

Slip surface search in slope stability analysis

V. R. GRECO *, G. GULLA **

SUMMARY: This paper presents a method for locating the slip surface with the lowest safety factor. The method is based on Nonlinear Programming and uses the pattern search method and the SUMT technique. The slip surface is approximated by a broken line whose coordinates at the vertices are the variables involved in the minimization problem.

From these preliminary results it is to be observed that the approximation is still good even when the number of vertices is small. The critical surfaces were found to be noncircular in shape.

1. Introduction

The limit equilibrium method can be successfully adopted in slope stability analysis to obtain an easy and rapid estimate of the global equilibrium conditions of a soil mass situated between the topographic surface and one along which the failure is assumed to be present.

Since no general methods as yet exist to identify the potential slip surface having the lowest safety factor, it is indispensable to investigate a wide range of possibilities. The problem is further aggravated by the fact that it is impossible to foresee the shape a particular slip surface might assume. Although it is relatively easy to analyze circular slip surfaces due to the limited number of variables defining them, the problem becomes much more complicated when no constraints are placed on the slip surface shape.

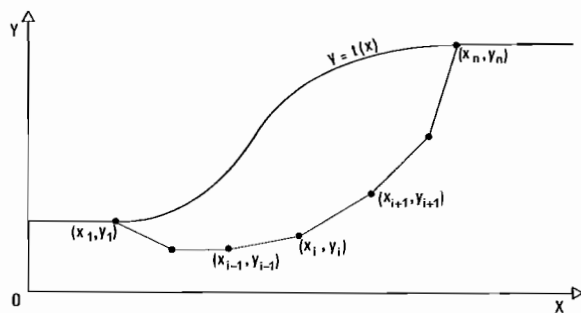


Fig. 1. - Cross section of slope with broken line approximating the slip surface.

Fig. 1. - Sezione di un pendio a spezzata approssimante la superficie di scorrimento.

* Venanzio Raffaele GRECO, Researcher of Soil Physics and Slope Stability - Università della Calabria - Arcavacata di Rende (Cosenza).

** Giovanni GULLA, Researcher - Istituto di Ricerca per la Protezione Idrogeologica nell'Italia Meridionale ed Insulare - IRPI-C.N.R. - Castiglione Cosentino Scalo (Cs).

Both authors have contributed equally to the present paper.

One recent approach to the problem utilizes the Calculus of Variations to search for a function $f(x)$, which represents the slip surface and which can minimize the safety factor [REVILLA and CASTILLO, 1977; BAKER and GERBER, 1978]. However some doubts regarding the applicability of this method have been raised by DE JONG [1980].

BOUTRUP and LOVELL [1980] and SIEGEL, KOVACS and LOVELL [1981] have proposed a method involving a random generation of possible slip surfaces approximated from a broken line, whose coordinates at the vertices represent the problem variables. This method, which can be classified among the so-called Monte Carlo methods [LUUS and JAAKOLA, 1973], is one of the simplest direct search methods currently available. However, it does have one weakness in that it is unable to incorporate data pertaining to previous investigations on other slip surfaces.

The Descent Methods from Nonlinear Programming take as their starting point a trial solution, i.e. an admissible surface, and then work towards solutions with a progressively lower safety factor until such time as the lowest possible one is reached. This particular approach has been adopted by CELESTINO and DUNCAN [1981] who suggest using the « alternating variables method » in searching for the optimal solution. It is, however, well known that the method does not always converge to an optimal solution in a finite time whenever those curves with equal safety factor (equipotential surfaces) are considerably elongated in a direction parallel to none of the coordinate axes (fig. 2).

Whilst our project was nearing its completion two interesting proposals were made for finding the slip surface with the lowest safety factor. NGUYEN [1985] proposed using the

« simplex method » whereas ARAI and TAGYO [1985] suggested a method based on the « conjugate gradient method » [FLETCHER and REEVES, 1964] which they applied to the simplified method of JANBU [1957]. It must be pointed out, however, that the former is only efficient in solving problems which involve a limited number of variables.

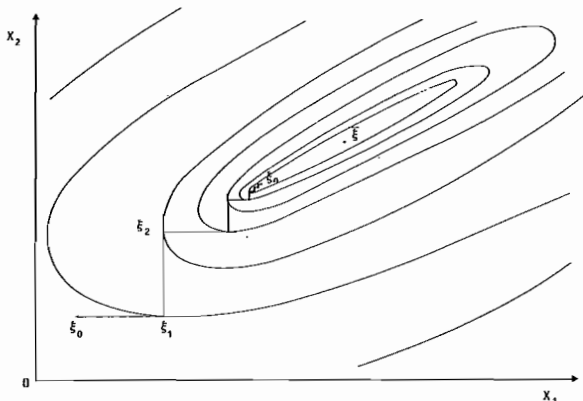


Fig. 2. - Minimization procedure in the alternating variables method.

Fig. 2. - Procedura di minimizzazione con il metodo delle variabili alternate.

In the method proposed in this paper, the problem of locating the potential slip surface with the lowest safety factor is tackled by searching for the minimum of a nonlinear function nonlinearly constrained.

All unfeasible solutions are discarded by means of the « barrier method », and the unconstrained search is carried out by the pattern search method [HOOKE and JEEVES, 1964]. Some modifications had to be introduced into the latter in order to deal with the particular problem examined.

The analysis is performed in terms of effective stress and of plane deformation state. In order to simplify the problem the soil has been assumed homogeneous and free from pore pressure.

The safety factor has been calculated according to the simplified method of JANBU [1957], since its computation time is considerably shorter than that required by the other methods used in analyzing surfaces of any shape [MORGENSTERN and PRICE, 1965; SPENCER, 1967]. However, it must be pointed out that the choice of this particular computation method is not in any way binding when adopting the method proposed in this paper.

2. Formulation of the problem

Let us assume a Cartesian reference system, xy , and let $y = t(x)$ be a mathematical function describing the topographic surface.

