Analisi probalistica speditiva in geotecnica e fondazioni

G. VANNUCCHI *

SOMMARIO: In ingegneria geotecnica vi sono diverse cause di incertezza, riconducibili a:

a) uso di metodi e schemi di calcolo approssimati;
b) imperfetta conoscenza delle azioni applicate;
c) variabilità dei parametri geotecnici.

In questo articolo si propone di utilizzare per la progettazione geotecnica un metodo di analisi probabilistica [ROSENBLUETH, 1975], alternativo al metodo Monte Carlo, che consente di valutare con buona approssimazione ed in modo estremamente semplice e rapido i parametri di distribuzione di funzioni comunque complicate di variabili geotecniche aleatorie. Il metodo di Rosenblueth consente di stimare il valore atteso ed i primi momenti di una funzione di variabili aleatorie, noti i primi momenti di tali variabili (media e deviazione standard). Non è necessario conoscere la distribuzione di probabilità delle variabili aleatorie indipendenti, è sufficiente che esse siano approssimativamente simmetriche. Nei casi in cui non è possibile definire in modo esplicito, mediante un'equazione, la relazione funzionale y = f(.), il metodo è ancora applicabile a valori puntuali ottenuti con procedimenti numerici. Se le variabili aleatorie indipendenti realmente significative possono ridursi ad una o due, come spesso si verifica in geotecnica, il procedimento di Rosenblueth risulta particolarmente rapido e semplice, specie se si limita al minimo il numero di valori puntuali delle variabili aleatorie indipendenti.
Con il duplice scopo di chiarire la pratica applicabilità del metodo di Rosenblueth e di verificarne i risultati, sono stati presi in esame alcuni problemi di ingegneria geotecnica già affrontati da Autori diversi con la tecnica Monte Carlo e ne sono stati messi a confronto i risultati. Per dimostrare la generalità del procedimento gli esempi si riferiscono ad argomenti molto diversi fra loro:

— fattori di capacità portante di fondazioni superficiali tabb. 3a, 3b);
— coefficienti di spinta delle terre (tab. 4);
— stabilità dei pendii (tabb. 5a, 5b, 6, 7);
— consolidazione (tabb. 8a, 8b).

È importante sottolineare che per la sua brevità e semplicità *il calcolo non ha richiesto l'uso di computers.*
Poiché la maggior parte delle funzioni di interesse geotecnico sono continue e monotone, e le leggi di distribuzione delle proprietà geotecniche sono spesso, con buona approssimazione, normali o quantomeno simmetriche, il confronto dei risultati è in generale molto soddisfacente.
Naturalmente l'« accuratezza » non è costante, specie per quanto riguarda i coefficienti di variazione calcolati, ma poiché è sempre opportuno utilizzare metodi di calcolo adeguati al grado di conoscenza dei dati di ingresso, il metodo di Rosenblueth può essere, a giudizio dell'Autore, addirittura preferibile al più laborioso metodo Monte Carlo in fase di indagine preliminare e comunque in assenza di una buona base statistica sperimentale, quando cioè si è obbligati ad assumere per le variabili aleatorie di ingresso i valori dei coefficienti di variazione consigliati dalla letteratura tecnica.

1. Introduzione

In ingegneria geotecnica vi sono diverse cause di incertezza, riconducibili a:

a) uso di metodi e schemi di calcolo approssimati;

b) imperfetta conoscenza delle azioni applicate;

c) variabilità dei parametri geotecnici.

a) *Uso dei metodi e schemi di calcolo approssimati*

La prima causa di incertezza ha un peso diverso nei vari problemi geotecnici.

Nelle verifiche di stabilità dei pendii l'uso dei diversi metodi di calcolo, a parità di condizioni geometriche e geotecniche, può condurre a differenze dell'ordine del 7-10% nel coefficiente di sicurezza calcolato [SINGH, 1971].

Molto maggiori risultano invece le differenze percentuali fra i valori calcolati con diverse teorie ed i corrispondenti risultati sperimentali, per la capacità portante di fondazioni superficiali. In tabella 1, per 8 situazioni geotecniche e geometriche diverse, sono calcolate le differenze percentuali fra i valori di capacità portante ottenuti applicando 4 formule diverse (Terzaghi, Meyerhof, B. Hansen, Balla) e i corrispondenti risultati sperimentali ottenuti da Muhs e da Milovic. La tabella si basa sui valori riportati in BOWLES [1982]. In genere, ma non sempre, l'applicazione della formula di Terzaghi porta a sottostimare l'effettiva capacità portante, mentre le altre portano ad una sovrastima che in certi casi può essere anche del 70-90% (es. n. 6 e 8, formula di Balla).

