

Il coefficiente di carico limite N_γ

P. DE SIMONE *, M. RESTAINO **

SOMMARIO: Viene determinato il coefficiente di carico limite N_γ sia per fondazione liscia che per fondazione rugosa mediante il metodo delle caratteristiche.

Si mostra che la zona di transizione di Prandtl si riduce ad una striscia di spessore trascurabile, ma che la sua presenza è comunque necessaria per una corretta soluzione del problema.

Viene riscontrato un sorprendente accordo tra i risultati ottenuti nello studio presente, e quelli ricavati in precedenza nell'ipotesi di tensioni distribuite con legge omotetica. Si mostra che tale accordo dipende dal fatto che l'omotetia non è un'ipotesi, bensì una proprietà dello stato tensionale in esame.

1. Introduzione

Il calcolo del carico limite delle fondazioni superficiali viene in genere effettuato utilizzando l'ipotesi di sovrapposizione tra gli effetti del sovraccarico γD , della coesione c e del peso proprio γ , come proposto da TERZAGHI [1943]. Diversi Autori [LUNDGREN, MORTENSEN, 1953; HANSEN, CHRISTENSEN, 1969; SALENÇON, FLORENTIN, GABRIEL, 1976; DE SIMONE, 1983a; 1985] hanno infatti mostrato che ciò conduce ad un errore a vantaggio di sicurezza, al più dell'ordine del 20-30%.

Nel caso semplice di fondazione nastriforme con carico limite verticale e piano di posa e campagna orizzontali, la formula di sovrapposizione si scrive [TERZAGHI, 1943]:

$$q_{ult} = N_q \gamma D + N_c c + N_\gamma \gamma \frac{B}{2} \quad (1)$$

dove B è la larghezza della fondazione ed N_q , N_c ed N_γ coefficienti di carico limite, funzione essenzialmente dell'angolo di attrito ϕ . Tali coefficienti sono stati ottenuti da vari Studiosi utilizzando direttamente metodi di stato ultimo (modello rigido-plastico). Solo in tempi recentissimi il problema è stato affrontato anche come fase ultima di tutto il processo di deformazione del sottosuolo, per via incrementale.

Nell'ambito del primo gruppo di metodi, di cui esclusivamente ci si occupa in questa nota, PRANDTL [1920] e REISSNER [1924], utilizzando il metodo delle caratteristiche, hanno ricavato

le espressioni analitiche rigorose per N_c ed N_q :

$$N_c = \left[\frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} \exp(\pi \tan\phi) - 1 \right] \cot\phi \quad (2)$$

$$N_q = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} \exp(\pi \tan\phi) \quad (3)$$

La semplice relazione che sussiste tra di essi ($N_c = (N_q - 1) \cot\phi$) è una diretta conseguenza del teorema degli stati corrispondenti di CAQUOT [1934].

Successivamente SHIELD [1953] ha mostrato che la (3) (e quindi la (2)) è la corretta soluzione del problema anche dal punto di vista dell'analisi limite, beninteso nell'ipotesi di normalità.

Qualche incertezza, viceversa, sussiste ancora in letteratura sul coefficiente di carico limite N_γ .

Tralasciando le deduzioni fondate sull'applicazione dei metodi dell'equilibrio limite, ed anche l'applicazione del metodo cinematico dell'analisi limite [CHEN, 1975] da cui risultano limiti superiori eccessivamente elevati, si prendono in esame i risultati ottenuti integrando le equazioni indefinite dell'equilibrio plastico. Ciò è stato fatto da alcuni Autori [LUNDGREN, MORTENSEN, 1953; SOKOLOVSKII, 1965; HANSEN CHRISTENSEN, 1969; SALENÇON, FLORENTIN, GABRIEL, 1976] introducendo l'ipotesi di stato tensionale omotetico, e cioè proporzionale in ogni punto alla distanza dallo spigolo della fondazione, mentre altri [LARKIN, 1968; GRAHAM, STUART, 1971] hanno risolto il problema col metodo delle caratteristiche, senza alcuna ipotesi aggiuntiva, ricercando però N_γ mediante un procedimento di limite.

* Prof. Ing. Pasquale DE SIMONE, Associato di Principi di Geotecnica, Università di Napoli.

** Dott. Ing. Michele RESTAINO, Libero Professionista.

Nella presente nota il problema del coefficiente N_r viene affrontato col metodo delle caratteristiche in via diretta, sia per fondazione liscia che perfettamente rugosa, esaminando la problematica numerica connessa alla risoluzione del problema con la tecnica delle differenze finite. Viene quindi mostrato che l'ottimo accordo dei risultati ottenuti con quelli ricavati in precedenza con l'ipotesi di omotetia dipende dal fatto che in realtà questa non è un'ipotesi, bensì una *proprietà* dello stato tensionale in studio.

2. Equazioni reggenti

Il problema del carico limite di una fondazione nastriforme su un mezzo di Coulomb ($\varphi \neq 0, c = 0$), è retto dalle due condizioni indefinite dell'equilibrio piano:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma \quad (4b)$$

con gli assi x ed y come mostrato in fig. 1, e dalla condizione di plasticizzazione di Coulomb:

$$\sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \varphi \quad (5)$$

Esprimendo le componenti di tensione mediante la tensione media $p = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ e l'angolo $\theta = \widehat{\sigma_1 x}$, e sostituendo la (5) nelle (4) si ottiene il sistema di equazioni di tipo quasi-lineare:

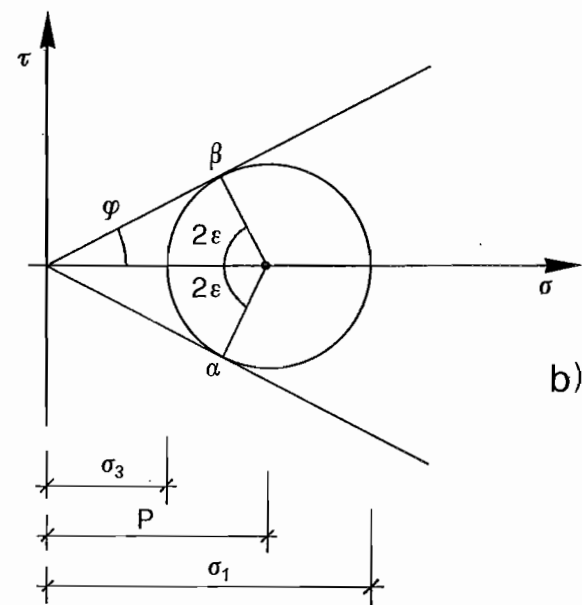
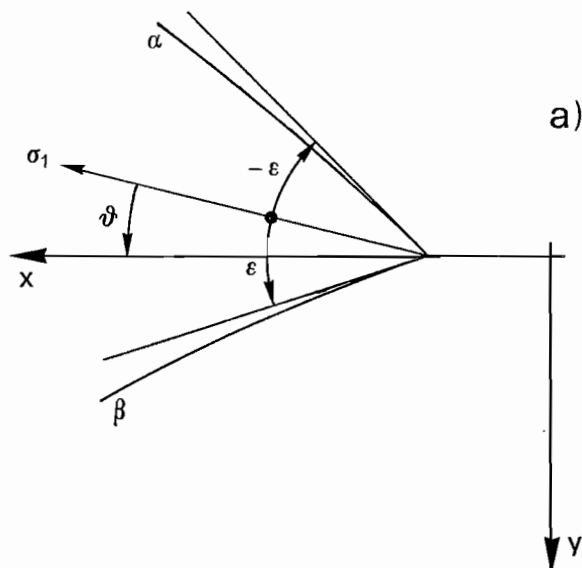