The potential failure surface is represented by a broken line with n vertices whose coordinates are given by $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots, (x_n, y_n)$ (see fig. 1).

The vector

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}^T \quad (1)$$

in a $2n$ -dimensional space (R^{2n}) locates the point ξ representing a potential slip surface. To every point ξ there corresponds a value of the safety factor, F , which will also be the so-called objective function.

The problem consists in finding the vector $\bar{\xi}$ which minimizes the objective function $F(\xi)$:

$$\min_{\xi} F(\xi) \quad (2)$$

Rather than considering the entire space R^{2n} , the search is restricted to a subspace wherein all unfeasible solutions are discarded.

A solution is considered feasible when the first and last points of the broken line representing the potential slip surface both lie on the topographic surface, i.e. when:

$$y_i = t(x_i) \quad i = 1, n \quad (3)$$

and when all the other points lie beneath it, i.e. when:

$$y_i < t(x_i) \quad i = 2, \dots, n - 1 \quad (4)$$

Moreover, the constraints:

$$x_i < x_{i+1} \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (5)$$

prevent the slip surface from assuming unfeasible shapes such as those in fig. 3.

The search can be simplified by fixing the range of values for each variable on the basis of experience:

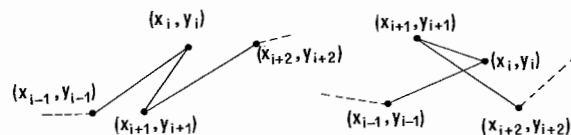


Fig. 3. - Unfeasible arrangement of slip surface vertices.

Fig. 3. - Disposizione inammissibile dei vertici della spezzata.

$$x_{\min} < x_i < x_{\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$y_{\min} < y_i < y_{\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

Therefore the problem of finding the critical slip surface with lowest safety factor is solved by searching for the vector $\bar{\xi}$ which minimizes the objective function (2):

$$\min_{\xi} F(\xi) \quad (2)$$

subject to 2 equality constraints:

$$h_1(\xi) = y_1 - t(x_1) = 0 \quad (8)$$

$$h_2(\xi) = y_n - t(x_n) = 0 \quad (9)$$

to $2n - 3$ inequality constraints:

$$g_i(\xi) = x_i - x_{i+1} < 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n - 1 \quad (10)$$

$$g_{n-1+i}(\xi) = t(x_i) < 0 \quad \text{per } i = 2, \dots, n - 1 \quad (11)$$

and to 4n bounds:

$$u_i(\xi) = x_{\max} - x_i > 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n \quad (12)$$

$$u_{i+n}(\xi) = y_{\max} - y_i > 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n \quad (13)$$

$$l_i(\xi) = x_{\min} - x_i < 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n \quad (14)$$

$$l_{i+n}(\xi) = y_{\min} - y_i < 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n \quad (15)$$

3. Search for the minimum

The methods currently used in solving non-linear programming problems can be divided into two broad groups:

— gradient methods which, in their search for the optimal solution, use data concerning not only the objective function but also its derivatives;

— direct search methods which utilize data concerning the objective function only.

Since the gradient methods utilize a much larger body of data concerning the objective function, they should obviously be much more efficient than direct search methods. Unfortunately however the safety factor function is not easily differentiable, especially in the case of those stability methods where all the equilibrium conditions are satisfied. Moreover, it is impossible to calculate F exactly since some errors have to be allowed when the iterative procedure used in its calculation has to be stopped at a certain point. Further errors are introduced by the number of slices into which the potential landslide is subdivided.

Consequently serious difficulties are encountered even when the partial derivatives of F are calculated numerically: the increment in each variable must be sufficiently large to estimate the difference in F between two successive points whatever the error involved and it must be sufficiently small to enable a descent direction to be found (i.e. a direction along which F is decreasing).

It therefore seems preferable to employ direct search methods such as the alternating variables method, the rotating directions method [ROSENBROCK, 1960], the simplex method [SPENDLEY *et al.*, 1962], the pattern search method and the POWELL method [1964].

All these methods begin the search for the optimal solution from a trial point, ξ_0 , in a $2n$ -dimensional space. This point represents a trial feasible surface and generates a succession of points, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ such that the respective values of the objective function are decreasing:

$$F_0 > F_1 > F_2 > \dots > F_m \quad (16)$$

The search is halted when in two successive points, ξ_i and ξ_{i+1} , the values of the safety factor, F_i and F_{i+1} , are different for a quantity smaller than a prescribed positive number, ϵ , such that:

$$F_i - F_{i+1} < \epsilon \quad (17)$$

or when the amplitude of the last step is smaller than a prescribed positive number, δ , such that:

$$\|\xi_{i+1} - \xi_i\| < \delta \quad (18)$$

In the rotating directions method and in the Powell method, which are operated by successively varying the search directions, some of the problems encountered in using the alternating variables method are overcome. As in the latter, however, several evaluations of the safety factor have to be obtained so that it can be minimized in each search direction. Since an evaluation of the objective function is neither quick nor easy, especially when using methods such as those proposed by MORGENSTERN and PRICE [1965] and SPENCER [1967]; these search methods tend to be rather slow.

The pattern search method [HOOKE and JEEVIS, 1964] can also require numerous evaluations of the objective function. It is however an easy and reliable programming method when dealing with problems involving « rid-

ges » and « valleys ». This is a very important feature whenever, as in our case, the « shape » of the objective function is unknown.

The pattern search method is articulated in two distinct stages: exploration and extrapolation.

In the exploration stage each variable is increased or decreased in turn by the current value of the step in order to obtain a decrease in the objective function. When no decrease occurs it is assumed that the neighbourhood of the minimum has been reached. At this point the search has to be intensified by considering smaller increases in the variables. The length of the step is then reduced and the procedure iterated.

