

# Sulla determinazione della superficie critica nell'analisi della stabilità dei rilevati

V. FIOROTTO

**SOMMARIO:** Si espone un procedimento che permette di individuare i parametri della superficie di slittamento cui compete il minimo valore del coefficiente di sicurezza per un rilevato di assegnate caratteristiche. Il metodo consiste nella minimizzazione della funzione che esprime il coefficiente di sicurezza in funzione dei parametri, noti, del terreno e di quelli, incogniti, caratterizzanti la curva, traccia nel piano della superficie. La funzione può essere una qualsiasi tra le numerose proposte nella letteratura tecnica per la verifica della stabilità dei pendii.

## 1. Introduzione

I metodi più frequentemente utilizzati per valutare la stabilità di un pendio sono quelli denominati « dell'equilibrio limite »; consistenti, cioè, nel valutare lo stato di stabilità lungo una prefissata superficie di forma qualsiasi, mediante il confronto con la condizione limite di equilibrio, individuata da un fattore di sicurezza unitario.

Da un punto di vista pratico ed operativo, si tratta di determinare la superficie a cui compete il minimo fattore di sicurezza.

Per pendii regolari costituiti da materiali con caratteristiche geotecniche omogenee, si può ricorrere a metodi di analisi globale di immediata soluzione o ad abachi o a grafici disponibili nella letteratura specializzata [CESTELLI GUIDI, 1984; TERZAGHI e PECK, 1974].

Generalmente, però, i pendii naturali hanno forma irregolare e caratteristiche geotecniche non uniformi, con l'aggiunta spesso di carichi, di moti di filtrazione ecc. In questi casi, oppure nel caso di dighe in materiali sciolti di qualche rilievo, pur con forme regolari, o nel caso di dighe — quelle cosiddette zonate — presentanti, cioè caratteristiche strutturali e meccaniche non omogenee, è necessario ricorrere a metodi che consentono di suddividere il pendio o rilevato in tratti o conci: metodi che sono, attualmente, i più utilizzati per la loro adattabilità ai vari casi che possono presentarsi.

Scelta una presunta superficie di rottura all'interno del pendio, si divide la parte di terreno così isolata in un numero finito di conci verticali; dallo studio dell'equilibrio di ogni singolo concio si perviene alla valutazione delle

condizioni di equilibrio dell'intera massa preventivamente isolata e, di conseguenza, alla determinazione del fattore di sicurezza rispetto alla condizione limite di equilibrio.

Calcolando quest'ultimo per un insieme di superficie preventivamente ipotizzate ed iterativamente affinate, si determina la superficie a cui compete il minimo fattore di sicurezza; e quindi si possono valutare le condizioni di stabilità globale del pendio.

Tale procedimento comporta tempi di calcolo abbastanza lunghi e qualche laboriosità, specialmente nel caso in cui le potenziali superficie di scorrimento non possono essere approssimate con forme semplici quali il cerchio, la spirale logaritmica [HUANG e AVERY, 1976] ecc.: così da rendere necessario, per ogni iterazione, la generazione ed il calcolo di una superficie geometricamente meno semplice ed in qualche caso complessa.

Di notevole interesse, in proposito, è la nota di SIEGEL *et al.* [1981], nella quale viene esposto un procedimento di generazione casuale di una superficie di slittamento composta da un insieme congruente di spezzate.

Benché il metodo consenta l'analisi di un grande numero di curve potenzialmente critiche per mezzo della generazione automatica, non è assicurato, sul piano teorico, il rinvenimento di quella cui compete il minimo fattore di sicurezza.

La lunghezza dei procedimenti di calcolo per prova ed errore, e la necessità di determinare superficie di slittamento la cui forma non è conosciuta a priori (l'assunzione di una superficie di forma predeterminata conduce infatti alla determinazione di un fattore di sicurezza maggiore od uguale di quello reale), ha condotto alla concezione di metodi teorici fondati

Dott. Ing. Virgilio FIOROTTO, Candidato al Dottorato in Idrodinamica, Università di Padova e Genova.

sulle preposizioni del calcolo delle variazioni.

Tali metodi determinano la superficie critica senza vincoli sulla sua forma [CASTILLO e LUCANO, 1982; COTECCHIA *et al.*, 1979; REVILLA e CASTILLO, 1977]. Essi sono stati sviluppati teoricamente anche per pendii comunque complessi per forma, caratteristiche geotecniche, distribuzione delle pressioni interstiziali [BAKER e GARBER, 1978].

BAKER [1980], ha proposto un metodo per determinare la curva di slittamento critica, di forma generica, analizzata per concii. Il metodo si fonda sulla determinazione della curva che rende minimo un opportuno funzionale che individua le condizioni d'equilibrio del sistema. La soluzione è cercata con l'utilizzo di un procedimento di programmazione dinamica.

La curva così calcolata deve essere uguale a quella che rende minimo il fattore di sicurezza allo slittamento ottenibile direttamente dall'applicazione del metodo per concii scelto.

Nella presente nota è esposto un procedimento per l'individuazione dei parametri caratteristici della superficie cui compete il minimo fattore di sicurezza, sia quando essa possa essere descritta mediante un'unica funzione, ad esempio il cerchio, sia quando essa possa essere caratterizzata da un insieme di funzioni tra loro diverse ma da utilizzare, ovviamente, per tratti, col vincolo della continuità nei punti comuni a due di esse: quale può essere, ad esempio, una poligonale. Tali curve possono anche essere vincolate a passare per punti e/o per zone prefissate ecc., a seconda della natura dello specifico problema.

Il metodo consiste nella minimizzazione diretta della funzione che esprime il coefficiente di sicurezza a mezzo dei parametri, noti, del terreno e di quelli incogniti, caratterizzanti la curva traccia, nel piano, della superficie mediante l'utilizzo del metodo del semplice.

Ancorché analogo al problema trattato da BAKER [1980], i vantaggi del procedimento proposto consistono in:

— la possibilità di utilizzare curve geometricamente definite a priori. In questi casi l'algoritmo è particolarmente efficiente;

— la possibilità di utilizzare curve generiche, ossia composte da un insieme congruente di segmenti di retta, ognuno di base per il generico concio. L'efficienza dell'algoritmo proposto per spezzate composte da 10-20 segmenti, è soddisfacente. Da un sommario confronto con le prestazioni di calcolo riportate da BA-

KER [1980], è verosimile ritenere che i due metodi abbiano prestazioni comparabili;

— la possibilità di implementare direttamente ed agevolmente un programma di analisi di stabilità per assegnate superficie con l'algoritmo del semplice, senza alcuna sostanziale modifica del programma stesso.

Inoltre l'algoritmo del semplice, di facile programmazione, è generalmente disponibile presso i centri di calcolo come programma di libreria.

Nella nota sono sviluppati, inoltre, alcuni esempi di particolare interesse applicativo; in uno sono confrontati i risultati ottenuti da precedenti autori [FREDLUND e KRAHN, 1977; BAKER, 1980].

## 2. Metodo di analisi

Considerata una superficie di scorrimento di spessore unitario, si divida la parte di terreno così isolata in un certo numero di strisce verticali denominate concii.