Fig. 1. - Curve caratteristiche α e β nel piano x, y (a) e nel piano σ, τ (b).

$$\frac{\partial p}{\partial x} (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) + \frac{\partial p}{\partial y} (-\sin \varphi \sin 2\theta) + \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} (-2p \sin \varphi \sin 2\theta) + \frac{\partial \theta}{\partial y} (-2p \sin \varphi \cos 2\theta) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} (-\sin \varphi \sin 2\theta) + \frac{\partial p}{\partial y} (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) + \quad (6b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} (-2p \sin \varphi \cos 2\theta) + \frac{\partial \theta}{\partial y} (2p \sin \varphi \sin 2\theta) = \gamma$$

Tale sistema ammette le due famiglie di curve caratteristiche reali e distinte α e β (vedi ad es. DE SIMONE, 1983a):

$$\frac{dy}{dx} = \tan(-\theta \mp \varepsilon) \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} 2p \tan \varphi = -\gamma \left[\frac{\partial x}{\partial s_\alpha} \tan \varphi - \frac{\partial y}{\partial s_\alpha} \right] \quad (8a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s_\beta} - \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} 2p \tan \varphi = \gamma \left[\frac{\partial x}{\partial s_\beta} \tan \varphi + \frac{\partial y}{\partial s_\beta} \right] \quad (8b)$$

Nel piano s_α, s_β il problema è quindi retto dalle quattro equazioni (7) e (8) nelle quattro incognite x, y, θ, p .

3. Risoluzione delle equazioni

La determinazione del carico limite di una fondazione superficiale mediante il metodo delle caratteristiche viene fatta risolvendo successivamente i tre problemi di Cauchy, di Riemann e di Goursat (vedi DE SIMONE, 1983b). Nel caso più generale di sovraccarico $\gamma D \neq 0$, a partire dai valori di $p = \gamma D / (1 - \sin \varphi)$ e $\theta = 0$ lungo la linea AB (fig. 2), si integrano le equazioni (7) ed (8) in tutto il dominio ABC (problema di Cauchy). Quindi dai valori di p e θ lungo AC e nel punto singolare A (caratteristica β degenerata), si ottiene lo stato tensionale in tutto il dominio ACD (problema di Riemann degenerato). Infine noti p e θ lungo AD e θ lungo AE si determina lo stato tensionale

dove $\varepsilon = \pi/4 - \varphi/2$, ed è quindi iperbolico.

Introducendo le ascisse curvilinee s_α ed s_β lungo le due famiglie di curve caratteristiche (7) (vedi fig. 1), si può riscrivere il sistema reggente rispetto a tali coordinate:

nale anche nel terzo dominio (problema di Goursat). A tal proposito si osserva che se la fondazione è liscia, AE è pari alla semi larghezza $B/2$ (fig. 2a), e lungo essa risulta $\theta = \pi/2$, mentre nel caso di fondazione perfettamente rugosa il punto E viene ricercato imponendo che la caratteristica α EF intersechi l'asse di simmetria nel punto F sotto un angolo ε (fig. 2b); il valore di θ lungo AE risulta questa volta pari a $\pi - \varepsilon$.

3.1. Problema di Cauchy: soluzione analitica

Il problema di Cauchy è di soluzione immediata, ed ammette per soluzione lo stato passivo di Rankine: $\theta=0, p=\gamma(D+y)/(1-\sin\varphi)$. Tale soluzione, infatti, soddisfa tanto alle equazioni reggenti che alle condizioni assegnate sul contorno AB; si tratta inoltre della sola soluzione del problema, dal momento che esso risulta ben posto nel senso di Hadamard (vedi DE SIMONE, 1983a).

Nel caso in esame, essendo $\gamma D = 0$, risulta $p = \gamma y / (1 - \sin \varphi)$. L'indeterminatezza che sembra esistere in tal caso per θ lungo i punti della lena iniziale AB, può essere facilmente rimossa, considerando la condizione di sovraccarico nullo ottenuta da quella di sovraccarico $\gamma D \neq 0$, per $\gamma D \rightarrow 0$: risulta così $\theta = 0$.

3.2. Problemi di Riemann e di Goursat: risoluzione numerica mediante le differenze finite

Non altrettanto semplice si presenta l'integrazione del sistema reggente nei due domini successivi di Riemann e di Goursat:

La strada qui seguita è quella delle differenze finite; la procedura è analoga a quella adottata da SOKOLOVSKII [1965] per la deforma-

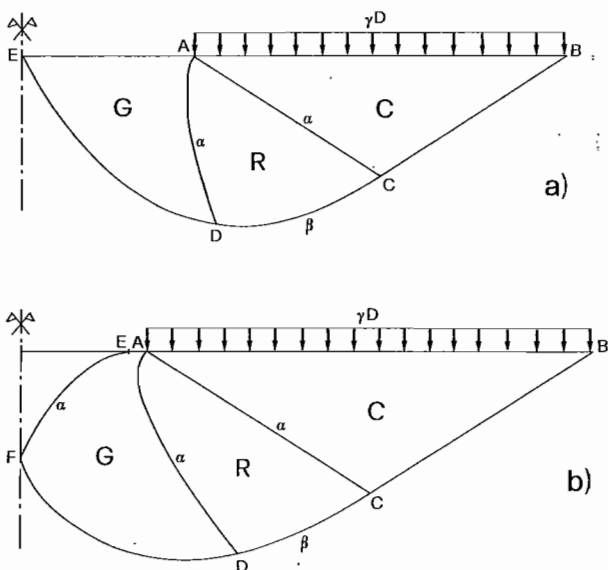


Fig. 2. - Domini di Cauchy (C), Riemann (R) e Goursat (G) per fondazione liscia (a) e rugosa (b).

zione piana e da COX, EASON, HOPKINS [1961] per la condizione assialsimmetrica, con qualche variante.

Scelta la tensione di riferimento $p_r = \gamma(B/2)/$

$$y'_0 - y'_1 = (x'_0 - x'_1) \tan \{ - [\lambda\theta_0 + (1 - \lambda)\theta_1] - \varepsilon \} \quad (9a)$$

$$y'_0 - y'_2 = (x'_0 - x'_2) \tan \{ - [\lambda\theta_0 + (1 - \lambda)\theta_2] + \varepsilon \} \quad (9b)$$

$$p'_0 - p'_1 + (\theta_0 - \theta_1) [\lambda p'_0 + (1 - \lambda) p'_1] 2 \tan \varphi + (x'_0 - x'_1) \tan \varphi (1 - \sin \varphi) - (y'_0 - y'_1) (1 - \sin \varphi) = 0 \quad (9c)$$

$$p'_0 - p'_2 - (\theta_0 - \theta_2) [\lambda p'_0 + (1 - \lambda) p'_2] 2 \tan \varphi - (x'_0 - x'_2) \tan \varphi (1 - \sin \varphi) - (y'_0 - y'_2) (1 - \sin \varphi) = 0 \quad (9d)$$

In esse 1 e 2 rappresentano due punti noti (non connessi da una curva caratteristica), mentre 0 è il punto incognito in cui s'intersecano la caratteristica α per 1 e quella β per 2 (vedi fig. 3). Ponendo nelle (9) $\lambda = 0$ si hanno le differenze in avanti (forward difference), mentre ponendo $\lambda = 1/2$ si hanno le differenze centrali (centered difference). Le differenze in avanti hanno il pregio della linearità, ma l'inconveniente di un errore di troncamento eccessivo; viceversa le differenze centrali non sono lineari, però più precise a parità di passo (vedi AMES, 1977). Nel calcolo si sono quindi usate le differenze centrali, ricavandone la soluzione mediante una tecnica iterativa; il processo è stato inizializzato assegnando alle parti non lineari delle (9) le soluzioni ottenute mediante le differenze in avanti.