Once the exploration phase has been completed the extrapolation stage is initiated. In this phase the global move developed in the exploration stage is repeated and a new point

$$V(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{when } \xi \text{ is inside the feasible set} \\ +\infty & \text{when } \xi \text{ is outside the feasible set} \end{cases} \quad (20)$$

Although the use of this barrier function is perfectly feasible whenever inequality constraints are involved, it is unable to deal with equality constraints. In the particular case discussed here, for example, the increments at each move in the variables x_1 and x_2 would fail to verify the constraints (3).

$$\text{and} \quad V_2(\xi) = \begin{cases} -\rho \sum_{i=1}^{2n-3} \lg [-g_i(\xi)] & \text{when } g_i(\xi) < 0 \text{ per } i = 1, \dots, n \\ +\infty & \text{when } \exists i: g_i(\xi) > 0 \end{cases} \quad (23)$$

By performing the minimization in this way, y_1 and y_n are allowed to differ from $t(x_1)$ and $t(x_2)$ respectively. The failure to verify eq. 3 introduces a penalty given by eqs. (19), (21) and (22), which alters the value of the objective function.

Although this strategy has been successfully adopted, in many cases it does create considerable problems in estimating F . We therefore decided that all the variables should be varied independently except for y_1 and y_n which are updated in such way that, when x_1 and x_n are modified, eq. 3 is always verified. The procedure proved extremely efficient once it had been modified in this way.

is accepted whenever a decrease in F is observed.

The exploration and extrapolation stages are then alternated until the arrest criterion is verified.

The pattern search method was originally formulated to deal with unconstrained problems only. It was later extended with the help of the SUMT technique [FIACCO and MCCORMICK, 1964, 1966] to deal with constrained problems.

In order to solve constrained problems and prevent the solution from falling outside the feasible set, this technique uses an augmented objective function:

$$G(\xi) = F(\xi) + V(\xi) \quad (19)$$

where $V(\xi)$ is a barrier function defined generically as:

This problem can be overcome by expressing the barrier function in the form:

$$V(\xi) = V_1(\xi) + V_2(\xi) \quad (21)$$

where

$$V_1(\xi) = \rho \sum_{i=1}^2 h_i^2(\xi) \quad (22)$$

It must be pointed out that the minimum calculated by the pattern search method, as indeed by all minimization methods is a local minimum only. It is therefore impossible to exclude the existence of several local minima.

Additional problems can arise in the case of functions characterized by large zones in the neighbourhood of the minimum where variations in the objective function are very slight. In these regions a premature arrest of the minimization procedure can easily occur.

In spite of the fact that a premature solution can be very different from the optimal solution, the error in F is however still very small.

The problem of finding the global minimum of the objective function has yet to be solved. It is not possible to ascertain theoretically whether the minimum found is a global minimum or a purely local one. Although a repeated use of the procedure starting from different trial solution can be an useful means of search, it is unable to exclude the possibility that several other local minima are present.

4. Conclusions

The method presented has been tested by analyzing the stability of the slope shown in fig. 4. The geotechnical parameters utilized were those found by TANCREDI [1980] for Italian variegated clay shales ($c' = 2.57 \text{ t/m}^2$, $\phi' = 17^\circ$, $\gamma = 1.93 \text{ t/m}^3$). Although this particular example does not enable a general conclusion to be formulated, some important results did emerge.

Figs 4-6 show some feasible trial surfaces (dashed lines) together with the critical surface obtained by the minimization method described (unbroken line). It can be observed that the critical surfaces determined from the various trial surfaces are always the same. This may perhaps be due to the existence of a single or global minimum.

Figs. 7-12 show the critical slip surfaces (unbroken lines) and the trial surfaces having a different number of vertices (dashed lines). It is to be observed that by increasing the number of vertices the critical surface is better approximated. However the approximation is still good even when the number of vertices is small. When four vertices are used instead of two the safety factor improves by 36% from four to ten the improvement is only 3% and from seven to ten a mere 0.3%.

Where the shape and position of the critical surface are concerned, the difference is very slight between broken lines with four and ten vertices. This can be seen very clearly in fig. 13 where critical slip surfaces having four-nine vertices (dashed lines) can be compared with one having ten (unbroken line).

Figs. 14 and 15 show how the solution evolves from a starting surface or trial solution. It can be seen that in searching for the minimum a relatively large area was investigated.

Figs. 16 and 17 show the minimization procedure applied to slopes of irregular shape. In this case the critical surface determined from the trial surfaces was also the same.

Both in the first example considered and in these last ones the critical surfaces were found to be noncircular in shape. This result is in agreement with the findings of ARAI and TAGYO [1985].

From these preliminary investigations it would appear that no substantial problems or difficulties are to be encountered in applying nonlinear programming methods to the search for critical slip surfaces.

