

Stochastic analysis of slope stability

V. R. GRECO *

ABSTRACT: This paper presents a new method, based on the law of large numbers, to evaluate the failure probability of slopes.

The spatial variation in unit weight and the temporal one in pore pressure are both neglected, while the strength parameters c' and $t' = \tan \phi'$ (cohesion and friction coefficient) are treated as random variables reciprocally independent and log-normally distributed.

It has been proved that the use of the mean values of c' and t' in characterizing limit equilibrium methods is fully justified since the errors introduced are relatively small.

The evaluation of slope failure probability is dependent both on variation in the strength parameters and on the number of shear tests performed.

1. Introduction

The usual approach to slope stability problems is by means of limit equilibrium methods which enable the degree of safety to be evaluated in a simple and reliable way.

These analyses make use of a safety factor, F , defined as the factor whereby the available shear strength must be reduced so as to bring it into equilibrium with the mobilized shear stress. If the spatial distribution of the geotechnical parameters within the soil were known (and if the physical system was exactly described) it would be sufficient that the factor F were very little higher than unity for the slope to be stable.

In reality, few data pertaining to soil properties are available. Consequently it is only possible to obtain a rough estimate of the distributions of the soil geotechnical parameters.

This poses two fundamental problems. Firstly, the values used in characterizing the mathematical model must be appropriate and secondly the errors in the computed safety factor stemming from uncertainties in the analysis must be considered.

In the deterministic approach these two problems are generally tackled by taking the average values and by requiring higher values of F than those strictly necessary.

The weakness of this approach lies in the average value, which is only a position index and does not give a sufficiently clear picture of the statistical properties of the various parameters. Moreover, it must be pointed out that several landslides have, in fact, occurred in slopes with computed safety factors higher

than unity. This means that a slope with computed safety factor higher than unity can well be subject to failure.

In recent years a more satisfactory answer to these problems has been provided by analyses based on a statistical and probabilistic approach. Studies of slope stability in terms of total stresses have been developed by WU and KRAFT [1970], TANG, YUCEMEN and ANG [1974], MATSUO and KURODA [1974], DENTE *et al.* [1982], while effective stress analyses have been proposed by YUCEMEN and TANG [1975], YONG *et al.* [1977], TOBUTT and RICHARDS [1979], CHERUBINI *et al.* [1983].

These methods estimate the failure probability, P_f , in terms of the distribution function of the safety factor.

$$P_f = P_F(1) = \text{Prob}(F \leq 1) \quad (1)$$

The different methods used in evaluating this function are characterized by different degrees of accuracy. The most rigorous approach is, however, the analytical one:

$$P_F(a) = \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (2)$$

where x_1, x_2, \dots, x_m are the random variables on which F depends, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ is their joint probability density and D is the set of vectors $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ which verify the relation:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq a \quad (3)$$

In the more commonly-used stability analyses, the sources of uncertainty influencing safety factor estimation are primarily connected with inaccuracies in the analysis method,

* Venanzio Raffaele GRECO - Research engineer - Università della Calabria.

with the variability in pore pressure and soil properties.

Despite limit equilibrium method neglect some important processes as progressive failure, anisotropies, clay softening, these methods are however sufficiently reliable. Finite elements methods, on the other hand, enable the stress state within the slope to be obtained. Nevertheless they are seldom used in probabilistic analyses both because of the work involved and because the results are affected by the number of elements into which slope is subdivided.

A very important element in slope stability analysis is the state and variations in pore pressure [ESU, 1973]. A sensitivity analysis performed by ALONSO [1976] has in fact shown that fluctuations in pore pressure are probably the major source of failure risk in saturated slopes. This is confirmed by BERGADO and ANDERSON [1983] who utilized the finite element method to evaluate failure probability in terms of spatial variation of the parameters pertaining to permeability and shear strength. An interesting study has been recently presented by ALONSO and LLORET [1983], who evaluated the reliability of partially-saturated infinite slopes in terms of random climatic changes, without considering spatial variations in the shear strength parameters. However probabilistic analyses incorporating random temporal variations in pore pressure are still very complicated because even though several probabilistic models on rainfall laws are available, the correlations between rainfalls and piezometric levels have not as yet been evidently investigated. As a result the temporal variations in pore pressure are often disregarded in order to more easily ascertain the influence of other factors.

The last important source of uncertainty concerns the distribution of the geotechnical parameters. Table 1 shows the variation coefficients of c' , $t' = \tan\phi'$ and γ for some soils. It can be inferred from this table that the variability in the unit weight is nearly always sufficiently slight to enable γ to be considered constant and equal to the average value of the sample. The variation in t' and particularly in c' is, on the other hand, so great that it must of necessity be considered. According to MATSUO and KURODA [1974] cohesion would appear to have no correlation with the friction coefficient, but it does have a strong negative correlation when the range of values of the moisture content is restricted. TOBUTT and RI-

CHARD [1979] maintain that a negative correlation between c' and t' is rather unlikely. However, when c' and t' are assumed reciprocally independent there is an increase in the degree of dispersion of the factor F and whenever the expected value of F is higher than unity it also causes P_f to be slightly overestimated.

Where the sample distribution functions of the strength parameters c' and t' are concerned it would appear that cohesion generally follows a log-normal-like distribution, while the testing distributions of the friction coefficient are better approximated by the normal distributions. Nevertheless, it must be remembered that the difference between the normal distribution and the log-normal distribution is very slight when the coefficient of variation is smaller than 10-12% (typical for t').

The main difference between the various methods proposed for probabilistic evaluations of slope stability lies in the choice of the random variables in eq. (2).

Some methods [WU and KRAFT, 1970; TANG *et al.*, 1974; etc.] consider as random variables both the geotechnical parameters and the uncertainties related to those processes such as progressive failure, anisotropies, etc, which are disregarded in limit equilibrium methods. This complicates the problem of inferring the probability density of F . Moreover, it must be pointed out that the probability densities of these uncertainties are still unknown. Since number of random variables and the probable correlations between them are as yet almost completely unknown it is also very difficult to infer P_f exactly. Consequently, it is only possible to obtain an approximate evaluation of the statistical parameters of F (mean value and variance) and an arbitrary probability function has to be assumed to evaluating P_f .