$/(1 - \sin \varphi)$, ed introdotte le variabili adimensionali $p' = p/p_r$, $x' = 2x/B$, $y' = 2y/B$, la traduzione in termini di differenze finite delle (7) ed (8) è la seguente:

Si è verificato che ai fini della convergenza è sufficiente richiedere che risulti:

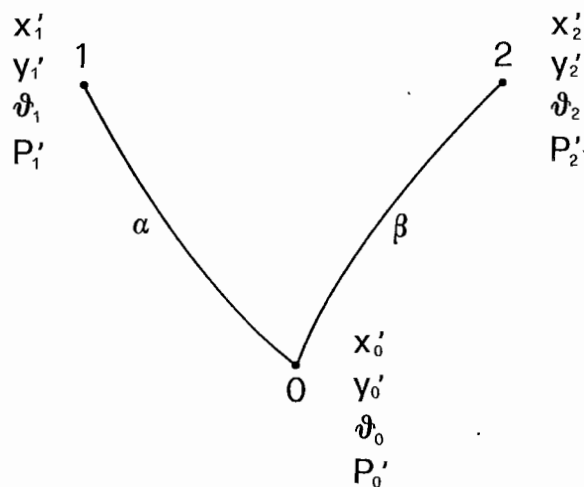


Fig. 3. - Problema elementare di Cauchy: punti 1 e 2 noti, punto 0 incognito.

$$|x'_{oi+1} - x'_{oi}| + |y'_{oi+1} - y'_{oi}| + |\theta'_{oi+1} - \theta'_{oi}| + |p'_{oi+1} - p'_{oi}| < 10^{-3}$$

dove $i+1$ ed i sono rispettivamente la $i+1$ esima e l'iesima iterazione.

La convergenza è stata in genere raggiunta dopo qualche iterazione, salvo nell'intorno dello spigolo dove il procedimento è risultato più lento.

L'integrazione è stata effettuata passo passo procedendo da destra verso sinistra e dall'alto verso il basso, prima nella zona di Riemann e poi in quella di Goursat (vedi fig. 4 in cui è indicato il caso di fondazione liscia e $\gamma D \neq 0$). Infine la determinazione di p' ed x' nei punti appartenenti alla linea AE è stata effettuata allo stesso modo mediante le due equazioni (9b) e (9d).

3.3. Problematica del dominio di Prandtl

Nel caso di sovraccarico $\gamma D = 0$, la rete delle caratteristiche si presenta sostanzialmente

diversa da quella di fig. 4 ($\gamma D \neq 0$), ed ha l'aspetto mostrato in fig. 5 (riferita ancora al caso di fondazione liscia). In primo luogo si osserva che, al fine di pervenire ad una rete sufficientemente regolare, occorre scegliere passi di larghezza diversa lungo la linea iniziale AB, sempre più piccoli man mano che ci si avvicina allo spigolo della fondazione A. Inoltre la zona di Prandtl (ovvero di Riemann) non è più osservabile, risultando tutte le caratteristiche α di detta zona praticamente coincidenti con la linea AB; in effetti tutte le caratteristiche α alla sinistra di AB in fig. 5, appartengono al dominio di Goursat, e non a quello di Prandtl, e quindi partono comunque da punti a sinistra di A, ancorché molto prossimi ad esso (vedi ingrandimento in fig. 5), come già messo in evidenza da LUNDGREN e MORTENSEN [1953] per la fondazione rugosa.

Sorge spontanea una domanda: la zona di

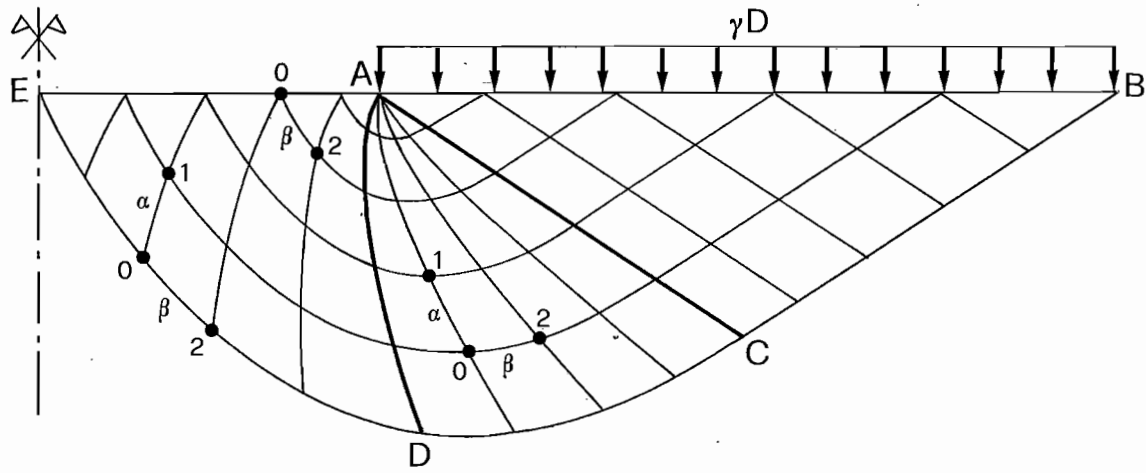


Fig. 4. - Discretizzazione mediante le differenze finite (caso $\gamma D \neq 0$ fondazione liscia).