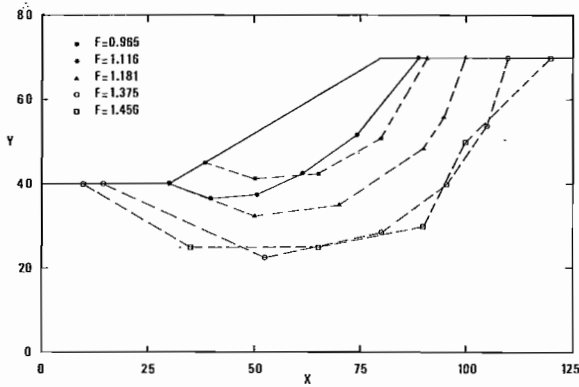


Fig. 4

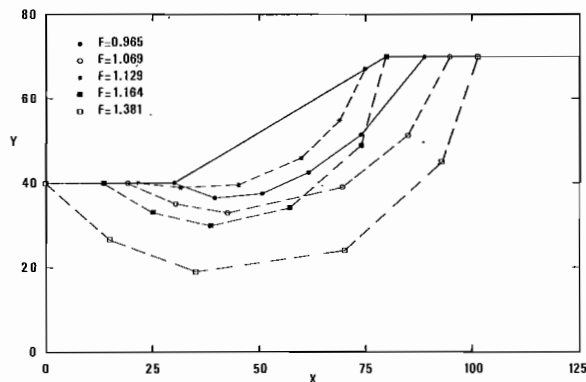


Fig. 5

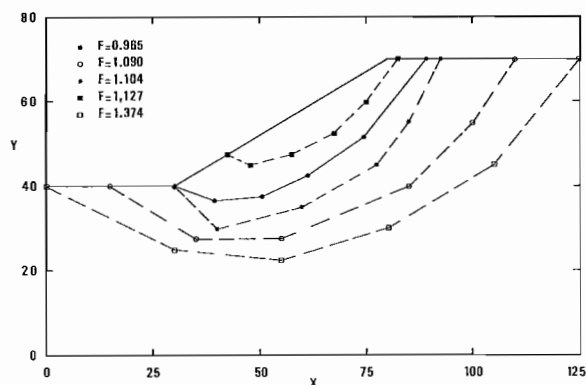


Fig. 6

Fig. 4-6. - Trial slip surfaces (dashed lines) and critical slip surface (unbroken line).

Fig. 4-6. - Superfici di scorrimento di tentativo (in tratteggio) e relative critiche (con linea continua).

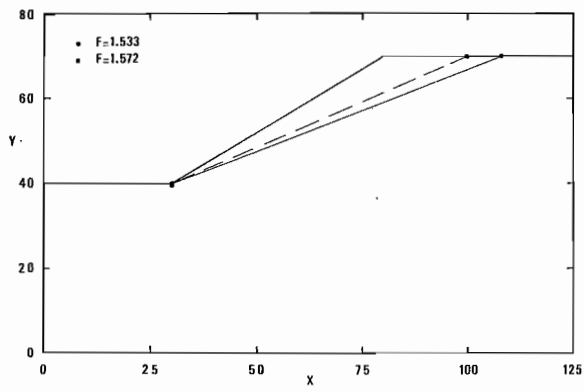


Fig. 7

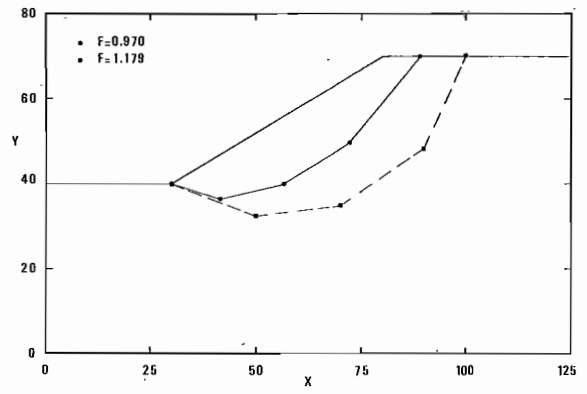


Fig. 10

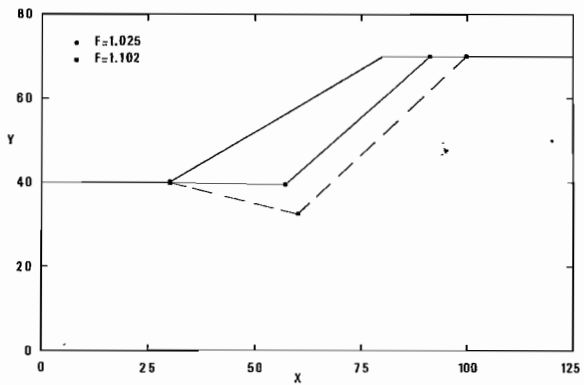


Fig. 8

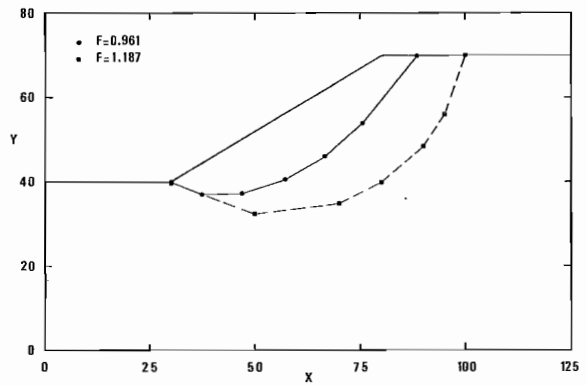


Fig. 11

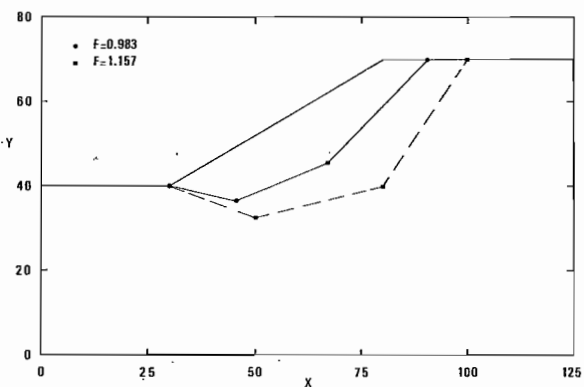


Fig. 9

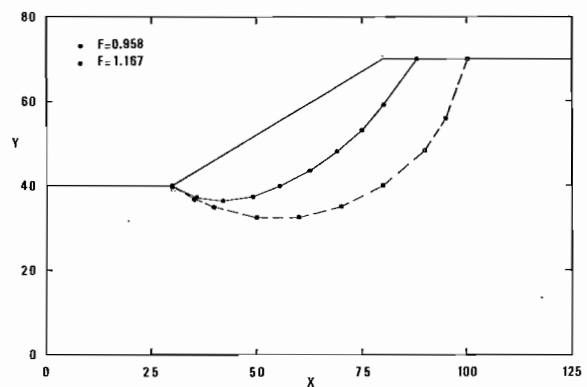


Fig. 12

Fig. 7-12. - Starting slip surfaces (dashed lines) and critical slip surfaces (unbroken lines) for broken lines having different number of vertices.