Other methods [MATSUO and KURODA, 1974; FORSTER and WEBER, 1981; DENTE *et al.*, 1982; etc.] consider only those uncertainties related to the spatial variation in the geotechnical parameters thus obtaining a more exact evaluation of P_f within the limits of the hypotheses made. But it has been pointed out [GRECO, 1983] that these analyses seem rather conservative and give much higher values for P_f than the damage frequencies actually observed. This can be attributed to the fact that these methods are based on mathematical models developed for homogeneous soils; consequently, even though the geotechnical parameters may be

considered as random variables, these methods disregard the simultaneous variation of a same parameter within the slope or along the potential slip surface. However, the methods of slices, when correctly used, do enable simultaneous variation in the geotechnical parameters to be considered.

This paper introduces a new method to evaluate slope failure probability which is based on the following hypotheses:

1) the soil is statistically homogeneous, i.e. the probability density of each geotechnical parameter is independent of the point of the slope considered;

2) the only uncertainty considered is that related to the spatial variability of the strength parameters; the dispersion of the unity weight is disregarded and a fixed pore pressure state independent of time is assumed. The parameters c' and t' are assumed reciprocally independent and log-normally distributed.

By using some theorems from the law of large numbers it is proved that when the mean values of the strength parameters are used in limit equilibrium methods there is a high probability that the errors introduced are technically negligible.

A simple numerical procedure enables the probability of slope failure to be easily calculated.

2. Slope failure probability

Among the limit equilibrium methods we refer to the simplified method of BISHOP [1955], although any other method would be equally suitable.

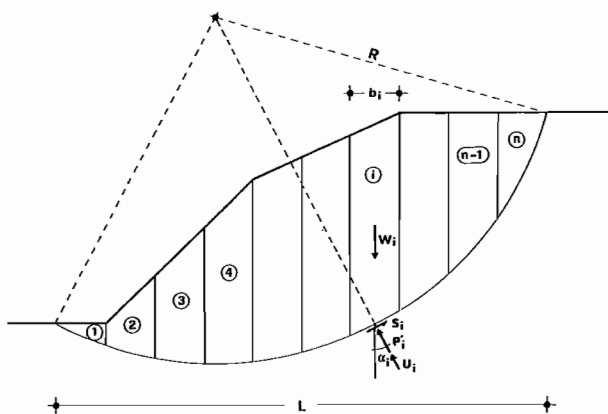


Fig. 1. - Geometry pertaining to a particular slip surface as used in the method of Bishop.

Fig. 1. - Geometria usata nel metodo di Bishop per una particolare superficie di scorrimento.

The safety factor is given by: (fig. 1):

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c'_i b_i + (W_i - U_i)t'_i}{\cos\alpha_i + \sin\alpha_i t'_i/F}}{\sum_{i=1}^n W_i \sin\alpha_i} \quad (4)$$

putting:

$$b_i = b = \text{const.} = L/n \quad (5a)$$

$$c'_i / \sum_{i=1}^n W_i \sin\alpha_i = p_i \quad (5b)$$

$$\frac{(W_i - U_i) t'_i}{\sum_{i=1}^n W_i \sin\alpha_i} = \frac{(g_i - u_i/\cos\alpha_i) b t'_i}{\sum_{i=1}^n W_i \sin\alpha_i} = s_i b \quad (5c)$$

$$\cos\alpha_i + \sin\alpha_i t'_i/F = q_i \quad (5d)$$

eq. (4) becomes:

$$F = \sum_{i=1}^n (p_i/q_i + s_i/q_i) b \quad (6)$$

Since it was assumed that c'_i and t'_i are random variables (r.v.) log-normally distributed and reciprocally independent then p_i and s_i are also random variables log-normally distributed with mean values:

$$M_p = M_{c'} / \sum_{i=1}^n W_i \sin\alpha_i \quad (7a)$$

$$M_{s_i} = M_{t'} (g_i - u_i/\cos\alpha_i) / \sum_{i=1}^n W_i \sin\alpha_i \quad (7b)$$

and coefficients of variation (c.o.v.):

$$V_p = V_{c'} \quad (8a)$$

$$V_{s_i} = V_{t'} \quad (8b)$$

while q_i is well approximated from a log-normal distribution with mean:

$$M_{q_i} = \cos\alpha_i + M_{t'}/F \sin\alpha_i \quad (9a)$$

and c.o.v.:

$$V_{q_i} = (\sin\alpha_i S_{t'}/F) / (\cos\alpha_i + M_{t'}/F \sin\alpha_i) \quad (9b)$$

It is easy verify that the c.o.v. of q_i is less large than that of t'_i .

If we now put:

$$z_i = p_i/q_i, \quad w_i = s_i/q_i. \quad (10)$$

we have:

$$F = \sum_{i=1}^n (z_i + w_i)b \quad (11)$$

The random variables z_i and w_i follow log-normally-like distributions, with mean values:

$$M_{z_i} = (M_{p_i}/M_{q_i}) (1 + V_{q_i}^2) \quad (12a)$$

$$M_{w_i} = (M_{s_i}/M_{q_i}) (1 + V_{p_i}^2) \quad (12b)$$

Since the variables z_i and w_i have finite variances, for any positive constant ε , Markov's theorem of the light law of large numbers yields:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{z_i} \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (13a)$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{w_i} \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (13b)$$

This implies that, if n is sufficiently large, with probability arbitrarily close to unity, the mean of the random variables $z_i L$ does not differ from the mean of its means $M_{z_i} L$, by a quantity larger than ε ; and the mean of random variables $w_i L$ does not differ from the mean of its means, $M_{w_i} L$, by a quantity larger than ε .

Moreover, it is possible to use Kolmogorov's theorem (strong law of large numbers) to find number n' such that for any $n > n'$ the convergence in eq. (13a) and (13b) is always verified, except in some rare cases whose probabilities are zero.