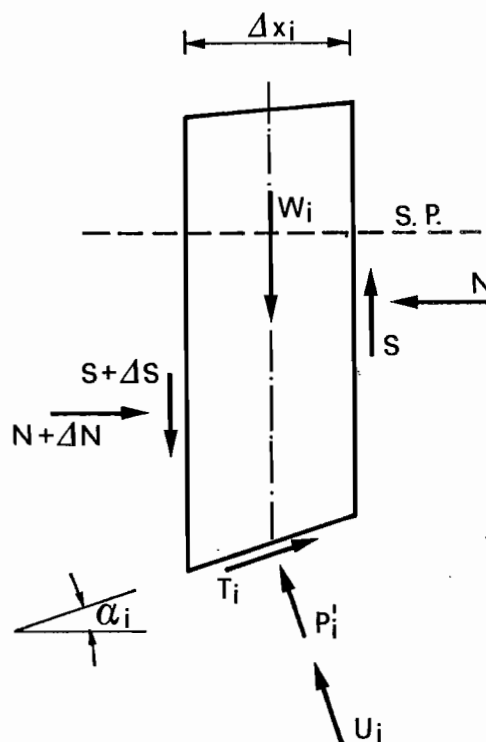


Fig. 1. - Forze agenti su un generico concio.

Considerato poi un generico concio, — l'*i*-esimo, per fissare le idee — se ne scriva l'equazione dell'equilibrio in direzione verticale, trascurando le azioni mutue tra i concii (ammet-

tendo, quindi, che l'insieme delle forze normali e taglianti applicate alle due facce laterali costituiscono un insieme equilibrato di forze); dalla figura 1, indicati con  $W_i$  il peso del cono comprensivo dell'eventuale carico presente sul rilevato,  $P'_i$  la risultante delle pressioni effettive agenti sul tratto di superficie;  $U_i$  la risultante della pressione dovuta all'azione dell'acqua e  $T_i$  lo sforzo tangenziale mobilitato, si ha:

$$W_i = (P'_i + U_i) \cos \alpha_i + T_i \sin \alpha_i. \quad (1)$$

Indicati con  $F$  il fattore di sicurezza e con  $c_i$  e  $\varphi_i$  rispettivamente la coesione e l'angolo d'attrito del materiale costituente il pendio in corrispondenza della superficie di slittamento, con  $u_i$  la pressione interstiziale dell'acqua, assunti:

$$T_i = \left[ \frac{c_i \Delta x_i}{\cos \alpha_i} + p'_i \operatorname{tg} \varphi_i \right] / F; \quad (2)$$

e

$$U_i = u_i \Delta x_i / \cos \alpha_i;$$

dalla (1), esplicitato  $p'_i$ , si ottiene:

$$P'_i = \frac{W_i - u_i \Delta x_i - (c_i \Delta x_i \operatorname{tg} \alpha_i / F)}{\cos \alpha_i [1 + (\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \varphi_i) / F]}; \quad (3)$$

Estesa questa relazione a tutti gli  $M$  conici, ed esplicitato  $F$ , si ha (in modo implicito):

$$F = \frac{\sum_M \frac{c_i \Delta x_i + (W_i - u_i \Delta x_i) \operatorname{tg} \varphi_i}{\cos \alpha_i (1 + \operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \varphi_i / F)}}{\sum_M W_i \sin \alpha_i}; \quad (4)$$

essendo  $F$  il coefficiente di sicurezza globale allo slittamento del pendio lungo la superficie di scorrimento considerata.

Riferendosi, per semplicità, a superficie di scorrimento cilindriche, si dovranno determinare, rispetto ad un qualsivoglia sistema di assi cartesiani, le coordinate del centro  $X$ ,  $Y$  ed il raggio  $R$  del cerchio che rende minimo il valore di  $F$  fornito dalla (4). Si tratta di calcolare il minimo assoluto della generica funzione non lineare di più variabili:

$$F(X, Y, R) = f [M(X, Y, R), W_i(X, Y, R), U_i(X, Y, R), \alpha_i(X, Y, R), \varphi_i(X, Y, R), c_i(X, Y, R), \Delta x_i(X, Y, R)]. \quad (5)$$

La soluzione normalmente viene ricercata per tentativi calcolando  $F$  per vari cerchi al fine di individuare quello più svantaggioso.

L'impiego di metodi di ricerca non diretta è penalizzato dalla necessità di stimare numericamente il gradiente della (5); calcolo che richiede una mole notevole di operazioni e che risulta particolarmente delicato sia a causa degli inevitabili errori dovuti all'arrotondamento numerico, sia a causa dell'incremento finito utilizzato per la sua stima: se questo è troppo piccolo, il segno e l'ampiezza del gradiente vengono quasi esclusivamente determinati dalle procedure di arrotondamento; se l'incremento è troppo grande può essere causa di inversione del segno di alcune componenti.

Nell'analisi del problema si deve aggiungere un'ulteriore causa che condiziona la corretta valutazione del gradiente; essa è da attribuirsi al fatto che la funzione presenta un'approssimazione diversa a seconda del punto in cui viene calcolata.

Tale approssimazione, se pur irrilevante rispetto al valore assunto dalla funzione, può comportare, invece, un errore nella stima del gradiente tale da rendere problematica la convergenza: a cagione sia del carattere non lineare della (4) (quindi con soluzione approssimata ottenuta numericamente), sia del procedimento di discretizzazione utilizzato. Un'ulteriore causa che può condizionare la corretta stima del gradiente è rappresentata dalle discontinuità delle caratteristiche del terreno, che determinano una discontinuità del gradiente stesso della (5).

È parso, in queste condizioni, che la ricerca di un procedimento diretto che evitasse gli inconvenienti propri dei metodi indiretti, potesse essere considerato con interesse. Questo è parso possibile indagando intorno agli algoritmi che, utilizzando solo i valori assunti dalla funzione in punti determinati, danno modo di pervenire al valore minimo della funzione stessa.

Tra questi, l'algoritmo del semplice è stato ritenuto il più convincente [NELDER e MEAD, 1965].

Indicato con  $n$  il numero delle variabili, tale algoritmo dà modo di determinare, con successive iterazioni, il punto in cui la funzione assume valore minimo, mediante le informazioni ottenute dal calcolo della stessa in  $n + 1$  punti, di cui almeno uno di volta in volta diverso, vertici di un semplice (per  $n = 2$  i tre punti sono i vertici di un triangolo, per  $n = 3$  i quattro punti sono i vertici di un tetraedro ecc.).