* Ingegnere, Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Firenze.
Lavoro svolto con il contributo del M.P.I. e del C.N.R.

TABELLA 1

Differenze percentuali fra capacità portante calcolata secondo vari Autori ed i corrispondenti valori sperimentali

Prova n. :	1	2	3	4	5	6	7	8
Formula di:								
1. Terzaghi	− 29	− 35	− 37	− 44	+ 9	+ 5	+ 14	+ 14
2. Meyerhof	− 5	+ 20	+ 28	+ 1	+ 21	+ 45	+ 6	+ 21
3. B. Hansen	− 11	+ 17	+ 22	+ 23	+ 23	+ 46	+ 1	+ 21
4. Balla	− 4	+ 18	+ 4	− 2	+ 64	+ 85	+ 33	+ 71

INGRA *et al.* [1983] hanno affrontato su base statistica e sperimentale l'analisi delle incertezze derivanti dal modello matematico per la capacità portante di fondazioni superficiali su sabbia. Dopo un accurato esame della variabilità sia del fattore di capacità portante N_γ, sia dei fattori correttivi di scala, forma, dimensioni, eccentricità ed inclinazione del carico, gli Autori concludono che, comunque, la fonte di incertezza dominante è quella relativa al valore dell'angolo di attrito (per deviazioni standard superiori ad 1°).

Se vi è molta incertezza nella corrispondenza del modello matematico di riferimento alle condizioni reali, una più accurata conoscenza delle caratteristiche geotecniche non comporta un'effettiva, maggiore affidabilità dei risultati, né l'analisi probabilistica sui dati può in alcun modo influire su di essa.

b) *Imperfetta conoscenza delle azioni applicate*

Nel caso degli edifici i carichi che si assumono essere trasmessi al terreno di fondazione derivano dal calcolo strutturale e quasi sempre sono imposti dalla normativa con un opportuno coefficiente di maggiorazione rispetto ai valori medi o più frequenti. Alcuni Regolamenti esteri differenziano i valori del carico accidentale per ciascun tipo di edificio, anche in funzione delle finalità del calcolo; ad esempio nel regolamento di El Salvador [I.A.E.E., 1984], per edifici ad uso abitativo il carico accidentale è:

— compreso tra 150 e 350 Kg/m^2 in funzione dell'area di influenza di ciascun elemento portante verticale ai fini del calcolo di questi ultimi;

— 110 Kg/m^2 ai fini del calcolo delle azioni sismiche;

— 40 Kg/m^2 ai fini del calcolo dei cedimenti per consolidazione.

I carichi permanenti hanno variabilità molto minore della variabilità dei carichi accidentali; pertanto nelle opere in cui i primi sono di gran lunga prevalenti, come rilevati, dighe etc., l'incertezza sul carico totale è trascurabile.

In ingegneria strutturale l'incertezza sulle azioni è un problema di grande importanza, ampiamente trattato su base probabilistica; in ingegneria geotecnica la variabilità delle caratteristiche dei materiali riduce il peso relativo delle incertezze sui carichi agenti.

c) *Variabilità dei parametri geotecnici*

Infine gli effetti della variabilità dei parametri geotecnici, dovuta sia ad eterogeneità dello strato, sia alle tecniche di esecuzione delle prove e dei sondaggi, può essere razionalmente studiata su base probabilistica allo scopo di acquisire una maggiore consapevolezza sull'affidabilità dei risultati ottenuti.

La diffusione dei metodi di analisi statistica e di modelli probabilistici in geotecnica e fondazioni è stata a lungo ostacolata per molti e buoni motivi:

— uno di essi è insito nella natura stessa dei terreni che, in quanto materiali naturali, hanno proprietà fisiche e meccaniche numerose e variabili, i cui valori sono stimati su un numero necessariamente esiguo di campioni, generalmente insufficiente a definire in modo quantitativo accettabile la legge di distribuzione. Tuttavia per la progettazione o il controllo di un'opera di ingegneria civile se sono state svolte estese indagini geotecniche ed è indispensabile una buona quantità di dati, i parametri statistici di distribuzione possono essere direttamente valutati; se invece la quantità dei dati geotecnici è insufficiente per un'analisi statistica, è comunque sempre possibile utilizzare i valori dei coefficienti di variazione forniti dalla letteratura che in materia è ormai numerosa e attendibile. Infatti negli ultimi anni sono stati condotti studi sistematici per quantificare la variabilità delle caratteristiche geotecniche misurate in situ ed in laboratorio e sono stati determinati gli intervalli dei coefficienti di variazione.