Because the potential number of slices is very large, we may put:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L M_{z_i} \quad (14a)$$

and

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L M_{w_i} \quad (14b)$$

Although equations (14a) and (14b) are not verified exactly for some rare cases they are sufficiently well approximated.

In eq. (12) when $V_{q_i}^2$ is neglected the error introduced is generally between 0.1 and 2 per cent:

$$F = \sum_{i=1}^n (M_{p_i}/M_{q_i} + M_{s_i}/M_{q_i})b \quad (15a)$$

By using expressions (15a), (14), (7) and (9a) in eq. (4) we obtain:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{M_c b + (W_i - U_i) M_t'}{\cos \alpha_i + M_t'/F_s \sin \alpha_i}}{\sum_{i=1}^n W_i \sin \alpha_i} \quad (15b)$$

It is therefore quite justifiable, within the limits of the aforementioned hypothesis and observations, to use expected shear strength values in characterizing the methods of limit equilibrium.

This result may be intuitively explained by the adjustment which occurs between slip surface zones having higher and lower than average shear strength.

From (15) another important observation can be made: the safety is independent of the type and degree of dispersion of the strength parameters. In fact, F is a function of the mean values of the variables c' and t' only. Consequently if these means were known, the safety degree of a strongly heterogeneous slope was not different from that of a perfectly homogenous slope when the value F is the same.

But, although in practice the safety factor depends exclusively upon the expected values of the variables c' and t' , i.e. it is a function of two numbers, not of two random variables, it is not possible to disregard the variation in the strength parameters. Since the expected M_c and M_t' values in situ are unknown, they must be estimated. With this objective in mind, we introduce two auxiliary variables:

$$x = \ln c' \quad \text{and} \quad y = \ln t', \quad (16)$$

which are normally distributed with means:

$$M_x = \ln \frac{M_c}{\sqrt{V_{c'}^2 + 1}} \quad (17a)$$

and

$$M_y = \ln \frac{M_t'}{\sqrt{V_{t'}^2 + 1}}$$

and variances:

$$S_x^2 = \ln(1 + V_{c'}^2) \quad \text{and} \quad S_y^2 = \ln(1 + V_{t'}^2) \quad (17b)$$

TABLE 1
Coefficients of variation of c' , t' and γ for some soils

Author	Soil	Cohesion num. of data	V_c	Friction coeff. num. of data	V_t	Unit weight num. of data	V_γ
LUMB (1966)	Marine clay	0.184					
	London clay	0.162					
	clayey silt	0.316					
	clayey silt	0.259					
	silty sand			0.138			
	clayey silt			0.148			
MATSUO and KURODA (1974)	Horikawabashi clay					35	0.25
	Kisarazu clay					57	0.035
	Neyagawa clay (1)					34	0.023
	Neyagawa clay (2)					43	0.026
	Yasuura clay					114	0.029
	Keihin clay					36	0.020
	Ichiba clay					25	0.031
	Shiogama clay					27	0.037
SCHULTZE (1975)	Sand			50	0.130		
SCHULTZE (1972)	Sand			81	0.073		
TANCREDI (1980)	Variegated clay shales	14	0.10	14	0.46	23	0.05

Let us now denote by \bar{x} and \bar{y} the estimated of M_x and M_y respectively, and by d_x and d_y the estimates of S_x and S_y respectively both of which are obtained from a couple of samples of size N randomly drawn from the populations of the auxiliary variables x and y .

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (18a)$$

$$d_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N-1}} \quad d_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{y} - y_i)^2}{N-1}} \quad (18b)$$

Since M_x and M_y are unknown they can be considered random variables, and since they are means of normally distributed populations, they are t distributed (Student) with $N-1$ degrees of freedom. The distribution functions of the variables M_x and M_y enable us to indirectly obtain those of the variables M_c' and M_t' , on which P_f depends. These variables are in fact those given in equation (2).

In order to define the integration set, D , described in eq. (3), let us consider the eq. (15b) when $F = 1$ (limit equilibrium state). Putting:

$$\frac{\sum_{i=1}^n W_i \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(\cos \alpha_i + M_t' \sin \alpha_i)}} = A(M_t') \quad (19a)$$

and

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{W_i - U_i}{\cos \alpha_i + M_t' \sin \alpha_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\cos \alpha_i + M_t' \sin \alpha_i}} = B(M_c') \quad (19b)$$

we have:

$$M_c' = A(M_t') - B(M_t') M_t' \quad (20)$$

This equation represents the boundary between the safety region, where $F > 1$, and the failure region, D , where $F < 1$ (fig. 3).

The probability of failure is then given by the equation:

$$P_f = \text{Prob} \{ (M_c, M_t) \in D \} \quad (21a)$$

$$P_f = \int_0^{M_{t0}} dM_t \int_0^{A - B M_t} f_{M_c'}(M_c') f_{M_t'}(M_t') dM_c' \quad (21b)$$

where $f_{M_c'}$ (M_c') is the probability density of the random variable M_c' ; $f_{M_t'}$ (M_t') is that of the random variable M_t' ; M_{t0} is the value of M_t' which for $M_c' = 0$ gives $F = 1$.

It is rather difficult in practice to integrate (21) in closed form, even when, for high values of N , the distribution functions of means M_x and M_y are normal-like distributions. Consequently the integral (21) can be solved numerically:

$$P_f = \sum_{(i,j) \in D} \sum f_{M_c'}(i) f_{M_t'}(j) \Delta M_c' \Delta M_t' \quad (22)$$

where $f_{M_c'}(i)$ and $f_{M_t'}(j)$ are the values of the probability density of the variable M_c' and M_t' respectively, computed in the (i,j) point of the definition set D , while $\Delta M_c'$ and $\Delta M_t'$ are the sizes of the (i,j) element into which the set D is subdivided.

In this way it is possible to evaluate the failure probability of a slope in relation to the uncertainties concerning the expected shear strength values.

When the size of the statistical sample is increased altering the probability densities of the variables M_c' and M_t' , which become more and more leptokurtic in form, P_f converges towards 0, when the actual value of F related to the means M_c' and M_t' in situ is greater than unity, or towards 1, when the effective value of F is lower than unity.