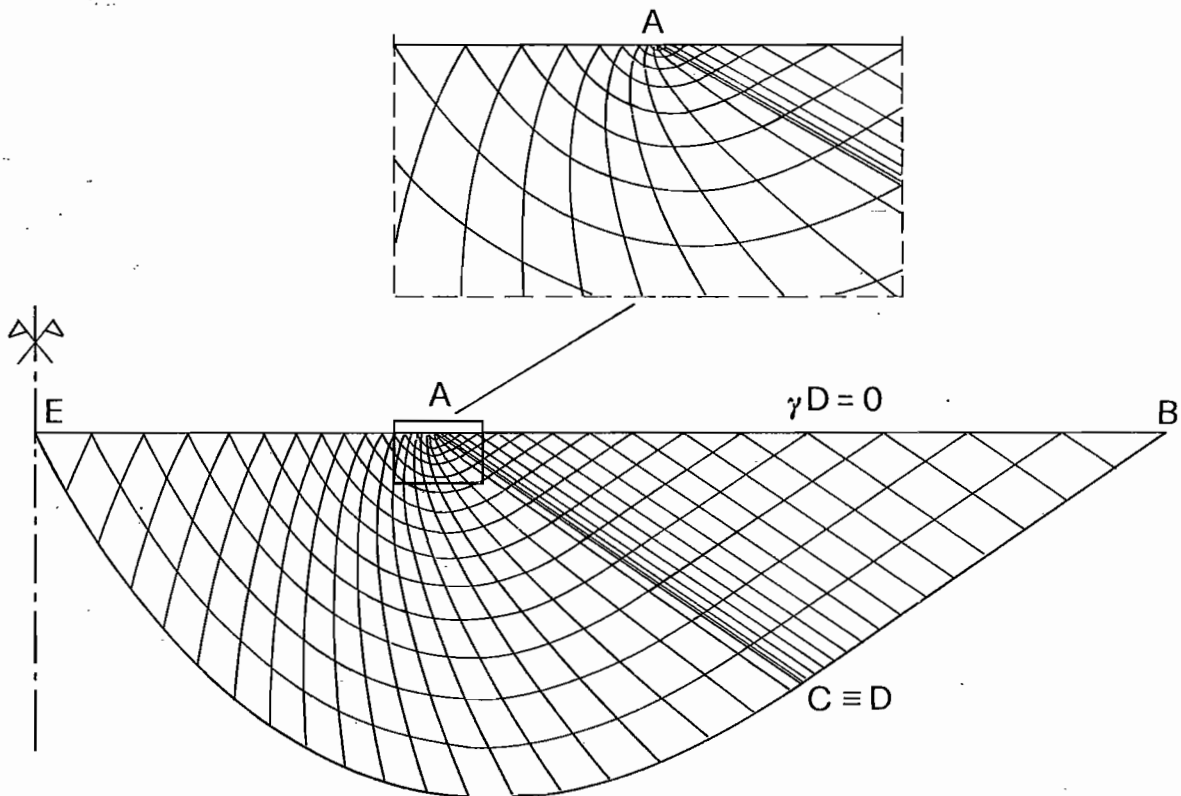


Fig. 5. - Rete tipica di caratteristiche nel caso $\gamma D = 0$ (fondazione liscia).

transizione esiste ancora, anche se di spessore molto piccolo o è rigorosamente assente? In quest'ultimo caso il problema di N_γ si ridurrebbe alla successione dei due problemi di Cauchy e Goursat.

La risposta può essere ricercata sia dal punto di vista del calcolo numerico che da quello della fisica matematica. Dal punto di vista del calcolo numerico il problema si pone per il calcolo di p' ed x' nel primo punto della fondazione, a sinistra dello spigolo A (punto 0 nello schema di fig. 6). Infatti, dalla (9d) si

ricava, per $\lambda = 1/2$, la condizione di positività per la pressione media sotto la fondazione p' :

$$\theta_2 > \theta_0 - \frac{1}{\tan \varphi} \quad (10)$$

diagrammata in fig. 6 tanto per fondazione liscia ($\theta_0 = \pi/2$) che per fondazione rugosa ($\theta_0 = \pi - \epsilon$). Come si vede dunque, mentre per $\varphi < 32^\circ 48'$ nel caso di fondazione liscia e $\varphi < 21^\circ 31'$ nel caso di fondazione rugosa, la condizione (10) è verificata anche da $\theta_2 = 0$

(zona di Prandtl assente, punto 2 coincidente col punto 2' in fig. 6), viceversa per angoli di attrito maggiori occorre un valore di $\theta_2 > 0$, e dunque una zona di Prandtl. In fig. 6 sono riportati i diagrammi del θ_2 ottenuto considerando la presenza della zona di transizione, che risultano praticamente indipendenti dai passi di discretizzazione sia lungo le α che lungo le β . Come si vede si attingono così i valori di θ_2 necessari per la positività di p' . Nel caso di fondazione rugosa, per $\varphi > 35^\circ$ il θ_2 calcolato è risultato leggermente al disotto della soglia (10); per questi casi allora, si è localmente sostituita alla differenza centrale quella in avanti.

Affrontando il problema dal punto di vista della fisica matematica si giunge a conclusioni analoghe alle precedenti. Infatti la presenza della zona di transizione consente di analiz-

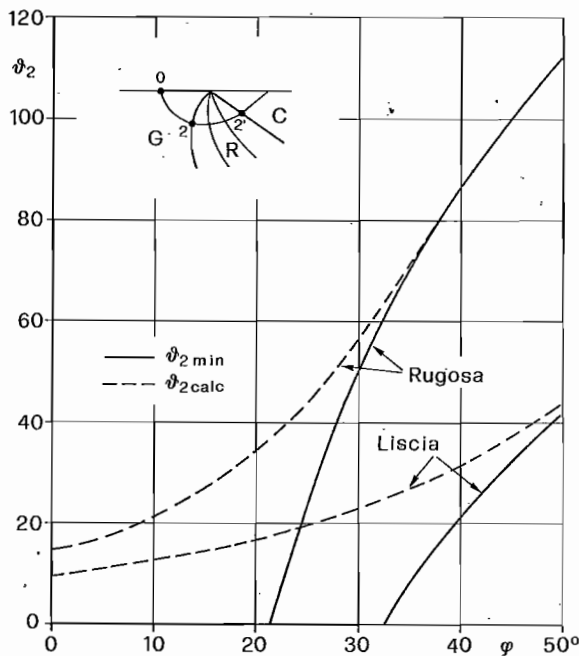


Fig. 6. - Valori dell'angolo θ_2 strettamente necessario (θ_{2min}) e risultante dal calcolo (θ_{2calc}).

zare il problema del carico limite come successione dei tre problemi canonici delle equazioni iperboliche di Cauchy, Riemann (deg.) e Goursat, e dunque dedurre la corretta posizione nel senso di Hadamard del problema stesso (vedi DE SIMONE, 1983a; 1984). Viceversa, rinunciando alla zona di transizione si avrebbe un problema di Goursat anomalo, tanto per l'eccessiva ampiezza dell'angolo \widehat{BAE} ($\pi - \epsilon$) che per la discontinuità di θ nel punto A, problema per il quale agli Autori non risulta esistere un teorema di corretta posizione.

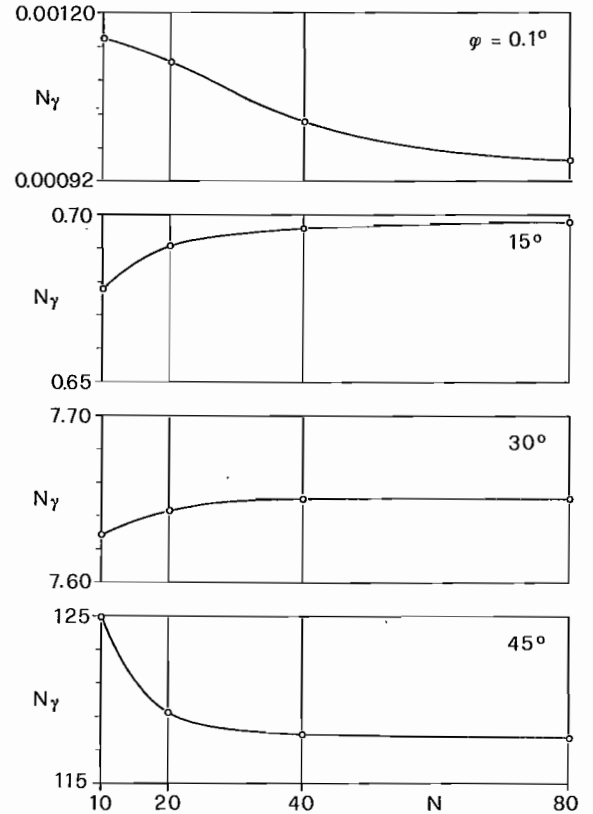


Fig. 7. - Effetto del numero di divisioni N della zona di Cauchy sul coefficiente N_γ (fondazione liscia).