Fig. 7-12. - Superfici di partenza (in tratteggio) e relative superfici critiche (con linea continua) al variare del numero di vertici della spezzata.

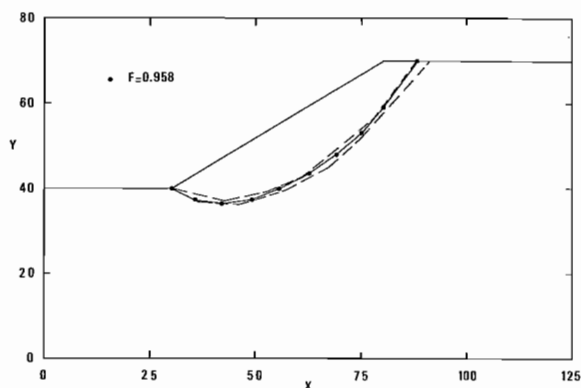


Fig. 13. - The dashed lines limit the zone containing the critical surfaces with five to nine vertices. The solid line represents the critical surface having ten vertices.

Fig. 13. - Le linee in tratteggio contengono le spezzate con un numero di vertici da cinque a nove, la linea continua rappresenta, invece, la spezzata di dieci vertici.

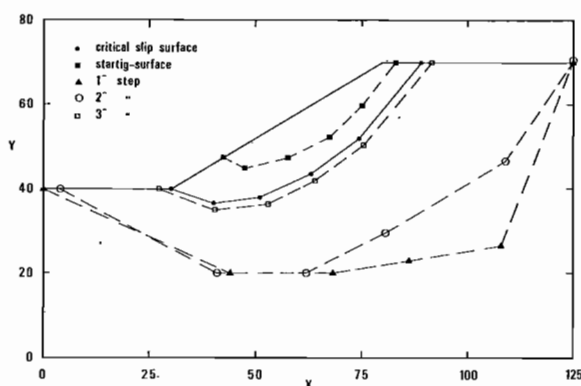


Fig. 14

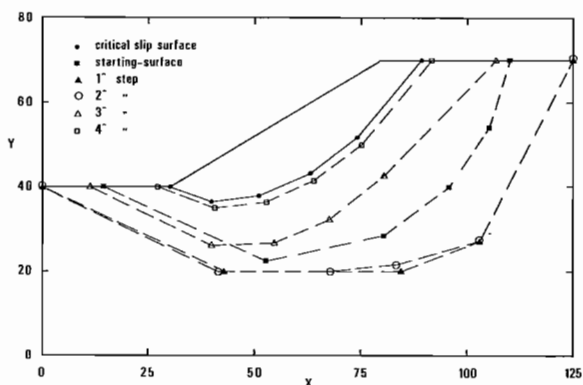


Fig. 15

Figg. 14-15. - Evolution of slip surface from trial surface to critical surface.

Figg. 14-15. - Evoluzione della superficie di scorrimento da una di tentativo a quella critica.

REFERENCES

ARAI K., TAGYO K. (1985) - *Determination of Noncircular Slip Surface giving the minimum Factor of Safety in Slope Stability Analysis*. Soils and Foundations, vol. 25, n. 1, pp. 43-51.

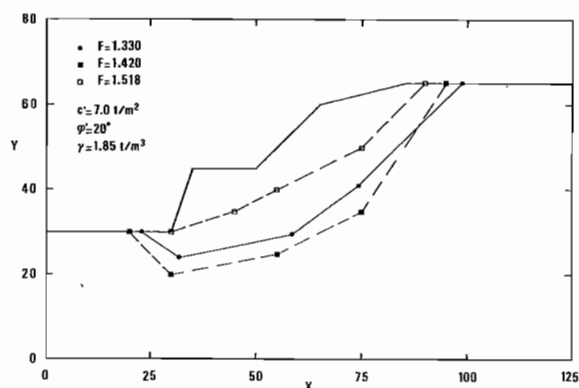


Fig. 16

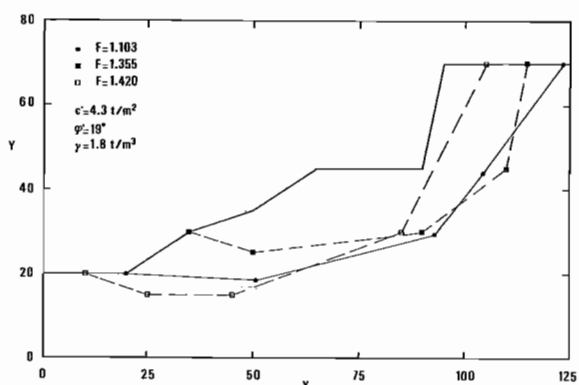


Fig. 17

Figg. 16-17. - Critical slip surfaces obtained from different starting surfaces for two irregular slopes.

Figg. 16-17. - Superfici di scorrimento critiche ottenute da differenti superfici di tentativo per due pendii di forma irregolare.

BAKER R., GERBER M. (1978) - *Theoretical Analysis of Stability of Slopes*. Geotechnique, vol. 28, n. 4, pp. 395-441.

BOUTRUP E., LOVELL C. W. (1980) - *Searching Techniques in Slope Stability Analysis*. Engineering Geology, vol. 16, pp. 51-61.

CELESTINO T. B., DUNCAN J. M. (1981) - *Simplified Search for Noncircular Slip Surfaces*. Proc. X Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. (Stockolm), vol. III, pp. 391-394.

DE JONG G. DE J. (1980) - *Application of the calculus of variations to the vertical cut off in cohesive frictionless soil*. Geotechnique, vol. 30, n. 1, pp. 1-16.

FIACCO A. V., MCCORMICK G. P. (1964) - *The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming: A Primal-Dual Method*. Management Science, vol. 10, pp. 360-366.

FIACCO A. V., MCCORMICK G. P. (1966) - *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. John Wiley & Sons, New York.