On the other hand, when the actual value of F is equal to 1 there is no convergence to any of the extreme values (0 or 1), and when F proves very close to 1 convergence can be extremely slow.

3. Application

The probabilistic method proposed is illustrated by an application to the slope represented in fig. 2. In fig. 3 the integration set D is also defined.

Supposing that there are three cohesion va-

lues available ($\bar{c}' = 125$ kPa, $V_c = 0.3$) and as many friction coefficient values ($\bar{t} = 0.25$, $V_t = 0.2$) and that the samples distributions of the variables, c' and t' , follow log-normal distributions, it is possible to evaluate the probability densities of the expected values, M_x and M_y , which are indicated in fig. 3.

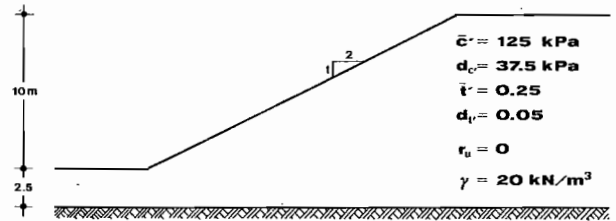


Fig. 2. - Cross-section and geotechnical parameters of a slope.

Fig. 2. - Sezione trasversale e parametri geotecnici di un pendio.

$$f_{M_x}(M_x) = \frac{\sqrt{N} C_N / S_x}{\left[1 + \frac{N}{N-1} \left(\frac{\bar{x} - M_x}{S_x} \right)^2 \right]^{N/2}} \quad (23)$$

$$f_{M_y}(M_y) = \frac{\sqrt{N} C_N / S_y}{\left[1 + \frac{N}{N-1} \left(\frac{\bar{y} - M_y}{S_y} \right)^2 \right]^{N/2}}$$

where

$$C_N = \frac{1}{\sqrt{\pi(N-1)}} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} \quad (24)$$

and

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} v^{a-1} e^{-v} dv \quad (25)$$

By using eq. (22), (23), (24) and (25) the evaluation of P_f is about 7.1%. But when the cohesion and the friction coefficient values are increased to ten, the probability of failure is reduced to about 0.04%. It is easy to observe that in this case the increase in data produces a convergence of the failure probability towards the extreme value 0. Fig. 4 shows the estimated values of P_f for some values of N .

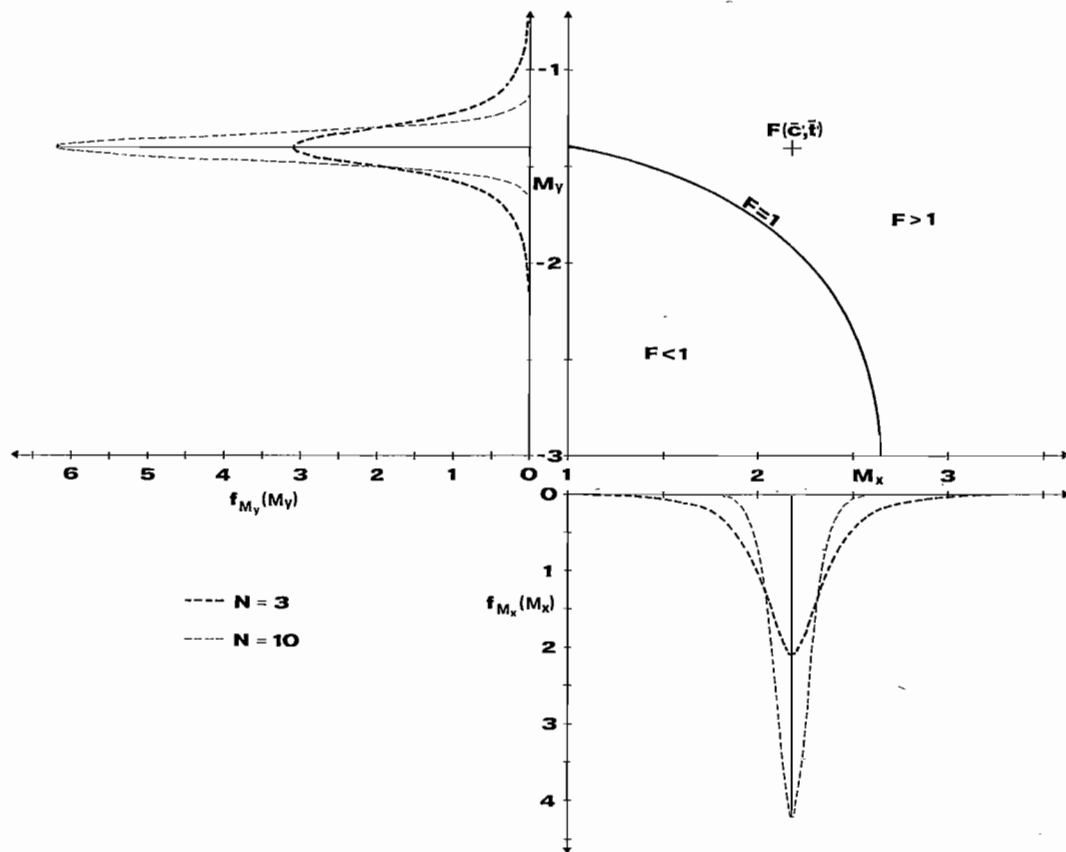


Fig. 3. - Integration set D and marginal probability densities of the random variables M_x and M_y for the slope shown in fig. 2.

Fig. 3. - Insieme di integrazione D e densità di probabilità marginali delle variabili aleatorie M_x ed M_y per il pendio rappresentato in fig. 2.