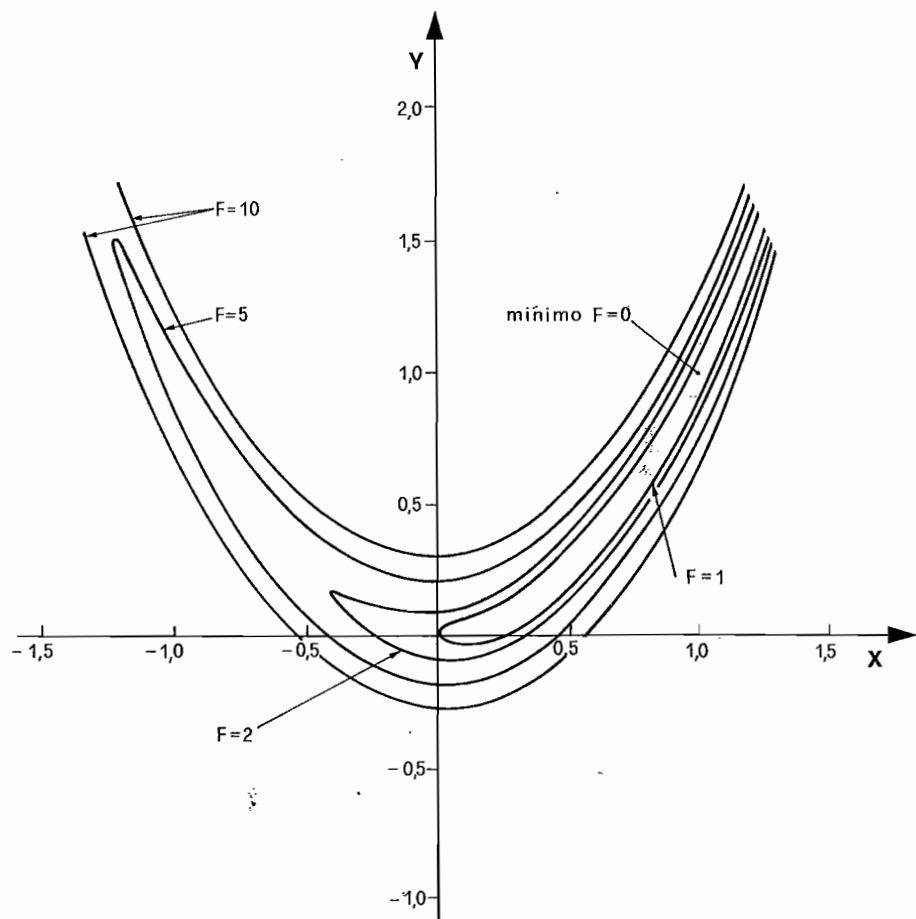


Fig. 2. - Curve isovalore della funzione di Rosenbrock.

Il metodo inizia scegliendo un semplice arbitrario. Ciò può essere fatto, ad esempio, scegliendo quali vertici del semplice, un punto di presunto minimo ed  $n$  altri punti determinati mediante ricerche di minimo unidimensionale lungo  $n$  rette parallele agli assi coordinati e passanti per il punto di minimo presunto in un campo di variabilità limitato e definito a priori nel suo intorno.

Gli  $n$  punti di minimo unidimensionale così determinati ed il punto di presunto minimo fornito inizialmente possono definire il semplice iniziale (per  $n = 2$  i tre punti sono i vertici di un triangolo).

Partendo da questo, le successive iterazioni sono volte a scartare i punti a cui corrisponde un valore superiore della funzione, sostituendoli con punti più vantaggiosi.

A questo scopo, ad ogni iterazione, rinvenuto il punto peggiore  $P_h$  (vertice del semplice in cui la funzione assume valore maggiore rispetto agli altri  $n$  vertici), che deve essere scartato, viene determinato il centroide dei rimanenti  $n$  punti  $P_c$ ; la funzione è quindi valutata in

un nuovo punto  $P'$  simmetrico di  $P_h$  rispetto a  $P_c$ .

L'opportunità di sostituire il punto  $P_h$  con  $P'$ , o di valutare un nuovo punto più favorevole lungo la linea  $(P_h, P_c)$  estendendo o contraendo il semplice, o di effettuare una contrazione del semplice in ogni direzione verso il punto migliore è valutato di volta in volta dall'algoritmo confrontando il valore assunto dalla funzione nel nuovo punto con quelli precedentemente calcolati.

Generalmente il procedimento viene arrestato quando la differenza tra il valore assunto dalla funzione calcolata nel punto peggiore e quello calcolato nel punto migliore del semplice è minore di una quantità  $\epsilon$ , positiva, prefissata a priori (criterio di convergenza).

Il parametro  $\epsilon$  condiziona l'ordine di grandezza dell'errore commesso nella stima del minimo della funzione.

Nella figura 3 è riportato, a chiarimento di quanto esposto, un'applicazione del metodo del semplice alla funzione di Rosenbrock:

$$F_r(x, y) = 100(x^2 - y)^2 + (x - 1)^2.$$

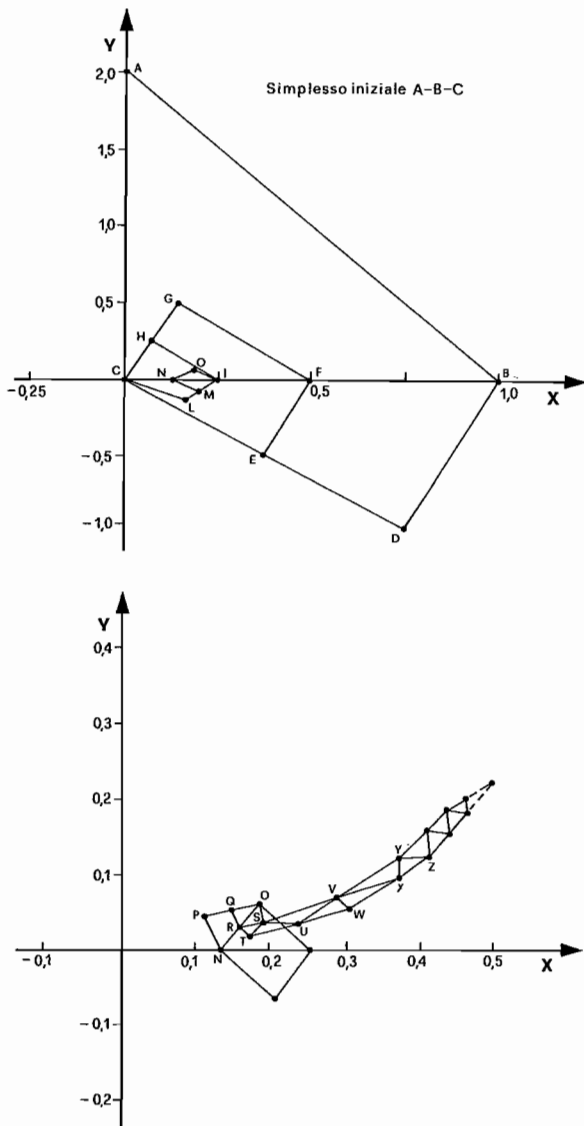


Fig. 3. - Simpleso iniziale e sua evoluzione verso il punto di minimo.

Questa funzione, rappresentata in figura 2, è frequentemente utilizzata per verificare le prestazioni di un algoritmo di minimizzazione.

Il simpleso iniziale, figura 3, è (0,0), (1,0), (0,2): si nota come il simpleso si contrae fino alle dimensioni opportune per essere in grado, poi, di seguire la « valle » della funzione verso il punto di minimo (1,1) ove la funzione assume valore nullo.

L'algoritmo, pur fornendo in modo molto efficiente e con buona approssimazione il punto di minimo locale a partire da un punto di minimo presunto fornito a priori, non converge « esattamente » ad esso; è quindi consigliabile adottare un criterio di convergenza che non richieda un'approssimazione molto accurata della soluzione; nei vari casi esaminati si sono attribuiti ed  $\epsilon$  valori compresi tra 0.01 e 0.0001.

Nel problema in esame ciò è di fatto irrilevante, giacché tale approssimazione è molto più accurata di quella da cui sono affetti i parametri geotecnici caratterizzanti il pendio in esame; o di quella relativa al grado d'inaccuratezza dei vari procedimenti, noti nella letteratura, usati per la determinazione del fattore di sicurezza .