FLETCHER R., REEVES C. M. (1964) - *Function Minimization by Conjugate Gradients*. Computer Journal 7, 149-154.

GRECO V. R. (1983) - *Dimensionamento a costo minimo dei muri di sostegno a gravità*. Atti XV Conv. Naz. Geotec. (Spoleto), vol. III, pp. 361-366.

HOOKE R., JEEVES T. A. (1961) - *Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems*. J. Assoc. Comp. Mach., vol. 8, pp. 212-221.

JAUBU N. (1957) - *Earth pressures and bearing capacity calculations*. Proc. 4th I.C.S.M.F.E., vol. 2, pp. 207-212.

- LUUS R., JAAKOLA T. H. I. (1973) - *Optimization by direct search and systematic reduction of the size of search region*. A.I.Ch.E. Journ. 19, 760-766.
- MORGENSTERN R. N., PRICE V. E. (1965) - *The analysis of stability of general slip surface*. Geotechnique, vol. 15, n. 1, pp. 79-93.
- NGUYEN V. U. (1985) - *Determination of Critical Slope Failure Surfaces*. Journ. Geot. Eng. Div. ASCE, vol. 111, n. 2, pp. 238-250.
- POWELL M. J. D. (1964) - *An Efficient method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives*. Computer Journ., vol. 7, pp. 155-162.
- REVILLA J., CASTILLO E. (1977) - *The Calculus of Variations Applied to Stability of Slopes*. Geotechnique, vol. 27, n. 1, pp. 1-11.
- ROSENBROCK H. H. (1960) - *An Automatic method for Finding the Greatest or Least Value of a Function*. Computer Journ., vol. 3, pp. 175-184.
- SIEGEL R. A., KOVACS W. D., LOVELL, C. W. (1981) - *Random Surface Generation in Stability Analysis*. Journ. Geot. Engin. Div. A.S.C.E., vol. 107, n. GT7, pp. 996-1002.
- SPENCER E. (1967) - *A Method of Analysis of the Stability of Embankments Assuming Parallel Interslice Forces*. Geotechnique, vol. 7, pp. 11-26.
- SPENDLEY W., HEXT G. R., HIMSWORTH F. R. (1962) - *Sequential Applications of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation*. Technometrics, vol. 4, pp. 441-461.

SOMMARIO

Ricerca della superficie di scorrimento nelle analisi di stabilità

L'analisi di stabilità dei pendii con i metodi dell'equilibrio limite consente di valutare, in maniera assai semplice e rapida, lo stato di equilibrio globale di un volume di terreno compreso tra la superficie di campagna ed una superficie lungo la quale si ipotizza possa localizzarsi la rottura.

Poiché, in generale, non si dispone di un metodo di individuazione della potenziale superficie di scorrimento, che dà luogo al minimo coefficiente di sicurezza, occorre necessariamente che venga esaminato un numero sufficientemente elevato di potenziali superfici di scorrimento. Notevoli difficoltà derivano, anche, dalla circostanza di non poter prevedere la forma di tale superficie. Mentre, infatti, nelle analisi che ipotizzano superfici di rottura circolari la ricerca è resa più agevole dal numero esiguo di variabili, che definiscono la geometria del potenziale corpo di frana, nelle analisi che non pongono vincoli alla forma di tale superficie questa indagine risulta assai più complessa.

Recentemente il problema è stato affrontato facendo ricorso al Calcolo delle Variazioni, procedendo alla ricerca della funzione $f(x)$, rappresentante la superficie di rottura, che rende minimo il coefficiente di sicurezza [REVILLA e CASTILLO, 1977; BAKER e GERBER, 1978]. Tuttavia, alcuni dubbi sull'applicabilità di questa metodologia sono stati sollevati da DE JONG [1980].

BOUTRUP e LOVELL [1980] e SIEGEL, KOVACS e LOVELL [1981] hanno impiegato metodi di generazione causale di possibili superfici di scorrimento, approssimate mediante spezzate, le cui coordinate dei vertici rappresentano le variabili del problema (fig. 1). Questo metodo, che rientra tra i metodi di Monte Carlo [LUUS e JAAKOLA, 1973], non consente, però, di utilizzare le informazioni precedentemente trovate, esaminando altre superfici di scorrimento, per determinare via via superfici più pericolose.

I « Metodi di discesa » della Teoria dell'Ottimizzazione

permettono, invece, partendo da una soluzione di tentativo (vale a dire da una superficie ammissibile), di migliorare iterativamente tale soluzione per pervenire a quella ottima (superficie critica), caratterizzata dal minimo valore del coefficiente di sicurezza. CELESTINO e DUNCAN [1980] hanno usato il « metodo delle variabili alternate ». Ma notoriamente questo metodo può non convergere verso la soluzione ottima in un tempo finito quando le superfici ad uguale valore della funzione coefficiente di sicurezza (superfici equipotenziali) risultano piuttosto allungate in una direzione non parallela ad alcuno degli assi coordinati (fig. 2).

Mentre questo lavoro era prossimo alla conclusione sono apparsi due importanti studi. ARAI e TAGYO [1985] hanno proposto di ricercare la superficie di scorrimento con minimo coefficiente di sicurezza con il « metodo del gradiente coniugato » [FLETCHER e REEVES, 1964] applicandolo al metodo semplificato di JANBU [1957], NGUYEN [1985] utilizza, invece, il « metodo del semplice », che tuttavia risulta efficiente solo per problemi con poche variabili.

Nella presente nota viene affrontato il problema della ricerca della superficie critica di scorrimento, caratterizzata dal valore minimo del coefficiente di sicurezza, nell'ambito della Teoria dell'Ottimizzazione e viene presentato un metodo efficiente per operare tale ricerca.

Le soluzioni non ammissibili vengono scartate facendo ricorso al metodo della « funzione di barriera », mentre la ricerca non vincolata viene eseguita con il metodo « pattern search » [HOOKE e JEEVES, 1964], con alcune modifiche rese necessarie dal particolare problema in esame.