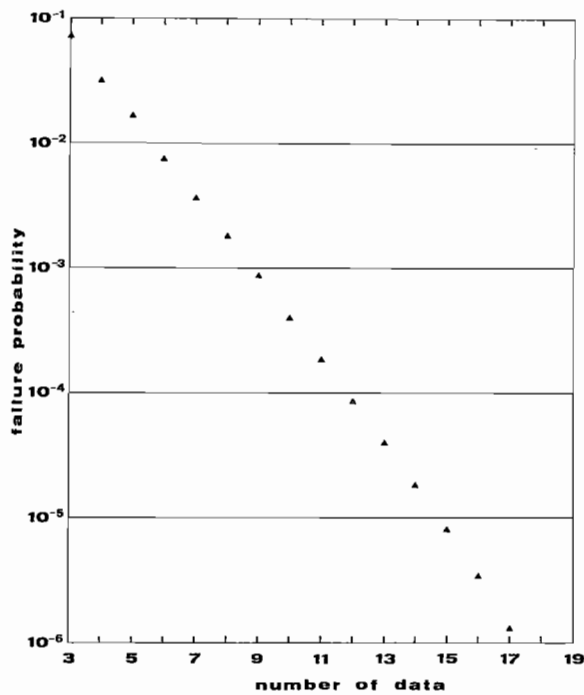


Fig. 4. - Relationship between number of data and failure probability for slope in fig. 2.

Fig. 4. - Relazione tra numero di dati e probabilità di rottura per il pendio in fig. 2.

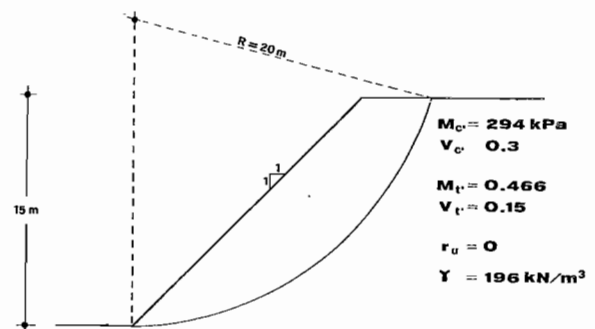


Fig. 5. - Cross-section of slope and geotechnical parameters used in the application example.

Fig. 5. - Sezione trasversale del pendio a parametri geotecnici.

The simplification introduced into eq. (12), which justifies using the expected values of the strength parameters only causes slight errors in computing F . For example, when applying the simplified method of Bishop to the slope in fig. 5 and when the potential slide is subdivided into 193 vertical slices, by using the mean values in eq. (15), the value obtained for the safety factor differs from that calculated by

using the values in eq. (12) by approximately 0.5% only (1.2487 instead of 1.2554). It must also be pointed out that the smaller the coefficient of variation of t' , the smaller this difference becomes.

4. Conclusions

This paper presents a new method for evaluating the failure probability of slopes. This method is based on the following hypotheses:

- 1) the soil is statistically homogeneous;
- 2) only the spatial variations in the cohesion, c' , and the friction coefficient, $t' = \tan \phi'$, are considered. The parameters c' and t' are supposed reciprocally independent and log-normally distributed. The spatial variation in unity weight and the temporal one in pore pressure are both neglected.

It can be seen that some important causes of error are neglected. For example, the samples tested do not always satisfactorily represent the local heterogeneity conditions; the conventional geotechnical tests are not altogether reliable, the shear strength can vary in time, the failure can be progressive, the pore pressure vary in time, ecc. However, it is still rather difficult to take all these factor into account since their statistical error distributions are unknown.

On the basis of the afore mentioned hypotheses and some theorems from the law of large numbers it is proved that the use of the mean values of the shear strength parameters in characterizing limit equilibrium methods, is, in practice, fully justified, since the errors introduced are fairly negligible.

This is due to an adjustment effect between the slip surface zones having higher than average and lower than average strength.

The random variables considered are therefore the means of c' and t' . In fact, these means are unknown in situ. The procedure for evaluating the failure probability is developed in easy numerical form in terms of these variables.

According to this method, when the static condition of the slope is not very close to that of limit equilibrium, the probability of failure, P_f , converges towards one of the extreme values (0 or 1) when the strength test number is suitable increased.

An increase in the size of the testing sample size can, on the other hand, produce either a slow convergence (when $F \approx 1$), or none at all (when $F = 1$).

A comparison with other probabilistic methods for slope analyses is not easy, since the random variables assumed are different. Nevertheless, the failure probability estimated by this method are smaller than those obtained by others and seem to better reflect the damage frequencies observed.

NOTATION

x	generic random variable (r.v.);
$P_x(a)$	value of probability function of r.v. x for $x = a$;
$f_x(a)$	value of probability density of r.v. x for $x = a$;
M_x	expected value of the population of the generic r.v. x ;
S_x	standard deviation of the population of the general r.v. x ;
F	safety factor;
P_f	failure probability;
c'_i	cohesion along the base of slice i -th; random variable log-normally distributed with mean $M_{c'_i}$ and standard deviation $S_{c'_i}$;
$t'_i = \tan \phi'_i$	friction coefficient along the base of slice i -th; random variable log-normally distributed with mean $M_{t'_i}$ and standard deviation $S_{t'_i}$;
n	number of slice in which is subdivided the potential slide;
W_i	total weight of slice i -th;
U_i	force exerted by the pore pressure on the base of slice i -th;
P'_i	effective normal force acting on the base of slice i -th;
S_i	shear force acting along the base of the slice i -th;
α_i	angle of base of slice i -th at horizontal;
b_i	width of slice i -th;
N	number of available measurements of cohesion and friction coefficient;
\bar{x}	estimate of M_x obtained through a sample of size N ;
d_x	estimate of S_x .

REFERENCES

- ALONSO E. E. (1976) - *Risk Analysis of Slopes and its Application to Slope in Canadian Sensitive Clays*. Geotechnique, vol. 26, pp. 453-472.
- ALONSO E. E., LLORET A. (1983) - *Evolution in Time of the Reliability of Slopes in Partially Saturated Soils*. Proc. IV I.C.A.S.P. (Firenze), vol. 2, pp. 1364-1376.