Tali procedimenti differiscono uno dall'altro a seconda delle assunzioni fatte per rendere il problema staticamente determinato ed a seconda delle equazioni esprimenti l'equilibrio delle forze e/o del momento utilizzate per esprimere il fattore di sicurezza e quindi esplicitamente verificate; l'equazione (4), ad esempio, è stata ricavata utilizzando il metodo di Bishop semplificato, metodo formulato per superficie circolari che soddisfa solo la condizione di equilibrio relativa ai momenti ma non quella relativa alle forze.

L'errore che si commette per superficie di slittamento circolari rispetto al metodo di Bishop rigoroso, che richiede computazioni numeriche di ben maggior impegno, si aggira sul 10-15% [TERZAGHI e PECK, 1974].

Per curve di slittamento composite, al contrario, l'imprecisione può essere notevole, e conviene, quindi, riferirsi ad altri metodi noti, per citarne qualcuno: Janbu, Spencer, Morgenstern e Price, ecc., i quali forniscono un'espressione diversa e più complessa della (4).

Il procedimento indicato per determinare la curva critica è comunque valido: variando solamente, a seconda del numero e del tipo di funzioni utilizzate, il numero dei parametri necessari per descriverla e quindi il numero delle variabili della (5); ad esempio, utilizzando un insieme di segmenti congiungenti N punti di ascissa nota, come variabili da determinarsi nella (5), compaiono le ordinate degli N punti.

Un ulteriore motivo di incertezza nella valutazione del coefficiente di sicurezza riguarda la stima delle pressioni interstiziali dovute alla presenza dell'acqua [ARREDI, 1981]. Dette pressioni generano, infatti, delle forze di volume, distribuite nell'interno del terreno, costituite dalla spinta di immersione agente sugli elementi solidi, diretta verso l'alto e dalla pressione di trascinamento agente sugli stessi, di valore pari al peso specifico dell'acqua per la cadente piezometrica locale e con direzione concorde con quella delle linee di flusso.

Il calcolo esatto di tali forze presupporrebbe la conoscenza pressoché puntuale delle pres-

sioni nel campo di moto, conoscenza che è spesso approssimativa (\*).

Non va trascurato neppure il fatto che i fenomeni franosi sono tridimensionali [HOVLAND, 1977]. Di conseguenza è necessario analizzare con opportuna cautela e sensibilità i coefficienti di sicurezza ottenuti dall'analisi bidimensionale in varie sezioni, al fine di determinare un coefficiente di sicurezza globale.

Quanto s'è detto dimostra quanto sia superfluo richiedere soluzioni eccessivamente accurate, le quali sono ottenibili con tempi di calcolo più lunghi e con costi maggiori, ma sostanzialmente di nessuna utilità pratica.

Determinato il minimo valore di  $F$  e i parametri caratterizzanti la superficie di slittamento, è necessario verificare che si tratti realmente del minimo assoluto della (5) e non di un eventuale minimo relativo.

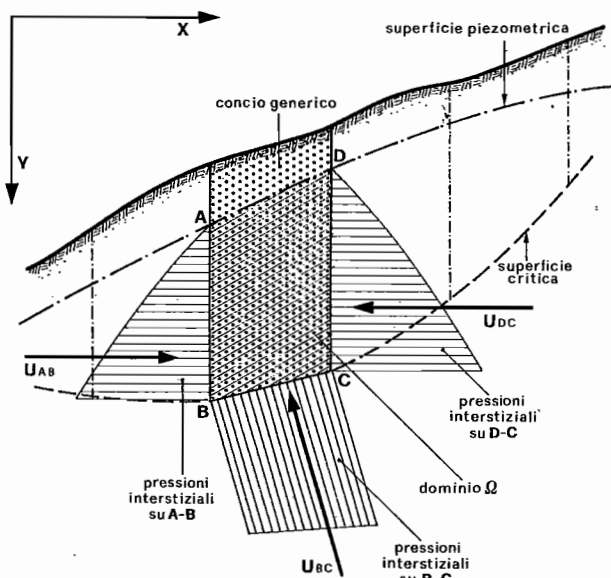


Fig. 4. - Trasformazione delle forze di volume in forze di superficie.

Va ricordato, infatti, che, i metodi di discesa non lineari, diretti e indiretti, determinano solamente dei minimi locali nell'intorno di un punto di presunto minimo fornito a priori; di conseguenza non è assicurato il rinvenimento del minimo assoluto cercato.

Tale accertamento può essere eseguito verificando che le soluzioni ottenute (composte dal valore del coefficiente di sicurezza e dai parametri caratterizzanti la superficie di slittamento ad esso associata), partendo da diversi punti iniziali, ossia da diverse superficie di slittamento di primo tentativo, praticamente coincidano; se non coincidono si riterrà quella a

cui compete il minimo valore del coefficiente di sicurezza.

(\*) Nei metodi di analisi per conchi le azioni dovute alle pressioni interstiziali vengono usualmente considerate come forze di superficie agenti sulle facce dei conchi, anziché come forze di volume, quali in realtà esse sono. Questo è possibile per l'equivalenza che sussiste tra le azioni delle pressioni agenti sulle facce del conchio, supposto impermeabile, e l'azione delle pressioni interstiziali attive entro la massa del medesimo, supposto permeabile, qualora se ne studi globalmente l'equilibrio.

Indicata con  $u$  la pressione interstiziale conseguente al moto di filtrazione, funzione continua di  $x$  e  $y$  nella porzione di conchio  $\Omega$  soggetta a tale moto, le forze di volume hanno componenti lungo  $x$  e  $y$  rispettivamente:

$$V_x = - \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad V_y = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Per il teorema di Green, indicato con  $\Gamma$  il contorno del campo di moto  $A, B, C, D$  e con  $\alpha$  e  $\beta$  i coseni direttori che la normale al contorno, volta verso l'interno di  $\Omega$ , forma con gli assi  $x$  ed  $y$ , si ha:

$$\int_{\Omega} V_x d\Omega = \int_{\Gamma} u \alpha d\Gamma \quad , \quad \int_{\Omega} V_y d\Omega = \int_{\Gamma} u \beta d\Gamma$$

Considerato che  $u$  è nulla lungo  $AD$ , che la normale ad  $AB$  ha coseno direttore 1 rispetto ad  $x$  ed 0 rispetto ad  $y$ , mentre la normale  $DC$  ha coseno direttore  $-1$  rispetto ad  $x$  e 0 rispetto ad  $y$ ; chiamati con  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  i coseni direttori che la normale ad  $BC$  forma rispettivamente con gli assi  $x$  ed  $y$ , ambedue risultano negativi, si ottengono le seguenti forze:

$$U_{ABx} = \int_A^B u dy \quad , \quad U_{ABy} = 0; \quad U_{DCx} = - \int_D^C u dy \quad , \quad U_{DCy} = 0$$

$$U_{BCy} = - \int_B^C u dx \quad ; \quad U_{BCx} = - \int_C^B u dy.$$

riportate nella figura 4.

La trasformazione qui indicata, è usualmente utilizzata essendo più comodo computare dette forze integrando le pressioni lungo le facce dei conchi che non le loro derivate nel volume: comunque risulta necessario conoscere pressoché puntualmente l'andamento delle pressioni interstiziali per poter computare al variare della superficie di scorrimento e/o della posizione delle facce laterali le forze derivanti dalla pressione interstiziale.