L'analisi viene condotta in termini di tensioni effettive e di deformazione piana, mentre, per semplicità di trattazione, il pendio viene supposto privo di falda ed il terreno omogeneo.

Il calcolo del coefficiente di sicurezza è stato eseguito con il metodo semplificato di JANBU [1957]. Rispetto ad altri metodi utilizzabili per superfici di forma qualsiasi [MORGENSTERN e PRICE, 1965; SPENCER, 1967] questo metodo risulta assai rapido e consente di avere sensibili riduzioni nei tempi di calcolo. Ad ogni modo questa scelta non è vincolante per il metodo di ricerca proposto.

Assumiamo un sistema di riferimento cartesiano, Oxy, ed indichiamo con $y = f(x)$ una funzione matematica rappresentante il profilo topografico.

La potenziale superficie di rottura viene rappresentata con una spezzata di n vertici di coordinate (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) (fig. 1) Indicato con ξ il vettore $[x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$, il coefficiente di sicurezza, F , risulta funzione delle $2n$ variabili racchiuse nel vettore ξ . Il nostro obiettivo è quello di ricercare il vettore ξ , che minimizza la funzione $F(\xi)$ (eq. 2).

Questa ricerca non va estesa a tutto l'insieme R^{2n} , ma ad un suo sottoinsieme che escluda le soluzioni inammissibili.

Perché, infatti, una soluzione sia ammissibile, occorre che il primo e l'ultimo punto della spezzata, che costituisce la potenziale superficie di scorrimento, ricadano sul profilo topografico (eq. 3), mentre, i restanti punti devono stare al di sotto di detto profilo (eq. 4). Le condizioni date nella relazione (5) impediscono, inoltre, che la superficie di rottura possa assumere forme inconsuete o inammissibili come quelle raffigurate nella fig. 3.

È possibile, infine, agevolare la ricerca, fissando per ogni variabile dei valori massimi e minimi sulla base dell'esperienza (eqq. 6 e 7).

I metodi per la risoluzione dei problemi di programmazione non lineare si raccolgono in due grandi gruppi:

— metodi del gradiente, che ricercano la soluzione ottima utilizzando informazioni sulla funzione obiettivo e sulle sue derivate;

— metodi di ricerca diretta, i quali adoperano sólo informazioni sulla funzione obiettivo.

Poiché i metodi del gradiente si avvalgono di maggiori informazioni circa la funzione obiettivo, essi risultano più efficienti che non quelli di ricerca. Ma il coefficiente di sicurezza è differenziabile con difficoltà, in quanto, se espresso in termini di tensioni effettive, non è esplicitabile. Per lo stesso motivo F non è valutabile con precisione, poiché la procedura iterativa per determinarlo deve ad un certo punto essere arrestata, accettando di commettere un certo errore. Un ulteriore errore dipende, inoltre, dal numero di strisce in cui si divide il potenziale corpo di frana.

Per queste ragioni esistono serie difficoltà a calcolare le derivate parziali di F anche numericamente, in quanto l'incremento su ciascuna variabile dovrebbe essere sufficientemente grande da fare apprezzare la differenza in $F(\xi)$ in due successivi punti, nonostante gli errori di cui F è affetto, e sufficientemente piccolo da fornire attendibili informazioni sulla direzione nella quale F decresce (direzione di discesa).

Questa circostanza consiglia l'uso dei metodi di ricerca diretta, come sono appunto il metodo delle variabili alternate, quello delle direzioni rotanti [ROSENBROCK, 1960], il metodo del semplice [SPENDLEY *et al.*, 1962], il pattern search ed il metodo di POWELL [1964].

In tutti questi metodi la soluzione viene ricercata in uno spazio a $2n$ dimensioni partendo da un punto, di tentativo ξ_0 , e passando successivamente ai punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ in modo che la successione dei corrispondenti valori della funzione obiettivo sia decrescente (eq. 16).

La ricerca ha termine allorché in due successivi punti, ξ_i e ξ_{i+1} , i valori della funzione F_i e F_{i+1} , differiscono di una quantità minore di un prefissato ϵ , oppure, a scelta, se l'ampiezza del passo per portarsi dal punto ξ_i al successivo, ξ_{i+1} , è minore di un prefissato δ (criteri di arresto) (eqq. 17 e 18).

Il metodo di Powell e quello delle direzioni rotanti, variando successivamente le direzioni di ricerca, consentono di superare alcuni dei problemi del metodo delle direzioni coordinate, ma, al pari di esso, provvedendo a minimizzare la funzione obiettivo in ogni direzione di ricerca, richiedono molte valutazioni della stessa. Questa caratteristica in problemi in cui la valutazione della funzione obiettivo non è immediata, rende questo metodo piuttosto lento.

In effetti anche il metodo pattern search [HOOKE e JEEVES, 1964], può richiedere un consistente numero di valutazioni della funzione. Ma risulta un metodo facile da programmare e molto affidabile per problemi con andamento irregolare della funzione obiettivo. Questa caratteristica è molto importante in problemi, come il nostro, in cui non si conosce a priori la « forma » della funzione obiettivo.

Il metodo pattern search si articola in due distinte fasi: esplorazione ed estrapolazione.

Nella fase di esplorazione ciascuna variabile, a turno, viene incrementata o decrementata del valore corrente del passo, fissato a priori, per ottenere un decremento della funzione obiettivo. Se non si hanno decrementi di F , si presume di essere nei pressi del minimo ed occorre indagare la funzione obiettivo con una precisione maggiore. Il valore del passo viene, allora, ridotto ad un'aliquota di quello precedente.

Esaurita la fase di esplorazione si passa a quella di estrapolazione, in cui si ripete in direzione e lunghezza il passo globale sviluppato durante l'esplorazione, accettando il nuovo punto se esso migliora la funzione obiettivo.