Una variabile aleatoria x è descritta attraverso la sua funzione densità di probabilità (PDF). La distribuzione normale (gaussiana) può essere utilizzata con sufficiente approssimazione per la maggior parte delle proprietà geotecniche.

Le principali grandezze necessarie per la definizione quantitativa della PDF sono il valore medio X e lo scarto quadratico o deviazione standard s_x, che corrispondono rispettivamente all'ascissa del baricentro ed al raggio centrale di inerzia dell'area (unitaria) sottesa dalla curva di distribuzione PDF.

Il coefficiente di variazione v_x, definito in percentuale dal rapporto:

$$v_x(\%) = 100\, s_x/X \qquad (1)$$

è una quantità adimensionale caratteristica della variabile e non molto dipendente dal valore medio « locale » della variabile stessa. Pertanto, anche in mancanza di una sufficiente base statistica, può essere lecito ipotizzare il valore del coefficiente di variazione per ciascuna proprietà geotecnica. In tal modo, assunta la legge di distribuzione normale e noto il coefficiente di variazione, risulta sufficiente la conoscenza del valore medio, anche calcolato su un numero esiguo di determinazioni, per la completa descrizione statistica della variabile.

— Un altro ostacolo alla diffusione dei metodi probabilistici è la necessità di usare procedimenti analitici e numerici talvolta impegnativi, non sempre disponibili o comunque non sempre ben accolti nella pratica progettuale.

Quando la relazione funzionale tra le variabili è complicata e comunque tale da rendere difficile o impossibile lo studio per via analitica, si utilizza il metodo di simulazione numerica Monte Carlo [AUGUSTI *et al.*, 1984].

Eseguendo un numero sufficientemente elevato di esperimenti con numeri casuali, scelti in modo da rispettare le proprietà statistiche delle variabili aleatorie indipendenti, si costruisce l'istogramma del comportamento osservato della variabile dipendente, il quale, al crescere del numero di esperimenti, tende a riprodurre la funzione densità di probabilità reale della variabile dipendente.

I difetti del metodo Monte Carlo consistono nella necessità di conoscere o assumere la PDF delle variabili aleatorie indipendenti e nella grande quantità di calcolo numerico richiesto per una buona affidabilità del risultato. L'uso del calcolatore è indispensabile e l'onere, in termini di tempo e di denaro, può risultare elevato.

In questo articolo si propone di utilizzare per la progettazione geotecnica un diverso metodo di analisi probabilistica [ROSENBLUETH, 1975], alternativo al metodo Monte Carlo, che consente di valutare con buona approssimazione ed in modo estremamente semplice e rapido i parametri di distribuzione di funzioni comunque complicate di variabili geotecniche aleatorie.

Nelle tabelle 2 e 3 sono riportati i coefficienti di variazione delle principali proprietà geotecniche.

TABELLA 2

Coefficienti di variazione delle proprietà geotecniche [AA.VV. fra cui LUMB, 1966; SINGH, 1971; KRAHN e FREDLUND, 1983; LEE *et al.*, 1983]

Proprietà geotecnica	Campo del coefficiente di variazione (%)	Valore consigliato del coeff. di var.
Limite di liquidità	2 – 48	10
Limite di plasticità	8 – 29	10
Indice di plasticità	5 – 79	30 – 70 *
Peso specifico	1 – 10	3
Peso di volume	1 – 10	3
Contenuto in acqua	6 – 63	15
Grado di saturazione	5 – 15	10
Indice dei vuoti	10 – 42	25
Coeff. di consolidazione	25 – 100	50
Indice di compressione	18 – 73	30
Coeff. di permeabilità	200 – 300	300
Comp. granulometrica	19 – 37	30
Indice N_{SPT}	27 – 85	30
Resistenza E.L.L.	6 – 100	40
Angolo di attrito (sabbie)	5 – 20	10

* I valori più alti per terreni contenenti una frazione sabbiosa e ghiaiosa.

