.
- MANGIAVACCHI R., PELLEGRINI G. (1985) - *Analisi teorica del comportamento della terra armata mediante una procedura di omogeneizzazione*. Tesi di laurea, Politecnico di Milano.
- RADENKOVIC D. (1961) - *Théorèmes limites pour un matériel de Coulomb à dilatation non standardisée*. C.R.: Ac. Sc., Paris, 252, 4103-4104.
- SALENÇON J. (1974) - *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*. Eyrolles, Paris.
- SALENÇON J. (1983) - *Calcul à la rupture et analyse limite*. E.N.P.C., Paris.
- SCHLOSSER F. (1972) - *La terre armée - recherches et réalisations*. Bull. des Liais. L.C.P.C., n. 62, 79-92.
- SCHLOSSER F., VIDAL H. (1969) - *La terre armée*. Bull. des Liais. L.C.P.C., n. 41, 101-144.

SUMMARY

Stability analysis of strengthened earth walls

The classical methods nowadays available to design earth walls reinforced by metal strips or geotextiles are not able to correctly determine neither the collapse height of a wall nor the distribution of tensile forces in the reinforcements, as observed in experiments on model walls.

After a review of the existing methods, the paper presents a new procedure which is based on the simple limit equilibrium approach. It is shown that if the reinforcements are assumed to be ductile and the failure line is taken as an arc of a logspiral, the resulting value of the collapse height of a wall is close to the experimental results obtained by Legeay (1978) and by Ben Assila and El Amri (1984) on reduced scale walls.

Although it is not possible to give a simple closed form solution for the determination of the collapse height, the numerical results of a parametric analysis for various friction angles are plotted in fig. 7 so that its determination is straightforward (line L). Line La shows the calculated results with a trivial approximation of the exact solution.

A design procedure may then be established which allows to determine either the width of the reinforcing strips or the number of geogrids, and the necessary anchoring length.

It is shown that for reinforced earth, the failure of the upper anchoring strips is generally due to lack of adherence and not to yielding of reinforcements. This implies that the tensile forces in the reinforcements vary linearly with depth until a critical value, where failure of reinforcement occurs because of yielding. This result agrees with the measured variation of tensile forces in full scale walls.