Le fasi di esplorazione ed estrapolazione sono alternate, fino a quando, verificandosi il criterio di arresto, la ricerca ha termine.

Il pattern search era stato, originariamente, formulato per problemi non vincolati, ma, successivamente è stato esteso anche alla risoluzione dei problemi vincolati uti-

lizzando la tecnica del metodo SUMT [FIACCO e McCORMICK, 1964, 1966].

Per risolvere i problemi vincolati ed impedire che durante la ricerca ci si sposti oltre le funzioni di vincolo, nella regione non ammissibile, questa tecnica propone di sostituire alla funzione obiettivo, F , una funzione aumentata (eq. 18), ove $V(\xi)$ è una funzione di barriera definita genericamente nell'eq. 20.

Questo tipo di funzione di barriera è accettabile per vincoli di disuguaglianza, ma può creare alcuni problemi per i vincoli di uguaglianza. Nel nostro caso, ad esempio, gli incrementi sulle variabili x_1 ed x_n provocherebbero ad ogni passo la mancata verifica dei vincoli (3).

Per superare queste difficoltà si possono introdurre le funzioni in eq. (8-11) e porre la funzione di penalità nella forma (21).

In questo modo, affinché la soluzione possa evolvere verso il minimo viene, ammesso che $h_1(\xi)$ e $h_2(\xi)$ possano differire da 0 e, conseguentemente, che y_1 ed y_n possano differire, rispettivamente, da $t(x_1)$ e da $t(x_n)$. La mancata verifica della (2) provoca una penalità, data dalle (19), (21) e (22), con cui viene alterato il valore della funzione obiettivo.

Questa via, spesso perseguita con successo, provoca, però, notevoli difficoltà nella valutazione del coefficiente di sicurezza ed è stata pertanto abbandonata.

Si è allora deciso di far variare indipendentemente tutte le variabili eccetto y_1 ed y_n , che vengono aggiornate subito dopo aver modificato x_1 ed x_n in modo da verificare costantemente la (3).

La procedura così modificata è risultata efficiente.

Occorre precisare che il minimo determinato con il metodo pattern search, come con qualsiasi altro metodo di minimizzazione, è un minimo locale, nei limiti della precisione che un metodo numerico permette di ottenere. Non può essere, infatti, a priori escluso che la funzione obiettivo sia dotata di più minimi locali, nel qual caso occorrerebbe trovare il minimo globale.

Ulteriori incongruenze possono derivare dalla presenza di funzioni obiettivo caratterizzate da larghe zone, in corrispondenza del minimo, in cui il valore della funzione obiettivo varia poco. In tali zone la procedura di ricerca può avere un arresto precoce.

Per tali funzioni, tuttavia, pur potendosi avere consistenti differenze nella posizione della superficie critica determinata a partire da differenti superfici di tentativo, non si riscontrano differenze apprezzabili ai fini tecnici nella valutazione del coefficiente di sicurezza.

Il problema della minimizzazione globale della funzione obiettivo resta, invece, un problema aperto. Non siamo, infatti, in grado di stabilire per via teorica se un minimo trovato è un minimo locale oppure se è il minimo globale. L'impiego ripetuto della procedura di minimizzazione a partire da superfici di tentativo differenti può essere un utile mezzo di indagine ma non consente di escludere, in via generale, la presenza di più minimi locali.

Il metodo qui presentato è stato testato nei suoi aspetti generali utilizzandolo per l'analisi di stabilità di un pendio, privo di falda, costituito da terreno omogeneo cui sono stati attribuiti i parametri geotecnici determinati da TANCREDI [1980] per argille varicolori molisane: $c' = 2.57$ t/m², $\phi' = 17^\circ$, $\gamma = 1.93$ t/m³.

Nelle figure da 4 a 6 sono riportate, a tratteggio e con diversi simboli sui vertici, alcune superfici di tentativo ammissibili, ed a tratto continuo la superficie di scorrimento critica. Come può osservarsi, in questo caso la superficie critica determinata a partire da differenti superfici di tentativo è sempre la stessa. Questo potrebbe essere attribuito alla presenza di un solo minimo (minimo globale).

Le figg. da 7 a 12 mostrano le superfici di scorrimento critiche (con tratto continuo) e le superfici di tentativo (in tratteggio) con un diverso numero di vertici. Si può

notare come aumentando il numero dei vertici la superficie critica è approssimata sempre meglio, sebbene anche superfici con un numero esiguo di punti siano, a fini tecnici sufficientemente approssimate. Passando, infatti, da due a quattro vertici, il miglioramento nella valutazione del coefficiente di sicurezza è di circa il 36%, mentre passando da quattro a dieci vertici si ha un miglioramento del 3%, e da sette a dieci vertici di solo lo 0.3%.

Riguardo alla forma o alla posizione della superficie critica, non è rilevabile una consistente differenza tra le superfici critiche determinate usando da quattro a dieci vertici. Ciò può essere osservato dalla fig. 13 in cui sono riportate nella zona in tratteggio le superfici critiche con un numero di vertici da quattro a nove e, con tratto continuo, quella con dieci vertici.

Le figg. 14 e 15 danno conto dell'evoluzione della superficie di scorrimento durante l'esecuzione della procedura di minimizzazione, mentre nelle figg. 16 e 17 sono riportate le superfici critiche e alcune superfici di tentativo per pendii con profilo irregolare. Anche in questo caso la superficie critica determinata a partire da alcune differenti superfici di tentativo si è dimostrata essere la stessa.

Sia in questi ultimi esempi che nei precedenti è visibile un certo scostamento dalla circolarità delle superfici critiche. Questa osservazione appare in accordo con il lavoro di ARAI e TAGYO [1985].

Questi primi risultati, sebbene parziali, permettono di affermare che, in generale, non vi sono problemi o difficoltà sostanziali all'uso della Programmazione non lineare per la ricerca della superficie di scorrimento critica.