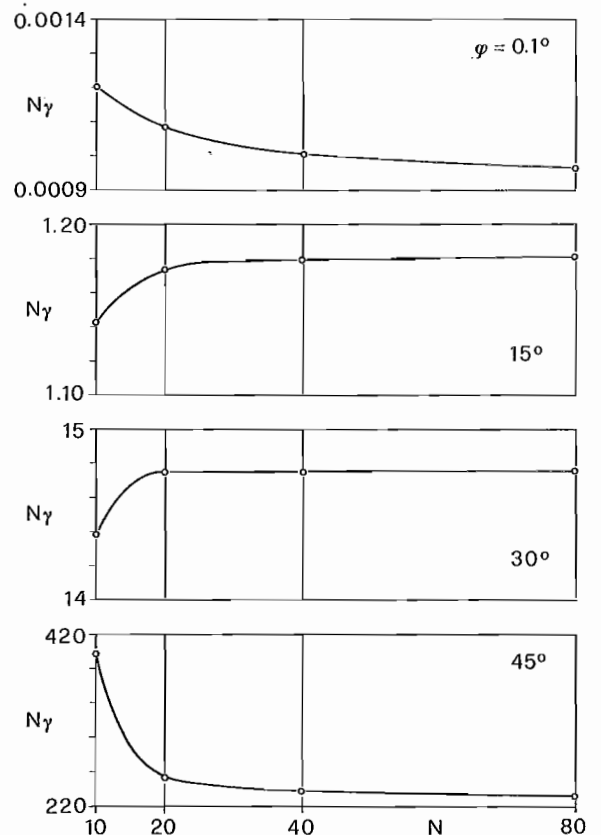


Fig. 8. - Effetto del numero di divisioni N della zona di Cauchy sul coefficiente N_γ (fondazione rugosa).

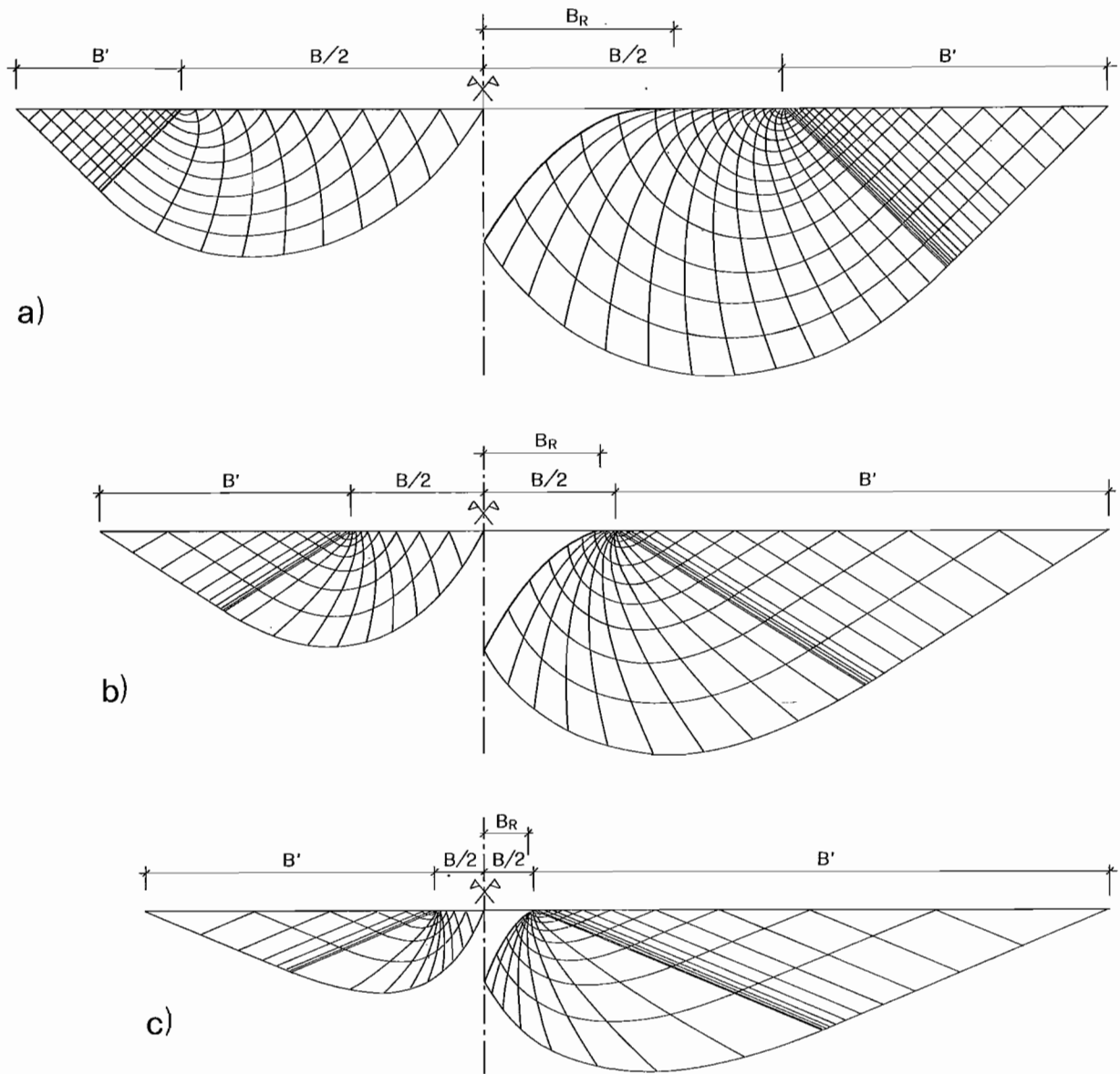


Fig. 9. - Reti di caratteristiche per fondazione liscia (sinistra) e rugosa (destra) per $\varphi = 15^\circ$ (a), 30° (b) e 45° (c).

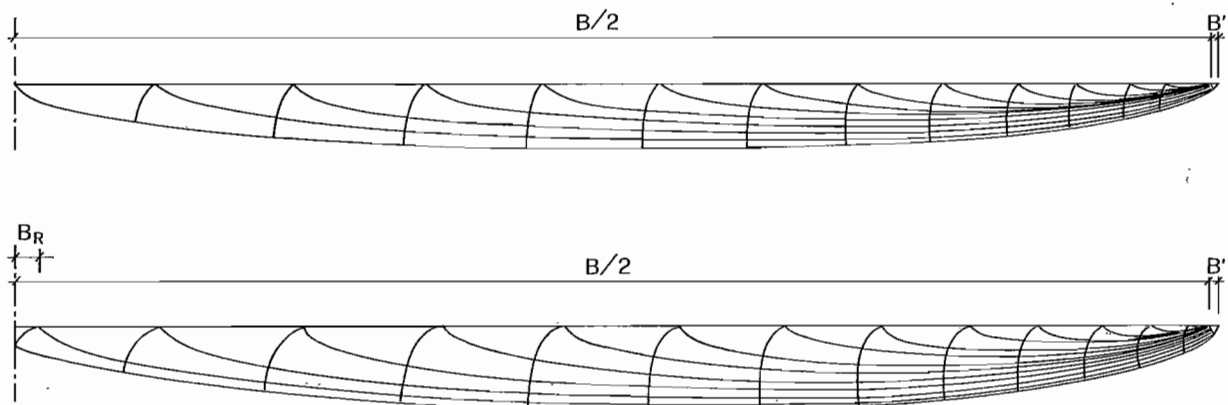


Fig. 10. - Reti di caratteristiche per fondazione liscia (sopra) e rugosa (sotto) per $\varphi = 0.1^\circ$.

4. Risultati del calcolo

Al fine di determinare l'influenza del passo di discretizzazione sul valore di N_r , si sono costruiti i diagrammi di figg. 7 e 8; in essi N rappresenta il numero di suddivisioni della linea iniziale di Cauchy, beninteso con passi di ampiezza diversa in modo da ottenere una rete regolare.

Come si vede con 40 divisioni si è già praticamente raggiunta la stabilizzazione di N_r .