- BISHOP A. W. (1955) - *The Use of Slip Circles in the Stability of Slopes*. Geotechnique, vol. 5, pp. 7-17.
- BISHOP A. W., MORGENSTERN R. N. (1963) - *Stability Coefficients for Earth Slopes*, Geotechnique, vol. 13, pp. 129-150.
- BERGADO D. T., ANDERSON L. R. (1983) - *Stochastic Analysis of Earth Slopes*. Proc. IV I.C.A.S.P. (Firenze), vol. 2, pp. 1377-1388.
- CHERUBINI C., COTECCHIA V., RENNA G., SCHIRALDI B. (1983) - *The use of Bivariate Probability Density Functions in Monte Carlo Simulation of Slope Stability in Soils*. IV I.C.A.S.P. (Firenze), vol. 2, pp. 1401-1411.
- DENTE G., ESPOSITO L., GRECO V. R. (1982) - *Probabilità di rottura a breve termine dei pendii*. RIG, vol. 16, pp. 83-91.
- ESU F. (1973) - *Effetti dell'acqua sulla stabilità dei pendii*. XI Conv. Naz. Geotecnica (Milano).
- FORSTER W., WEBER E. (1981) - *Influences on the Probability of Failures of Slopes*. Proc. X I.C.S.M.F.E. (Stockolm), vol. I, pp. 127-130.
- GRECO V. R. (1983) - *Una analisi probabilistica della stabilità dei fronti di scavo verticali non sostenuti*. XV Conv. Naz. Geotecnica (Spoleto), vol. II, pp. 163-172.
- HARR M. E. (1977) - *Mechanics of Particulate Media. A Probabilistic Approach*. Mc Graw-Hill, New York.
- LUMB P. (1966) - *The variability of Natural Soil*. Canad. Geot. J., vol. 3, pp. 74-97.
- MATSUO M., KURODA K. (1974) - *Probabilistic Approach to Design of Embankments*. Soils & Found., vol. 14, pp. 1-17.
- MOSTYN G. (1983) - *A Statistical Approach to Characterizing the Permeability of a Mass*. Proc. IV I.C.A.S.P. (Firenze), vol. 2, pp. 1031-1042.
- SCHULTZE E. (1972) - *Frequency Distributions and Correlations of Soil Properties*. Proc. I I.C.A.S.P. (Hong Kong), pp. 371-387.
- SCHULTZE E. (1975) - *The General Significance of Statistics for the Civil Engineer*. Proc. II I.C.A.S.P. (Aachen), vol. 3, pp. 23-38.
- SIMONS H. (1979) - *Statistics, Reliability Theory and Safety Factors*. VII Eur. Conf. S.M.F.E. (Brighton), vol. 5, pp. 81-90.
- TANCREDI G. (1980) - *Applicazione dei metodi probabilistici alle verifiche di stabilità dei pendii*. XIV Conv. Naz. Geotecnica (Firenze), vol. 2, pp. 283-291.
- TANG W. H., YUCEMEN M. S., ANG A. H.-S. (1976) - *Probability-based short Term Design of Soil Slopes*. Canad. Geot. J., vol. 13, pp. 201-215.
- TOBUTT D. C., RICHARDS E. A. (1979) - *The Reliability of Earth Slopes*. Int. J. of Num. Anal. Meth. Geomech., vol. 3, pp. 323-354.
- WU T. H., KRAFT L. M. (1970) - *Safety Analysis of Slopes*. J. of Soil Mech. Found. Div. A.S.C.E., vol. 96, pp. 609-630.
- YONG R. N., ALONSO E. E., TABBA M. M., FRANSHAM P. B. (1977) - *Application of Risk Analysis to the Prediction of Slope Instability*. Canad. Geot. J., vol. 14, pp. 540-553.
- YUCEMEN M. S., TANG W. H. (1975) - *Long-term Stability of Slopes. A Reliability Approach*. II I.C.A.S.P. (Aachen), vol. 2, pp. 215-229.

RIASSUNTO

Analisi stocastica della stabilità dei pendii

In questa nota viene presentato un nuovo metodo per la valutazione della probabilità di rottura dei pendii, basato sulla legge dei grandi numeri.

L'usuale approccio ai problemi di stabilità dei pendii attraverso il metodo dell'equilibrio limite consente una valutazione del grado di sicurezza dei pendii in maniera semplice e poco onerosa.

L'analisi viene sviluppata definendo il coefficiente di sicurezza, F , come quel fattore con cui la resistenza a taglio disponibile deve essere ridotta affinché sia eguale a quella mobilitata lungo una assegnata superficie potenziale di rottura. Se la distribuzione spaziale dei parametri geotecnici nel terreno fosse nota (e se il sistema fisico fosse esattamente descritto) sarebbe sufficiente che il coefficiente F fosse di pochissimo maggiore dell'unità affinché il pendio risultasse in condizioni di equilibrio stabile. In realtà, la conoscenza delle caratteristiche del terreno è ristretta a pochi dati, mediante i quali è possibile dedurre solo una stima degli effettivi parametri del terreno.

Ne derivano due fondamentali problemi. Mentre, infatti, da una parte, ci si trova nella necessità di dover caratterizzare il modello matematico con opportuni valori dei parametri geotecnici, dall'altra, si comprende come il coefficiente di sicurezza calcolato con tali parametri arbitrari possa differire da quello reale di una quantità imprecisata.

Nell'approccio deterministico questi due problemi sono affrontati usando dei valori rappresentativi fissati (in genere, i valori medi) per quanto riguarda i parametri geotecnici e richiedendo per F valori superiori a quelli strettamente necessari per la stabilità.

È possibile cogliere facilmente le insufficienze di questo approccio osservando che i valori medi sono solo indici di posizione e non contengono alcuna informazione sul grado di variabilità dei parametri. Daltro canto, è noto dalla letteratura che molte frane si sono verificate in pendii per i quali erano stati calcolati valori di F superiori all'unità. Quest'ultima circostanza suggerisce che anche un pendio con un F calcolato maggiore dell'unità possa essere interessato dalla rottura.

Recentemente una risposta assai più soddisfacente a questi problemi è venuta con l'introduzione e lo sviluppo di analisi basate sull'approccio statistico-probabilistico. Studi di analisi di stabilità dei pendii in tensioni totali sono stati sviluppati da WU e KRAFT [1970], TANG, YUCEMEN e ANG [1974], MATSUO e KURODA [1976], DENTE *et al.* [1982], mentre analisi in tensioni effettive sono state proposte da YUCEMEN e TANG [1975], YONG *et al.* [1977], TOBUTT e RICHARDS [1979], CHERUBINI *et al.* [1983].