Queste pressioni, a seconda dei casi, possono determinarsi mediante misure piezometriche in situ e/o mediante integrazione delle equazioni che reggono il moto nei mezzi porosi dalla stima delle caratteristiche idrauliche del terreno e delle condizioni al contorno del campo di moto, quindi con un grado di approssimazione variabile a seconda del numero delle misure eseguite, dell'accuratezza posta nella stima delle proprietà idrauliche del terreno, delle ipotesi (ad esempio omogeneità e/o isotropia idraulica ecc.) assunte e delle semplificazioni introdotte nell'integrazione delle equazioni; approssimazioni che possono essere di qualche rilievo nel caso di terreni con proprietà idrauliche eterogenee, in condizioni di moto non stazionarie o in materiali con bassa permeabilità.

Questo, nel caso si utilizzi l'algoritmo del semplice, si specializza nell'assumere diversi semplici di primo tentativo, generalmente formati automaticamente dai programmi stessi, in funzione del punto di presunto minimo e della stima della distanza di quest'ultimo dal punto di minimo locale.

Il metodo esposto può essere utilizzato anche in problemi richiedenti la verifica di superficie di scorrimento vincolate ad attraversare definite zone del rilevato; in tal caso basterà imporre che  $F$  assuma un valore sufficientemente elevato se un punto della superficie elude il vincolo imposto.

Risulta immediato, invece, imporre il passaggio della superficie per qualche punto: basta fissare, infatti, in modo opportuno i valori di una o più variabili della (5).

### 3. Applicazioni

Si riportano di seguito due esempi esplicativi dell'utilizzo del metodo relativamente a due problemi concernenti superficie di slittamento composite; la determinazione dei coefficienti di sicurezza è stata fatta utilizzando il metodo di Bishop semplificato, esposto, per la sua semplicità, a titolo esemplificativo; per superficie composite conviene riferirsi, come già ricordato, ad altri metodi di analisi appositamente formulati i quali forniscono un'espressione diversa della (4). Sostanzialmente però il procedimento da seguirsi non cambia, rimanendo la (5) fondamentalmente invariata.

Il primo esempio è stato tratto da FREDLUND e KRAHN [1977], allo scopo di verificare l'efficienza e l'accuratezza del metodo proposto. Nella memoria gli autori comparano i coefficienti di sicurezza ottenuti dall'analisi di stabilità utilizzando i metodi di Fellenius, Janbu, Janbu semplificato, Spencer, Morgenstern-Price e Bishop semplificato, per sei diverse combinazioni di geometria, proprietà del terreno e condizioni idriche; riportano inoltre anche un'analisi comparativa dei tempi di elaborazione associati ai diversi metodi.

Nel secondo esempio si espone l'utilizzo del metodo, qui descritto, per superficie di slittamento di forma più generica, composte da un insieme di segmenti.

Si voglia verificare la stabilità del pendio riportato nella figura 5; si tratta di un rilevato omogeneo poggiante su uno strato sottile di scadenti caratteristiche geotecniche adagiato su un ammasso roccioso con giacitura oriz-

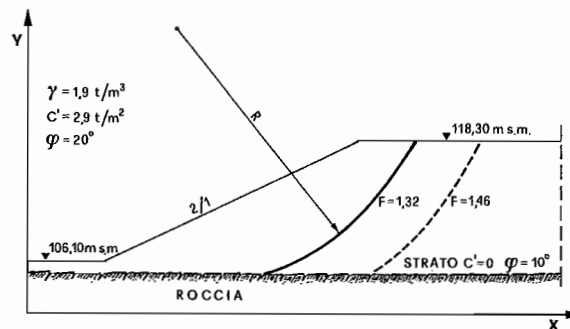


Fig. 5. - Analisi di stabilità di una scarpata.

zontale; le caratteristiche geotecniche dei materiali costituenti il rilevato sono indicati in figura.

È stata assunta una superficie di slittamento composta da un arco di cerchio e da un segmento di retta in corrispondenza dello strato sottile. Appare evidente che detta superficie, così composta, può essere descritta in funzione delle coordinate del centro del cerchio,  $X$ ,  $Y$  e del suo raggio  $R$ .

Prefissata una superficie di scorrimento all'interno del pendio, univocamente determinata dai valori assunti dalle variabili  $X$ ,  $Y$ ,  $R$ , si divide la parte di terreno così isolata in un numero finito di conci verticali. Per ognuno di questi è possibile calcolarne il peso, lo sforzo tangenziale mobilitato, la risultante delle pressioni interstiziali e delle pressioni effettive agenti sul tratto di superficie di scorrimento di sua competenza, l'inclinazione di questa, ecc.; in definitiva di calcolare tutti i parametri che compaiono nella (4) e quindi ricavare  $F$ .

L'algoritmo del semplice consente di determinare il minimo di  $F$  mediante l'applicazione ripetitiva del procedimento sopra descritto per opportuni diversi valori delle variabili  $X$ ,  $Y$ ,  $R$ , ossia per diverse superficie di scorrimento opportunamente assunte, secondo la procedura sommariamente descritta nelle pagine precedenti.

Detto algoritmo prevede che gli sia dato un punto di partenza, ossia che venga assegnato alle variabili un valore iniziale ed anche una stima approssimata del divario tra il valore così assegnato ad ogni variabile ed il valore che la medesima assume nel punto di minimo; informazioni generalmente necessarie alla definizione del semplice iniziale.

Questo, nel caso in esame, si specializza nell'assumere, a sentimento, una superficie di primo tentativo univocamente determinata dai valori iniziali delle variabili  $X$ ,  $Y$ ,  $R$ , e nell'asse-

gnare a ciascuna di queste una stima dell'errore commesso.

Con riferimento alla figura 5 (il valore dell'ascissa X in corrispondenza del piede del pendio è stato assunta pari a 118,2 m), la curva di primo tentativo, riportata con linea tratteggiata, è caratterizzata dai seguenti valori delle variabili: R = 30 m, X = 126 m, Y = 130 m. Per R e per X è stato stimato un errore di 5 m, mentre per Y un errore di 7 m.

Il simpleso iniziale, in questo caso è un tetraedro; i quattro punti, suoi vertici, sono stati ottenuti nel seguente modo:

Il primo vertice è rappresentato dal punto iniziale, quindi:

$$R = 30 \text{ m}, X = 126 \text{ m}, Y = 130 \text{ m}.$$

Il secondo vertice, determinato mediante una grossolana ricerca di minimo unidimensionale lungo la retta parallela ad R passante per il punto iniziale, vale:

$$R = 25.93 \text{ m}, X = 126 \text{ m}, Y = 130 \text{ m}.$$

Partendo da quest'ultimo punto, ed eseguendo una grossolana ricerca di minimo unidimensionale lungo la retta parallela all'asse X si è determinato il terzo vertice del simpleso:

$$R = 25.93 \text{ m}, X = 127.7 \text{ m}, Y = 130 \text{ m}.$$

Da quest'ultimo punto mediante un'ulteriore ricerca di minimo unidimensionale lungo la retta parallela all'asse Y si è determinato il quarto ed ultimo vertice del simpleso, ossia:

$$R = 25.93 \text{ m}, X = 127.7 \text{ m}, Y = 124.14 \text{ m}.$$

Si è avuto l'accortezza di far assumere ad F un valore sufficientemente elevato nel caso in cui, ad una eventuale terna di valori di X, Y, R, corrisponda una superficie di potenziale slittamento non ammissibile, ossia esterna al rilevato in esame.

Definito il simpleso iniziale le successive iterazioni sono quindi volte a scartare i punti peggiori sostituendoli con punti più vantaggiosi.