In effetti i risultati che seguono sono stati ottenuti suddividendo la linea iniziale in 80 punti. Nelle figg. 9 e 10 sono mostrate le reti di caratteristiche per gli stessi angoli di attrito di figg. 7 e 8 (0.1° , 15° , 30° , 45°); da notare che le curve caratteristiche tracciate sono solo una parte di quelle effettivamente ottenute nella risoluzione del problema.

In fig. 11 sono diagrammati i coefficienti N_r ottenuti sia per fondazione liscia che per fondazione rugosa, mentre in fig. 12 è diagrammata l'estensione B' della zona di Cauchy, riferita alla semilarghezza $B/2$ della fondazione. Gli stessi dati sono forniti in tabella 1, insieme al rapporto dei coefficienti N_r di fondazione rugosa e liscia: come si vede risulta confermata l'indicazione di MEYERHOF [1955] del raddoppio, passando dalla fondazione liscia a quella rugosa, soprattutto per gli angoli di attrito più elevati.

5. Confronto con i risultati precedenti

Nelle figg. 13 e 14 i coefficienti N_r ottenuti nello studio presente sono confrontati con quelli ricavati in precedenza da altri Autori.

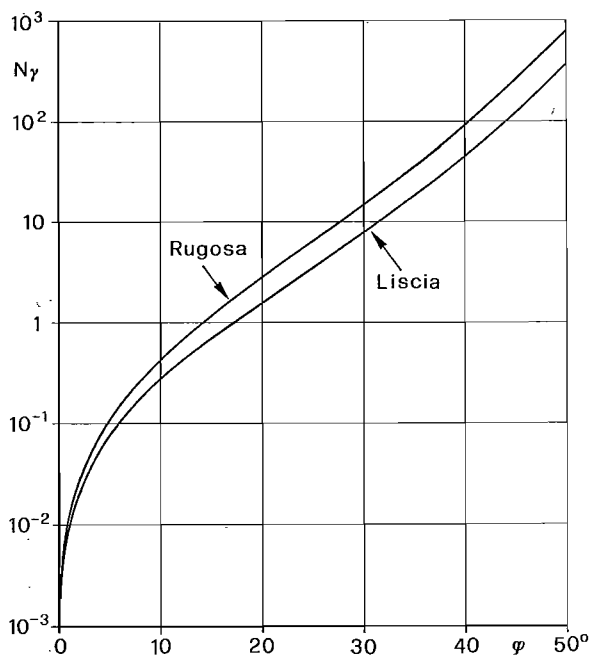


Fig. 11. - Coefficiente N_r per fondazione liscia e rugosa.

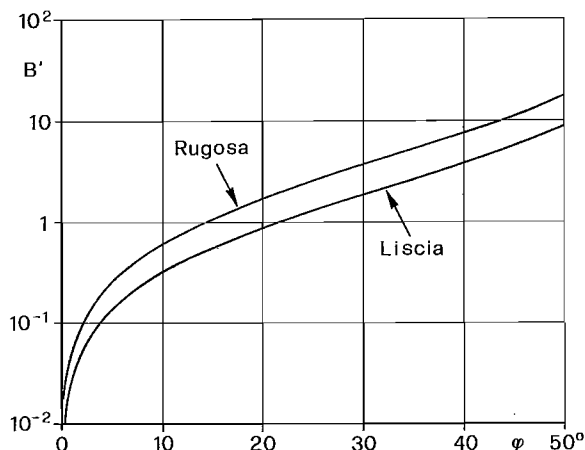


Fig. 12. - Estensione B' della zona di Cauchy.

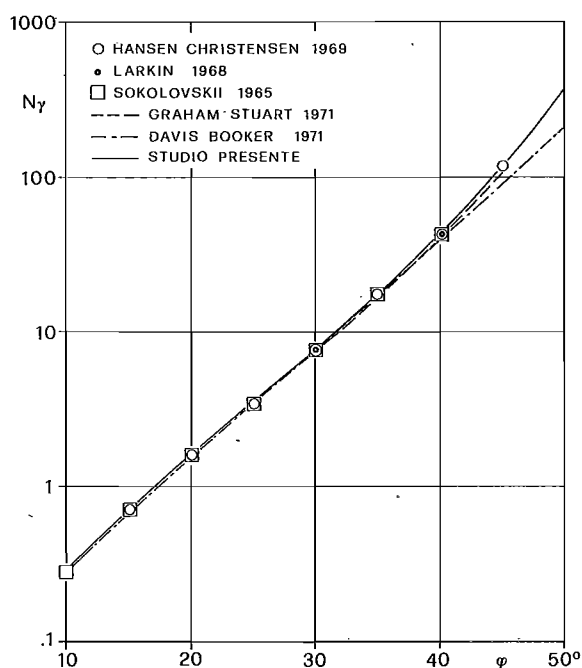


Fig. 13. - Confronto con i coefficienti N_r ricavati da altri Autori: fondazione liscia.

Si nota in primo luogo l'ottimo accordo con i risultati ottenuti in base all'ipotesi di omotetia, da SOKOLOVSKII [1965] e HANSEN, CHRISTENSEN [1969] per la fondazione liscia, e da LUNDGREN, MORTENSEN [1953], HANSEN, CHRISTENSEN [1969] e SALENÇON, FLORENTIN, GABRIEL [1976] per la rugosa. A tal proposito è da rilevare che CHEN [1975] attribuisce erroneamente a SOKOLOVSKII [1965] dei valori di N_r doppi di quelli effettivamente ottenuti dall'Autore.

Per quanto riguarda i risultati ottenuti con le caratteristiche, si nota il buon accordo con quelli di LARKIN [1968], anche se in tale studio è ancora presente una zona di Prandtl di spes-

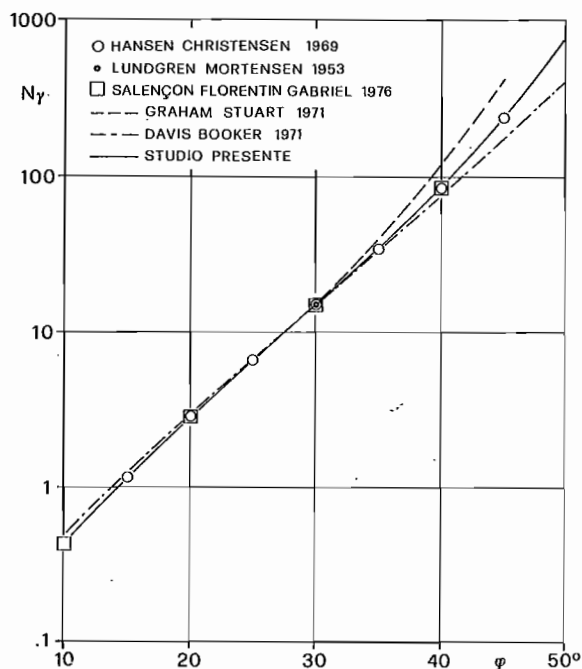


Fig. 14. - Confronto con i coefficienti N_T ricavati da altri Autori: fondazione rugosa.

sore sensibile, e con quelli ottenuti da GRAHAM, STUART [1971] per la fondazione liscia. Alcune differenze sussistono viceversa con i risultati di GRAHAM, STUART [1971] per la fondazione rugosa, e con quelli di BOOKER, DAVIS [1971] tanto per la fondazione liscia che per la rugosa. Le prime [GRAHAM, STUART, 1971], sono probabilmente da ascrivere alla differente ipotesi di rugosità usata dagli Autori (rugosità linearmente variabile sotto la fondazione; si è trascurata del tutto l'altra ipotesi di rugosità fatta dagli Autori in quanto risulta staticamente inaccettabile). La seconda dovrebbe dipendere dall'ipotesi di materiale non normale fatta dagli Autori (angolo di dilatanza ν minore dell'angolo di attrito ϕ). Tuttavia gli stessi Autori affermano che tale fatto comporta una differenza dell'ordine soltanto dell'1% rispetto all'ipotesi di normalità, molto minore di quella rilevabile in fig. 14; inoltre, ancora più difficile riesce spiegare le differenze che si riscontrano nel caso di fondazione liscia.