In questi metodi la valutazione della probabilità di rottura, P_r viene effettuata in relazione alla funzione di distribuzione del coefficiente di sicurezza (eq. 1).

Questa funzione può, tuttavia, essere valutata in differenti modi, caratterizzati da diverso rigore matematico. L'approccio più corretto è, comunque, quello analitico (eq. 2), in cui x_1, x_2, \dots, x_m sono le diverse variabili aleatorie (v.a.) da cui F dipende.

I fattori di incertezza che negli usuali metodi di stabilità influenzano la valutazione del coefficiente di sicurezza sono essenzialmente legati alle imprecisioni dei modelli di analisi, alla variabilità delle pressioni neutre, alla dispersione delle proprietà dei materiali.

Quantunque i metodi dell'equilibrio limite trascurino molti importanti fenomeni come la rottura progressiva, il softening delle argille, le anisotropie, ecc., essi si sono rivelati sufficientemente affidabili. Le analisi con il metodo degli elementi finiti, che permettono di conoscere lo stato tensionale all'interno del pendio, sono poco usati nelle analisi probabilistiche in quanto richiedono un maggiore sforzo di calcolo e, soprattutto, i loro risultati sono fortemente influenzati dal numero di elementi in cui il pendio è suddiviso.

Nell'analisi di stabilità dei pendii un fattore importantissimo è costituito dallo stato e dalle variazioni delle pressioni neutre [ESU, 1973]. A questo proposito, una analisi di sensibilità condotta da ALONSO [1979] per pendii saturi ha evidenziato come le fluttuazioni delle pressioni neutre siano, probabilmente, la maggiore causa del rischio di rottura. Quest'asserzione è avvalorata da BERGADO e ANDERSON [1983], che hanno valutato la probabilità di rottura di pendii con il metodo degli elementi finiti in rapporto

alle incertezze circa la variabilità spaziale della permeabilità e della resistenza a taglio. Recentemente uno studio molto interessante è stato presentato da ALONSO e LLORET [1983], che hanno analizzato la stabilità in termini probabilistici di pendii indefiniti parzialmente saturi in rapporto alla variabilità delle precipitazioni, senza, però, prendere in conto la variabilità spaziale della resistenza a taglio. C'è, tuttavia, da osservare che le analisi probabilistiche che esaminano la variabilità temporale delle pressioni neutre sono, tuttora, difficili da formularsi, anche a causa delle difficoltà di correlare le cadute di pioggia in una certa area con i livelli piezometrici. Di conseguenza spesso si preferisce trascurare la variabilità temporale delle pressioni neutre, soprattutto per poter analizzare più facilmente l'influenza di altri fenomeni.

L'ultimo importante fattore di incertezza riguarda la dispersione dei parametri geotecnici. Nella tabella 1 sono stati riportati i coefficienti di variazione (rapporto tra lo scarto quadratico medio e la media) di c' , $t' = \tan \phi'$ e γ . Da questa tabella si deduce che la variabilità del peso dell'unità di volume è quasi sempre così contenuta da poterla trascurare. Quella di t' e, soprattutto, quella di c' , sono, al contrario, tali da essere prese in considerazione. In generale, sembrerebbe che la coesione non sia correlata con il coefficiente di frizione [MATSUO e KURODA, 1974; TOBUTT e RICHARDS, 1979]. Per quanto concerne le loro funzioni di distribuzione, la coesione appare seguire leggi di tipo log-normale, mentre le distribuzioni sperimentali del coefficiente di frizione sono, spesso, approssimate da distribuzioni normali. C'è, comunque, da rilevare che per coefficienti di variazione (c.o.v.), come sono appunto quelli di t' , non c'è apprezzabile differenza tra le approssimazioni con distribuzione normali e log-normali.

La principale differenza tra i vari metodi probabilistici proposti risiede nella scelta delle variabili aleatorie nell'eq. (2).

Alcuni metodi [WU e KRAFT, 1970; TANG *et al.*, 1974; ecc.] tengono conto sia della variabilità dei parametri geotecnici, sia le altre incertezze connesse con l'uso del metodo dell'equilibrio limite (rottura progressiva, anisotropia, ecc.). Questa estensione comporta, però, notevoli difficoltà nel dedurre la funzione di distribuzione di F , tanto più che, al presente, le funzioni di distribuzione degli errori connessi a tali incertezze e le loro probabili correlazioni sono quasi del tutto sconosciute. Di conseguenza, questi metodi si avvalgono di valutazioni approssimate dei parametri statistici di F (media e varianza) e dell'assunzione di un tipo arbitrario di funzione di distribuzione di F da cui dedurre P_r .

Altri metodi [MATSUO e KURODA, 1974; FORSTER e WEBER, 1981; DENTE *et al.*, 1981; ecc.] considerano solo le incertezze derivanti dalla variabilità spaziale dei parametri geotecnici ottenendo una più corretta valutazione della P_r nei limiti delle ipotesi su cui sono basati. Ma, come è stato osservato [GRECO, 1983], queste analisi, spesso, forniscono per P_r valori chiaramente più elevati delle frequenze di danno osservate. Il motivo risiede nel fatto che questi metodi impongono implicitamente che ognuno dei parametri geotecnici, sebbene sia una v.a., assuma lo stesso valore per tutto il terreno costituente il pendio.

In questo articolo viene presentato un metodo per la valutazione della probabilità di rottura che consente di tenere in conto la contemporanea variabilità dei parametri geotecnici da punto a punto. Tale metodo è basato sulle seguenti ipotesi:

1) il terreno è statisticamente omogeneo, nel senso che la funzione di probabilità di ognuno dei parametri geotecnici è indipendente dal particolare punto del pendio;

2) le uniche variabili aleatorie sono la coesione, c' , e il coefficiente di frizione, t' , assunte tra loro indipendenti e distribuite log-normalmente; la variabilità spaziale del peso dell'unità di volume del terreno e quella temporale delle pressioni neutre non sono prese in considerazione.