Il procedimento è stata arrestato quando la differenza tra il valore di F calcolato nel punto peggiore del simpleso e quello calcolato nel punto migliore è risultata minore di 0.01.

Si riportano di seguito, a titolo esemplificativo, due generiche iterazioni.

Alla ventesima iterazione (comprensiva delle iterazioni eseguite per definire il simpleso ini-

ziale) i vertici del simpleso sono risultati formati dai seguenti punti:

R (m)	X (m)	Y (m)	F
28.409	124.664	129.363	1.360
27.296	126.341	129.276	1.348
25.926	126.000	130.000	1.375
28.256	126.292	129.769	1.376

L'ultimo punto, in cui F assume valore maggiore rispetto agli altri, è il punto peggiore, Ph, che deve essere sostituito da un nuovo punto P.

Per determinare il nuovo punto P è necessario dapprima calcolare il centroide dei primi tre punti Pc:

$$R = (28.409 + 27.296 + 25.926) / 3 = 27.21 \text{ m};$$

$$X = (124.664 + 126.341 + 126.000) / 3 = 125.668 \text{ m};$$

$$Y = (129.363 + 129.276 + 130.000) / 3 = 129.546 \text{ m};$$

e poi determinare il punto simmetrico di Ph rispetto a Pc, ossia:

$$R = 27.21 + (27.21 - 28.256) = 26.165 \text{ m};$$

$$X = 125.668 + (125.668 - 126.292) = 125.045 \text{ m};$$

$$Y = 129.546 + (129.546 - 129.769) = 129.321 \text{ m}.$$

Il coefficiente di sicurezza F per la superficie definita dei valori assunti dalle variabili nel nuovo punto, P, risulta, a conti fatti, pari a 1.329.

Essendo il valore di F calcolato in P minore di quello calcolato in Ph si sostituisce Ph con P generando così un nuovo simpleso migliore del precedente; questo risulterà, quindi, composto dai seguenti punti:

R (m)	X (m)	Y (m)	F
28.409	124.664	129.363	1.360
27.269	126.341	129.276	1.348
26.165	125.044	129.321	1.329
25.926	126.000	130.000	1.375

L'ultimo punto risulta essere il punto peggiore, Ph, che deve essere sostituito con un nuovo punto P.

Procedendo in modo simile a quanto visto nell'iterazione precedente si determina dapprima il centroide dei primi tre punti Pc; in questo caso si ottiene:

$$R = 27.281 \text{ m}; X = 125.350 \text{ m}; Y = 129.32 \text{ m},$$



e poi il punto simmetrico di Ph rispetto a Pc, che vale:

$$R=28.681 \text{ m}; X=124.701 \text{ m}; Y=128.66 \text{ m}.$$

Il coefficiente di sicurezza F, per la superficie definita dal valore delle variabili nel nuovo punto, vale 1.414, maggiore di 1.375 che compete al punto peggiore del semplice, Ph; di conseguenza Ph non può essere sostituito dal nuovo punto appena determinato.

Questo dipende dal fatto che è stato effettuato un passo troppo ampio, in tale caso è necessario effettuare una contrazione del semplice lungo la linea (Ph, Pc).

A questo scopo la funzione (4) è calcolata in un nuovo punto P equidistante sia da Ph che da Pc lungo la linea (Ph, Pc) ossia nel punto  $R = 26.6 \text{ m}$ ,  $X = 125.675 \text{ m}$ ,  $Y = 129.66 \text{ m}$ ; il coefficiente di sicurezza F della superficie definita dai valori assunti dalle variabili X, Y, R in questo nuovo punto vale 1.328.

Il nuovo punto P può quindi sostituire il punto Ph generando così un nuovo semplice migliore del precedente.

Procedendo nel modo suindicato, scartando di volta in volta i punti in cui la funzione assume valore maggiore, si perviene al semplice finale che rispetta la condizione di convergenza imposta.

Nel caso in esame si è ottenuto:

R (m)	X (m)	Y (m)	F
26.5	124.8	129.5	1.324
27.	125.2	129.4	1.320
26.4	125.1	129.4	1.327
26.6	125.7	129.7	1.328

Si nota che la differenza tra il valore assunto dalla funzione calcolata nel punto peggiore, e quello calcolato nel punto migliore è minore di 0.01; il criterio di convergenza è quindi soddisfatto.

Il fattore di sicurezza allo slittamento viene assunto pari a 1.32; la relativa curva è indicata con la linea continua in figura 5.

La curva a cui corrisponde il minimo coefficiente di sicurezza è stata ottenuta, nel caso in esame, con una quarantina di iterazioni circa; numero che generalmente dipende dalla bontà del punto di partenza (semplice iniziale), dall'accuratezza richiesta dalla soluzione ed ovviamente dal numero delle variabili.

Ottenuta una prima soluzione è necessario verificare che si tratti realmente del minimo

assoluto, e non di un eventuale minimo relativo della funzione  $F(X, Y, R)$ ; l'accertamento può farsi determinando soluzioni relative a diversi valori iniziali di X, Y, R ritenendo quella a cui compete il più piccolo valore di F.

Per completezza si riportano anche i coefficienti di sicurezza ottenuti da FREDLUND e KRAHN [1977] relativi all'analisi di stabilità del rilevato di figura 5:

- Metodo di Fellenius  $F=1.288$ ;
- Metodo di Bishop semplificato  $F=1.377$ ;
- Metodo di Spencer  $F=1.373$ ;
- Metodo di Janbu semplificato  $F=1.448$ ;
- Metodo di Janbu rigoroso  $F=1.432$ ;
- Metodo di Morgenstern-Price  $F=1.378$ ;

e quello ottenuto da BAKER [1980], per una superficie di slittamento di forma qualsiasi, ossia composta da un insieme di segmenti ognuno dei quali base del generico conico:

- Metodo di Spencer  $F = 1.29$ .

Per i particolari sull'applicazione dei diversi metodi e le relative conclusioni si rimanda alle memorie originali.

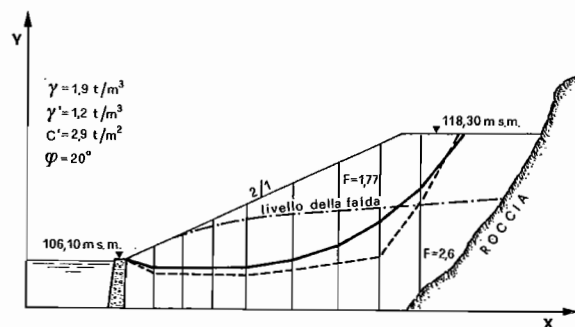


Fig. 6. - Analisi di stabilità di una scarpata.

Nell'esempio riportato in figura 6, si è schematizzato la curva di slittamento superficiale di un pendio naturale al di sopra di un manufatto artificiale mediante una spezzata congiungente N punti di ascissa nota, un punto a monte vincolato a spostarsi lungo la traccia di sommità del pendio ed un punto a valle fissato a priori.

Sono così individuabili  $N + 1$  conchi di caratteristiche variabili a seconda del valore assunto dalle N ordinate e dalla posizione del punto di sommità esprimibile mediante un'unica variabile. Similmente all'esempio precedente, prefissato il valore delle N ordinate e la posizione

del punto di sommità, è possibile calcolare il peso di ogni concio così definito, lo sforzo tangenziale mobilitato, la risultante delle pressioni interstiziali e delle pressioni effettive agenti sul tratto di superficie di scorrimento di sua competenza, l'inclinazione di questa, ecc.; in definitiva di calcolare tutti i parametri che compaiono nella (4) e quindi ricavare F.