6. L'« ipotesi » di omotetia

Il fatto che i risultati qui ottenuti col metodo delle caratteristiche e quelli ottenuti da altri Autori ammettendo l'ipotesi di stato tensionale omotetico, siano praticamente coincidenti, tanto per fondazione liscia che per rugosa, fa nascere spontaneo il quesito se l'omo-

tetia non sia una proprietà dello stato tensionale, piuttosto che un'ipotesi su di esso, e la domanda si fa ancora più insistente quando, analizzando lo stato tensionale in tutto il dominio plastico, si verifica che anch'esso soddisfa con ottima approssimazione ad un'ipotesi omotetica.

Se si leggono attentamente gli scritti degli Autori che hanno trattato il problema secondo questo indirizzo [LUNDGREN, MORTENSEN, 1953; SOKOLOVSKII, 1965; etc...], si constata che essi introducono l'ipotesi di omotetia, senza alcuna motivazione né fisica né matematica, ma al più attribuendola a VON KARMANN [1926] [LUNDGREN, MORTENSEN, 1953], oppure [MANDEL, SALENÇON, 1972] a REISSNER [1924]. VON KARMANN [1926] a sua volta rinvia ulteriormente indietro nel tempo il problema, attribuendo a Boussinesq l'ipotesi di omotetia, senza peraltro precisare il riferimento bibliografico. In effetti Boussinesq, in due articoli del 1917 e 1918, trattando del problema della spinta delle terre, considera stati tensionali omotetici, ma nell'ambito molto più ristretto della condizione di spinta di Rankine-Levy o di una spinta molto prossima a questa.

In tempi più recenti KRAVTCHENKO e SIBILLE [1965] hanno mostrato che l'ipotesi omotetica corrisponde a sviluppi in serie di potenze delle funzioni incognite p e θ , arrestati ai primi termini. In effetti se, seguendo l'indirizzo di KRAVTCHENKO e SIBILLE [1965], si estende lo sviluppo ai termini di ordine superiore, si verifica, dopo qualche noioso passaggio indicato sinteticamente in appendice, che i termini di ordine superiore hanno coefficienti nulli, essendo le equazioni che li definiscono omogenee in tali coefficienti e nelle loro derivate prime.

Si può allora concludere che la soluzione del problema gode della proprietà dell'omotetia in tutto il dominio plastico, escluso naturalmente lo spigolo della fondazione che è comunque un punto singolare.

7. Conclusioni

Si è mostrato che il coefficiente di carico limite N_T può essere ottenuto col metodo delle caratteristiche direttamente, senza alcun passaggio al limite. Si è visto che in tal caso la zona di transizione di Prandtl ha uno spessore trascurabile, ma svolge comunque un'importante funzione sia dal punto di vista del calcolo numerico che da quello della fisica matematica.

TABELLA 1
COEFFICIENTI DI CARICO LIMITE N_γ ED ESTENSIONE DELLA ZONA DI CAUCHY B' :
FONDAZIONE LISCIA ($N_{\gamma S}$, B'_S), FONDAZIONE RUGOSA ($N_{\gamma R}$, B'_R)

φ	0.1°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
$N_{\gamma S}$	0.001	0.08	0.28	0.70	1.58	3.46	7.65	17.58	43.25	117.64	372.48
$N_{\gamma R}$	0.001	0.11	0.43	1.18	2.84	6.48	14.76	34.50	85.71	235.08	748.28
$N_{\gamma R}/N_{\gamma S}$	1.05	1.35	1.55	1.69	1.80	1.87	1.93	1.96	1.98	2.00	2.01
B'_S	0.001	0.14	0.33	0.57	0.88	1.30	1.87	2.68	3.87	5.72	8.82
B'_R	0.017	0.27	0.61	1.08	1.71	2.54	3.69	5.31	7.70	11.42	17.72

Il confronto dei risultati ottenuti con quelli ricavati in precedenza sia per fondazione liscia che per fondazione rugosa in base all'ipotesi di omotetia, mostra che i due approcci conducono agli stessi risultati: viene in effetti mostrato che tale circostanza non è casuale, ma dipende dal fatto che l'omotetia è una proprietà dello stato tensionale del problema studiato.

Si può dunque trarre la conclusione che i valori del coefficiente N_γ ottenuti, e forniti in tabella 1, costituiscono una corretta soluzione del problema, senza alcuna ipotesi che ne smi-

nuisca la portata, beninteso nell'ambito del modello di comportamento assunto per il terreno. Se ne consiglia quindi l'uso anche nella pratica professionale.

APPENDICE

Scegliendo come sistema di riferimento nel piano di deformazione le coordinate polari r , distanza dallo spigolo della fondazione, e ω , anomalia del raggio vettore rispetto all'asse orizzontale, e sostituendo a θ la variabile $\psi = \theta + \omega$, le equazioni indefinite dell'equilibrio plastico (6) diventano:

$$\frac{\partial p}{\partial r} (1 + \sin\varphi \cos 2\psi) + \frac{\partial p}{\partial \omega} \left[-\frac{1}{r} \sin\varphi \sin 2\psi \right] + \frac{\partial \psi}{\partial r} (-2p \sin\varphi \sin 2\psi) + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \left[-2\frac{p}{r} \sin\varphi \cos 2\psi \right] + 2\frac{p}{r} \sin\varphi \cos 2\psi = \gamma \sin\omega \quad (A1a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} (-\sin\varphi \sin 2\psi) + \frac{\partial p}{\partial \omega} \frac{1}{r} (1 - \sin\varphi \cos 2\psi) + \frac{\partial \psi}{\partial r} (-2p \sin\varphi \cos 2\psi) + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \left[2\frac{p}{r} \sin\varphi \sin 2\psi \right] - 2\frac{p}{r} \sin\varphi \sin 2\psi = \gamma \cos\omega \quad (A1b)$$

Seguendo KRAVTCHENKO e SIBILLE [1965], si esprimono le due funzioni incognite p e ψ mediante gli sviluppi in serie di potenze:

$$p = p_0(\omega) + r p_1(\omega) + r^2 p_2(\omega) + r^3 p_3(\omega) + \dots \quad (A2a)$$

$$\psi = \psi_0(\omega) + r \psi_1(\omega) + r^2 \psi_2(\omega) + r^3 \psi_3(\omega) + \dots \quad (A2b)$$