Tra i metodi dell'equilibrio limite faremo riferimento al metodo semplificato di BISHOP [1955], senza con questo voler attribuire un carattere restrittivo alla trattazione. Il coefficiente di sicurezza è dato nell'eq. (4) con le indicazioni in fig. 1.

Facendo le posizioni da (5a) a (10) F viene dato dalla (11), ove le v.a. z_i e w_i sono distribuite log-normalmente con medie date dalle (12).

Poiché le v.a. z_i e w_i hanno variante finite, per il teorema di Markov (legge debole dei grandi numeri), per ogni costante $\epsilon > 0$, piccola a piacere, se n è sufficientemente grande, con probabilità arbitrariamente vicina ad 1, la media delle n variabili aleatorie z_i/L non differisce dalla media delle loro medie, LM_{z_i} , per una quantità maggiore di ϵ e la media delle n variabili aleatorie w_i/L non differisce dalla media delle loro medie, M_{w_i}/L , per una quantità maggiore di ϵ .

Inoltre, per il teorema di Kolmogorov (legge forte dei grandi numeri) è possibile trovare un n' tale che per ogni $n > n'$ la convergenza nelle eq. (13) è sempre verificata, eccetto in un insieme numerabile di casi.

Poiché il numero di strisce può essere grande a piacere, potremo porre le condizioni (14a) e (14b), con l'osservazione che esse non sono esattamente verificate, ma, eccetto in rari casi, esse sono sufficientemente approssimate.

Usando le eq. (15a), (14), (7) e (9a) nell'eq. (4) avremo la eq. (15b), in cui alle v.a. c'_i e t'_i sono state sostituite le loro medie, $M_{c'}$ ed $M_{t'}$.

In effetti, però, tali medie non sono note (semmai sono note le loro stime ricavate da una serie di campioni) e rappresentano le v.a. nell'eq. (2).

Se introduciamo le posizioni $x = \ln c'$ e $y = \ln t'$, le v.a. ausiliarie x e y sono distribuite normalmente con parametri collegati a quelli delle v.a. c'_i e t'_i attraverso le (17a) e (17b), ove M_x ed M_y sono ancora v.a. che (per essere medie di v.a. normali) sono distribuite con legge di Student con $N-1$ gradi di libertà, ove N è il numero di dati disponibili per c'_i e t'_i . In tal modo le densità di probabilità delle v.a. nell'eq. (2) sono note.

Resta da definire il dominio D , costituito dalle coppie di valori (M_x, M_y) , ovvero $(M_{c'}, M_{t'})$, in corrispondenza delle quali F assume valori minori di 1. A tal proposito è agevole determinare la frontiera di tale dominio ponendo $F = 1$ nell'eq. (15b) facendo le ulteriori posizioni (18) e (19) e ottenendo la (20).

La probabilità di rottura viene, allora, valutata sviluppando l'integrale (2) nella forma (21b) o, nella più agevole forma numerica (22).

La valutazione della probabilità di rottura dipende dal grado di dispersione delle v.a. c' e t' e dal numero dei dati disponibili di coesione ed angolo di attrito. Se la condizione statica del pendio è lontana dalle condizioni di equilibrio limite ($F = 1$), all'aumentare del numero dei dati disponibili, si ha una convergenza (in probabilità, per il teorema di Markov, e « quasi certa », secondo il teorema di Kolmogorov) verso uno dei valori estremi (0 o 1). Tale convergenza sarà tanto più lenta quanto più ci si troverà vicini alla condizione di equilibrio limite.

Conclusioni

In questo lavoro viene presentato un nuovo metodo di valutazione della probabilità di rottura basato sulle seguenti ipotesi:

1) il terreno è statisticamente omogeneo;

2) viene presa in esame la sola variabilità dei parametri di resistenza a taglio, c' e $t' = \tan \phi'$, assunti tra loro indipendenti e log-normalmente distribuiti, mentre la variabilità spaziale del peso dell'unità di volume e quella nel tempo delle pressioni neutre sono trascurate.

In tali ipotesi sono trascurate anche alcune importanti cause di errore, come la non rappresentatività dei campioni sottoposti a prova in relazione alla presenza di eterogeneità localizzate, la affidabilità delle prove geotecniche, la variabilità nel tempo della resistenza, la rottura progressiva, ecc. Ma, al presente, non è facile ottenere una valutazione affidabile della probabilità di rottura in relazione a questi fattori, in quanto le loro distribuzioni di errore non sono note.

Sulla base delle anzidette ipotesi e di alcuni teoremi della legge dei grandi numeri viene dimostrato che l'uso dei valori medi di resistenza a taglio, per caratterizzare i metodi dell'equilibrio limite, è, in pratica, pienamente giustificato, in quanto comporta errori del tutto trascurabili.

Questa circostanza è dovuta ad un effetto di compensazione che si stabilisce tra le zone della superficie di rottura con una resistenza maggiore di quella media e le zone con una resistenza inferiore a quella media.

Le variabili aleatorie coinvolte nel problema sono, al-

lora, le medie di c' e t' . Tali medie in sito non sono, infatti, note se non in probabilità. La procedura per valutare la probabilità di rottura è, dunque, sviluppata in rapporto a queste due variabili, attraverso una semplice formulazione numerica.

Secondo il metodo qui proposto, se le condizioni statiche del pendio non sono molto prossime a quelle di equilibrio limite ($F = 1$), la probabilità di rottura, P_r , converge verso uno dei valori estremi (0 o 1), all'aumentare del numero di dati.

Al contrario, l'aumento dei dati può comportare una convergenza assai lenta se $F \approx 1$, o nessuna convergenza se $F = 1$.

Un esame comparativo dei risultati di questo metodo con quelli di altri metodi probabilistici non è facile a causa delle differenti variabili aleatorie prese in esame. Ciò non di meno, le valutazioni delle probabilità di rottura ottenute con questo metodo sono più contenute di quelle ottenute con alcuni altri metodi e sembrano più vicine alle frequenze di danno osservate.