Anche in questo caso l'algoritmo del semplice consente di determinare il valore minimo di F mediante l'applicazione ripetitiva del procedimento sopra descritto per opportuni valori delle variabili ossia delle N ordinate e della posizione del punto di sommità, quindi per diverse superficie di scorrimento, secondo la procedura precedentemente delineata.

In questo caso il semplice è composto da N + 2 vertici, ed il procedimento, uguale a quello esposto nel primo esempio, risulta solo numericamente più laborioso stante il maggior numero delle variabili.

Fornendo come punto di partenza il valore di N ordinate e dell'ascissa del punto di sommità caratterizzanti la curva di primo approccio, riportata tratteggiata in figura 6, si è ottenuta la curva soluzione riportata con la linea continua, cui compete il minimo valore del coefficiente di sicurezza F. Ovviamente si è verificato, in modo analogo al caso precedente, che trattasi del minimo assoluto.

#### 4. Conclusioni

Si è esposto un procedimento numerico che, utilizzando l'algoritmo del semplice, permette di analizzare e valutare « automaticamente » e in modo molto efficiente e accurato la stabilità di un pendio, utilizzando superficie di scorrimento di forma comunque complessa e soggette a vincoli di varia natura a seconda dello specifico problema.

La soluzione è ottenuta mediante un procedimento deterministico di ricerca del minimo di una funzione esprime il fattore di sicurezza in funzione dei parametri caratterizzanti la tipologia della superficie critica.

Il problema, già trattato da altri autori con un approccio variazionale, è stato affrontato con l'obiettivo di renderlo solvibile con facilità; ed allo scopo sono state impiegate le tecniche più usuali della ricerca operativa.

I risultati ottenuti per alcuni casi di rilevante interesse applicativo ed i confronti con la letteratura sembrano confermare la validità del metodo.

## RINGRAZIAMENTI

L'autore ringrazia il prof. Claudio Datei, per i consigli forniti nel corso della ricerca.

## APPENDICE A

### 1. Metodo del semplice

Si riportano alcune note integrative di quanto esposto precedentemente sull'algoritmo del semplice.

Indicato con n il numero delle variabili della generica funzione  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , si è visto che il metodo inizia scegliendo arbitrariamente un semplice iniziale costituito da n + 1 vettori,  $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ ; opportunamente scelti, vertici del semplice stesso (ogni vettore  $P_i$  è formato dai valori assunti dalle n coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in corrispondenza del punto, rappresentante l'iesimo vertice del semplice).

Si è visto inoltre che, partendo dal semplice iniziale arbitrario, le successive iterazioni sono volte a scartare i vettori in cui la funzione assume valore superiore, sostituendoli di volta in volta con vettori più vantaggiosi.

A questo scopo, la funzione viene calcolata negli n + 1 vertici ed i valori ottenuti vengono poi confrontati tra loro per determinare:

$$F(Ph) = \max_{i=1}^{i=n+1} F(P_i), \quad (6)$$

$$F(Pg) = \min_{i=1}^{i=n+1} F(P_i), \text{ con } i \neq h, \quad (7)$$

$$F(Pl) = \min_{i=1}^{i=n+1} F(P_i). \quad (8)$$

Risulta evidente che al vettore Ph corrisponde il valore maggiore della funzione, al vettore Pg corrisponde il valore subito inferiore, mentre al vettore Pl corrisponde il valore minore della funzione rispetto, ovviamente, al valore assunto dalla funzione negli n + 1 vertici del semplice.

Il vettore Ph, rappresentando il vertice peggiore del semplice, deve essere scartato e sostituito opportunamente con un nuovo vettore più vantaggioso. A questo scopo viene dapprima determinato il centroide dei rimanenti n migliori punti Pc, ossia:

$$P_c = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n+1} P_i - P_h \right); \quad (9)$$

e poi il punto Pr, simmetrico di Ph rispetto a Pc, ottenibile dal calcolo della seguente:

$$P_r = P_c + (P_c - P_h). \quad (10)$$

La funzione calcolata nel nuovo punto così ottenuto,  $F(P_r)$ , può assumere valore maggiore od uguale ad  $F(P_h)$ , nel qual caso il nuovo punto non è idoneo a sostituire Ph, o valore minore.

Il primo caso si verifica quando è stato effettuato un passo troppo ampio, è quindi necessario effettuare un'opportuna contrazione del semplice, cioè determinare il vettore:

$$P_d = P_h(1-\lambda) + \lambda P_r \text{ con } 0 < \lambda < 1, \text{ ma } \lambda \neq 0.5; \quad (11)$$

a cui è associato un valore della funzione  $F(Pd)$  minore di  $F(Ph)$  (fatto verificatosi nella seconda iterazione esposta a titolo esemplificativo nel primo esempio).

Se  $F(Pr)$  è minore di  $F(Ph)$ , il punto  $Pr$  è idoneo a sostituire il punto  $Ph$ . In questo caso è possibile tentare un passo più ampio, cioè determinare il vettore:

$$Pe = Ph(1 - \lambda) + \lambda Pr \text{ con } \lambda > 1. \quad (12)$$

Secondo NELDER-MEAD [1965] l'adozione di un passo più ampio è giustificato qualora si verifichi la condizione:

$$F(Pr) < F(Pl). \quad (13)$$

In ogni modo si determina sempre un nuovo punto  $Pn$  idoneo a sostituire  $Ph$  sia esso  $Pr$ ,  $Pd$ , o  $Pe$ .

Il valore assunto dalla funzione nel nuovo punto  $Pn$  viene poi confrontato con quello assunto dalla funzione nel punto  $Pg$ , vertice in cui la funzione assume valore subito inferiore a  $Ph$ .

Se  $F(Pn)$  è minore di  $F(Pg)$  il punto  $Pn$  viene sostituito al punto  $Ph$  e l'iterazione ripetuta. Se invece  $F(Pn)$  è maggiore od uguale ad  $F(Pg)$ , effettuando solo la sostituzione suindicata, nella successiva iterazione, si perverrebbe al medesimo centroide dei rimanenti punti  $Pc$  (venendo scartato quale peggior vettore il nuovo punto  $Pn$ ), e si eseguirebbe un'ulteriore ricerca lungo la stessa direzione della precedente iterazione.

Questo avviene perché il semplice è troppo esteso rispetto alla curvatura locale della funzione, di conseguenza è conveniente effettuare anche una contrazione totale del nuovo semplice, ottenuto sostituendo  $Pn$  ad  $Ph$ , verso il punto migliore, ossia definire un semplice composto dai seguenti vettori:

$$Pi = \frac{1}{2} (Pi + Pl) \quad i = 1, 2, \dots, n + 1; \quad (14)$$

e poi ripetere l'iterazione.

Generalmente l'algoritmo viene arrestato quando la differenza tra il valore assunto dalla funzione calcolata nel punto peggiore  $Ph$  e quello calcolato nel punto migliore  $Pl$  del semplice è minore di una quantità  $\epsilon$  positiva, arbitraria, definita a priori.

Si riporta, ad esemplificazione di quanto esposto, un'applicazione del metodo del semplice alla funzione di Rosenbrock (figura 2 e figura 3).