Sostituendo le (A2) nelle (A1) ed annullando successivamente i coefficienti dei termini in r^{-1} , r^0 , r^1 , r^2 , ..., si ottengono delle equazioni che definiscono i coefficienti delle (A2). Kravtchenko e Sibille hanno studiato i coefficienti dei termini in r^{-1} ed r^0 mostrando che l'annullamento dei coefficienti del primo comporta, per il caso in studio, $p_0 = 0$, mentre dall'annullamento di quelli del secondo si ricavano le equazioni per p_1 e ψ_0 :

$$\frac{dp_1}{d\omega} = \frac{\cos(2\psi_0 - \omega) - p_1 \sin 2\psi_0}{\cos 2\psi_0 - \sin\varphi} \quad (A3a)$$

$$\frac{d\psi_0}{d\omega} = \frac{\sin\varphi \sin(2\psi_0 - \omega) - p_1 \cos^2\varphi + \sin\omega}{2p_1 \sin\varphi (\sin\varphi - \cos 2\psi_0)} + 1 \quad (A3b)$$

già ottenute in precedenza da Sokolovskii e dagli altri Autori con l'ipotesi di omotetia:

$$p = r p_1(\omega) \quad (A4)$$

In effetti si può facilmente verificare che l'annullamento dei coefficienti dei termini in r dà le due equazioni per la coppia p_2 , ψ_1 :

$$2 \left[1 + \sin\varphi \cos 2\psi \left(2 - \frac{d\psi_0}{d\omega} \right) \right] p_2 - \sin\varphi \sin 2\psi \frac{dp_2}{d\omega} - 2p_1 \sin\varphi \sin 2\psi \cdot \psi_1 - 2p_1 \sin\varphi \cos 2\psi \frac{d\psi_1}{d\omega} = 0 \quad (A5a)$$

$$-2\sin\varphi \sin 2\psi \left[2 - \frac{d\varphi_0}{d\omega} \right] p_2 + (1 - \sin\varphi \cos 2\psi) \frac{dp_2}{d\omega} - 2p_1 \sin\varphi \cos 2\psi \cdot \psi_1 + 2p_1 \sin\varphi \sin 2\psi \frac{d\psi_1}{d\omega} = 0 \quad (A5b)$$

Si tratta di equazioni omogenee in p_z , ψ_1 e nelle derivate prime, che quindi ammettono la soluzione identicamente nulla. E poiché tale soluzione verifica le condizioni iniziali, essa è la corretta soluzione del problema. In maniera analoga si verifica che anche le equazioni che definiscono tutte le coppie successive p_n , ψ_{n-1} sono omogenee ed ammettono ancora la soluzione identicamente nulla.

BIBLIOGRAFIA

- AMES W. F. (1977) - *Numerical methods for partial differential equations*. Nelson.
- BOUSSINESQ M. J. (1917) - *Poussé des terres*. Ann. Ec. Norm. Sup. (3), XXXIV.
- BOUSSINESQ M. J. (1918) - *La poussé des terres et l'état ébouleux*. Ann. Ec. Norm. Sup. (3), XXXV.
- CAQUOT A. (1934) - *Equilibre des massifs à frottement interne*. Gauthier-Villars.
- CHEN W. F. (1975) - *Limit analysis and soil plasticity*. Elsevier Scientific Publishing Company.
- COX A. D., EASON G., HOPKINS H. G. (1961) - *Axially symmetric plastic deformations in soils*. Phil. Trans. Royal Soc. London, series A 254, 1-45.
- DAVIS E. H., BOOKER J. R. (1971) - *The bearing capacity of strip footings from the standpoint of plasticity theory*. Proc. 1st Australian, New Zealand C.S.M.F.E., vol. 1, 276-282.
- DE SIMONE P. (1983a) - *Il carico limite inclinato delle fondazioni nastriformi con le caratteristiche*. Rivista Italiana di Geotecnica (2), XVII, 85-102.
- DE SIMONE P. (1983b) - *Sulla profondità critica degli scavi sostenuti in argilla col metodo delle caratteristiche*. Atti del XV Convegno Nazionale di Geotecnica, Spoleto, vol. II, 147-154.
- DE SIMONE P. (1984) - *Sul coefficiente di carico limite N_r* . Gruppo naz. coord. st. ing. geot. CNR, Roma.
- DE SIMONE P. (1985) - *Bearing capacity of a circular footing on a Coulomb medium*. Proc. 5th I.C.O.N.M.I.G., Nagoya, Japan.
- GRAHAM J., STUART J. G. (1971) - *Scale and boundary effects in foundation analysis*. J. Soil Mech. Found. Div. ASCE, SM11, 1533-1548.
- HANSEN B., CHRISTENSEN N. H. (1969) - Discussion on: *Theoretical bearing capacity of very shallow footings*, J. Soil Mech. Found. Div. ASCE, SM6, 1568-1573.
- KRAVTCHEIKO J., SIBILLE R. (1965) - *Etudes des singularités rencontrées dans les problèmes d'équilibre limite*. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261, groupe 2, 2296-2298.
- LARKIN L. (1968) - *Theoretical bearing capacity of very shallow foundations*. J. Soil Mech. Found. Div. ASCE, SM6, 1347-1356.
- LUNDGREN H., MORTENSEN K. (1953) - *Determination by the theory of plasticity of the bearing capacity of continuous footings on sand*. Proc. 3rd I.C.S.M.F.E. Zürich, vol. 1, 409-412.
- MANDEL J., SALENÇON J. (1972) - *Force portante d'un sol sur une assise rigide (étude théorique)*. Géotechnique 22, N. 1, 79-93.
- MEYERHOF G. G. (1955) - *Influence of roughness of base and groundwater conditions on the ultimate bearing capacity of foundations*. Géotechnique 5, 227-242.
- PRANDTL L. (1920) - *Über die Härte plastischer Körper*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen math.-phys. Kl., 74-85.

- REISSNER H. (1924) - *Zum Erddruckproblem*. Proc. Ist. Int. Cong. Appl. Mech., 295-311.
- SALENÇON J., FLORENTIN P., GABRIEL Y. (1976) - *Capacité portante globale d'une fondation sur un sol non homogène*. Géotechnique 26, N. 2, 351-370.
- SHIELD R. T. (1954) - *Plastic potential and Prandtl bearing capacity solution*. JI Appl. Mech. trans. ASCE, vol. 21, 193-194.
- SOKOLOVSKII V. V. (1965) - *Statics of granular media*. Pergamon Press.
- TERZAGHI K. (1943) - *Theoretical soil mechanics*. J. Wiley.
- VON KÄRMANN (1926) - *Ueber elastische Grenzzustände*. Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech. Zürich, 23-22.

SUMMARY

The bearing capacity coefficient N_r

The bearing capacity factor N_r , which appears in the superposition formula (1) by Terzaghi (1943), has been determined by several Authors.

Determinations founded on the integration of the plane plastic equilibrium equations (6) can be grouped as follows:

(i) determinations starting from the hypothesis of homothetia (A4) (e.g. LUNDGREN, MORTENSEN, 1953; SOKOLOVSKII, 1965; HANSEN, CHRISTENSEN, 1969...);

(ii) applications of the method of characteristics, by means of a limiting procedure.

In this paper the problem is solved by means of characteristics, adopting a direct procedure. As usual, the problem is studied as a sequence of the three canonical problems of hyperbolic equations, namely the Cauchy, the (degenerated) Riemann and the Goursat ones.

The Cauchy problem has a simple analytical solution (passive Rankine state). The Riemann and Goursat problems are solved using the finite differences expressions (9) of the governing equations (7), (8). The calculations have been carried out using the centered differences, starting the iteration procedure by means of the forward differences.

It is found that the Prandtl transition zone is practically absent.

It is shown, however, that its presence is fundamental both from a numerical and a mathematical physical view point (see fig. 6).

The values of N_r and B' (extent of the Cauchy zone) for ϕ ranging from 0° to 50° are plotted in figs. 11 and 12, and shown in tab. 1, for both smooth and perfectly rough foundations. It is shown that N_r practically doubles, passing from the smooth to the rough footing, as already obtained by MEYERHOF (1955).

The results obtained by the Authors are compared with those available in the literature and the differences are discussed. The excellent agreement with the results obtained by means of the hypothesis of homothetia is pointed out.

Finally, it is shown that such a result depends on homothetia being a property of the problem, rather than a simplifying assumption.

It is concluded that the calculated values of N_r can be used confidentially in engineering practice.