Con riferimento alla figura 3, il semplice iniziale è formato dai punti A, B, C:

punto	x	y	Fr
A	0	2	401
B	1	0	100
C	0	0	1

Dalle (6), (7), (8) si rileva che il punto peggiore,  $Ph$ , è rappresentato dal punto A, il punto in cui la funzione assume valore subito inferiore,  $Pg$ , è rappresentato dal punto B, mentre il punto migliore,  $Pl$ , è rappresentato dal punto C. È quindi possibile mediante la (9) calcolare il centroide,  $Pc$ , dei due punti migliori, ossia di C e B; eseguiti i calcoli ivi indicati si ottiene il punto,  $Pc$ , di coordinate (0,5,0).

Determinato il punto,  $Pc$ , si perviene mediante la (10) al punto,  $Pr$  (simmetrico di,  $Ph$ , rispetto a,  $Pc$ ), ossia al punto di coordinate (1, -2).

La funzione calcolata in questo nuovo punto vale 900, maggiore del valore assunto dalla funzione nel punto peggiore,  $Ph$ , ossia in A; il nuovo punto non può, quindi, essere sostituito ad A per formare un nuovo semplice più vantaggioso di quello iniziale.

Viene quindi effettuata una contrazione del semplice secondo quanto indicato nella (11). Posto  $\lambda = 0,75$ , eseguiti i calcoli indicati nella (11), si ottiene il punto,  $Pd$ , di coordinate (0,75, -1) nel quale la funzione vale 244 quindi minore di 401 che compete al punto peggiore A. Il punto  $Pd$  è indicato con la lettera D in figura 3; sostituito il punto D al punto A si ottiene un nuovo semplice, migliore del precedente, identificato dalle lettere B, C, D.

Nel punto  $Pd$ , ossia in D, la funzione assume valore maggiore che nel punto  $Pg$ , ossia in B, di conseguenza è conveniente effettuare una contrazione totale del semplice verso il punto migliore, in questo caso rappresentato dal punto C, mediante la (14).

Il nuovo semplice risulta così composto (sempre con riferimento alla figura 3) dai seguenti punti:

punto	X	Y	Fr
C	0	0	1
E	0,375	-0,5	41,43
F	0,5	0	6,5

Definito un nuovo semplice migliore del precedente si ricomincia una nuova iterazione, la quale, come si può notare dalla figura 3, è dello stesso tipo di questa.

Le due iterazioni esaminate nel primo esempio, e quest'ultima relativa alla funzione di Rosenbrock, esauriscono, in sostanza, tutti i possibili casi insiti nell'applicazione del metodo del semplice.

#### PRINCIPALI SIMBOLI USATI

- c = coesione.
- F = coefficiente di sicurezza.
- i = indice di concio
- M = numero dei concii in cui è stato suddiviso il pendio.
- P' = risultante delle pressioni efficaci (effettive).
- T = sforzo di taglio mobilitato.
- u = pressione neutrale (interstiziale).
- U' = risultante delle pressioni neutrali (interstiziali).
- W = peso totale del concio.
- $\varphi$  = angolo d'attrito interno.

#### BIBLIOGRAFIA

- ARREDI F. (1981) - *Soluzioni utili di due problemi particolari che fanno parte della determinazione della stabilità delle dighe di materiali sciolti*. Idrotecnica, No 4, 153-158.
- BAKER R., GARBER M. (1978) - *Theoretical analysis of the stability of slopes*. Geotechnique, 28, n. 4, 395-411.
- BAKER R. (1980) - *Determination of the critical slip surface in slope stability computations*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 4, No 4, 333-359.
- CASTILLO E., LUCANO A. (1982) - *A critical analysis of some variational methods in slope stability analysis*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 6, No 6, 195-209.
- CESTELLI GUIDI C. (1984) - *Geotecnica e tecnica delle fondazioni*. Hoepli, Milano.
- COTECCHIA V., DEL PRETE M., FEDERICO A., TRISORIO LIUZZI G. (1979) - *Sugli apporti odierni della geologia e della geotecnica nella problematica dei movimenti franosi*. Pubblicazione No 69, C.N.R., Fenomeni Franosi.

- FREDLUND D. G., KRAHN J. (1977) - *Comparison of slope stability methods of analysis*. Can. Geotech. J., 14, 429-439.
- HOVLAND H. J. (1977) - *Three-dimensional slope stability analysis method*. J. of the Geotechnical Engineering Division, A.S.C.E., 103, No GT9, 971-986.
- HUANG Y. H., AVERY C. M. (1976) - *Stability of slopes by logarithmic-spiral method*. J. of the Geotechnical Engineering Division, A.S.C.E., 103, No GT1, 41-49.
- NELDER J. A., MEAD R. (1965) - *A simplex method for function minimization*. Comput. J., 7, 308.
- REVILLA J., CASTILLO E. (1977) - *The calculus of variations applied to stability of slopes*. Geotechnique, 27, No 1, 1-11.
- SELIGER R. A., KIOVACS W. D., LOVELL C. W. (1981) - *Random surface generation in stability analysis*. J. of the Geotechnical Engineering Division, A.S.C.E., 107, No GT7, 996-1002.
- TERZAGHI K., PECK R. B. (1974) - *Geotecnica*, UTET, Torino.
- TIBALDI M. (1977) - *Tecniche di programmazione non lineare*. Pitagora editrice, Bologna.

## SUMMARY

### The computation of critical sliding surfaces in slope stability analysis.

Limit equilibrium methods are most frequently used to determine slope stability in soil mechanics.

They rely on the determination of the equilibrium along a fixed slip surface of arbitrary shape by comparison with the limit condition pointed out by a unit safety factor.

From a practical viewpoint, one must determine the sliding surface tied to the minimum factor of safety which occurs in real-life earthen slopes.

Among the methods most commonly used are those termed as slice-methods owing to their adaptability to the analysis of earth slopes of any shape with nonhomogeneous soil parameters, with pore water pressure and else.

Having taken a certain slip surface within the slope, one must divide the earth into a definite number of ver-

tical slices; by studying the equilibrium of each slice one gets to the evaluation of the equilibrium conditions.

The surface holding a minimum safety factor is tied to the calculation of the safety factor of different pre-established surfaces and iteratively defined.

Such a research requires a long time of computation, especially in the case for which potential slip surface, cannot be described by simple shapes e.g. a circular arc.

A method is presented herein aiming at the computation of the parameters of the sliding surface of a given slope to which the minimum factor of safety is strictly connected.

The procedure works both when it may be described through a single function, e. g. a circle, or when it may be characterized by a whole of functions different each from the other, as a polygonal curve may be.

Such curves can also be forced to pass through points and/or through fixed parts of the earth slope as tailored the nature of the given problem.

Such a method consists of the minimization of the function yielding the safety factor as a function of known soil parameters and unknown factors characterizing the sliding surface.

The algorithm of solution proposed is the simplex method.

The advantages of the above procedure lie in:

- the possibility of using geometrically predefined curves. In these cases the algorithm is believed to be really efficient;

- the possibility of using curves composed of a consistent group of segments, each taken as a basis for the current slice.

The efficiency of the proposed algorithm for broken lines made up by 10 to 20 segments is satisfactorily.

- the possibility of implementing directly an analysis code for slope stability to known sliding surface.

Besides the simplex algorithm which nevertheless is rather suitable to coding, is usually found within libraries of most computing centres.