TABELLA 3

Coefficienti di variazione per la resistenza di taglio di terreni coesivi [SINGH *et al.*, 1971]

Terreno	Proprietà	Coeff. di variazione
A. Prova Triassiale C. U.		
Caratteristiche di resistenza in termini di tensioni effettive		
CH	coesione	15
	angolo di attrito	56
CL	coesione	22
	angolo di attrito	19
ML	coesione	71
	angolo di attrito	12
B. Prova di taglio diretto drenata		
CH	coesione	63
	angolo di attrito	10.4
CL	angolo di attrito	3
ML	angolo di attrito	2.5

2. Il metodo delle stime puntuali di Rosenblueth

Il metodo di ROSENBLUETH [1975] consente di stimare il valore atteso ed i primi momenti di una funzione di variabili aleatorie, noti i primi momenti di tali variabili (media e deviazione standard). Non è necessario conoscere la distribuzione di probabilità delle variabili aleatorie indipendenti, è sufficiente che esse siano approssimativamente simmetriche.

Data una funzione y di m variabili aleatorie $x_1, x_2, ..., x_m$

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_m) \quad (2)$$

con il metodo di Rosenblueth si approssima la distribuzione di y mediante un gruppo di 2^m stime puntuali. I valori delle stime puntuali sono dati dall'equazione generale:

$$y_k = f[(X_1 + F_1 s_{x1}), (X_2 + F_2 s_{x2}), ..., (X_m + F_m s_{xm})] \quad (3)$$

ove

$X_1, X_2, ...$ sono i valori medi di $x_1, x_2, ...$

$s_{x1}, s_{x2}, ...$ sono le deviazioni standard di $x_1, x_2, ...$

$F_1, F_2, ...$ sono coefficienti che possono assumere solamente i valori $+1$ o -1

$$k = 1 + \sum_{i=1}^{m} (F_i + 1) \cdot 2^{i-2}$$

k assume il valore di tutti i numeri interi compresi tra 1 e 2^m, pertanto le stime puntuali della funzione y sono in numero di 2^m. Ad esempio se y è funzione di una sola variabile aleatoria le stime puntuali sono 2, se è funzione di due variabili aleatorie le stime puntuali sono 4, e così via.

Attraverso tali stime puntuali si calcolano i momenti di y con la seguente relazione generale:

$$E[y^n] = \sum_{k=1}^{2^m} P_k y_k^n \quad (4)$$

ove $E[y^n]$ è il valore atteso di y^n, e P_k è il coefficiente ponderale associato a y_k.

Se le variabili aleatorie $x_1, x_2, ..., x_m$, non sono tra loro correlate, i punti hanno eguale peso:

$$P_k = 2^{-m} \quad (5)$$

Se invece i coefficienti di correlazione fra le variabili prese a coppie sono diversi da zero, i coefficienti ponderali sono calcolati nel modo seguente:

$$P_k = 2^{-m} \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} F_i F_j r_{ij}\right) \quad (6)$$

ove r_{ij} è il coefficiente di correlazione fra x_i e x_j.

Nei casi in cui non è possibile definire in modo esplicito, mediante un'equazione, la relazione funzionale $y = f(.)$, il metodo è ancora applicabile a valori puntuali ottenuti con procedimenti numerici.

Se le variabili aleatorie indipendenti realmente significative possono ridursi ad una o due, come spesso si verifica in geotecnica, il procedimento di Rosenblueth risulta particolarmente rapido e semplice, specie se si limita al minimo il numero di valori puntuali delle variabili aleatorie indipendenti:

a) *y funzione di un'unica variabile aleatoria x*

dati:

$y = f(x)$	relazione funzionale tra y e la variabile aleatoria indipendente x,
X	valore medio di x,
v_x	coefficiente di variazione di x,
$P_+ = P_- = 0.5$	coefficienti ponderali,

si calcola:

$s_x = v_x X/100$ deviazione standard di x,

$x_+ = X + s_x$, $x_- = X - s_x$ valori puntuali di x,

$y_+ = f(x_+)$, $y_- = f(x_-)$ stime puntuali di y,

$Y = P_+ y_+ + P_- y_- = 0.5 (y_+ + y_-)$ valore medio di y,

$s_y = [P_+ y_+^2 + P_- y_-^2 - Y^2]^{0.5} = [0.5 (y_+^2 + y_-^2) - Y^2]^{0.5}$ deviazione standard di y,

$v_y = 100\, s_y/Y$ coefficiente di variazione di y

b) *y funzione di due variabili aleatorie, x_1 e x_2*

dati:

$y = f(x_1, x_2)$ relazione funzionale tra y e le variabili aleatorie x_1 e x_2,

$r_{x1,x2}$ coefficiente di correlazione tra x_1 e x_2,

X_1 valore medio di x_1,

X_2 valore medio di x_2,

v_{x1} coefficiente di variazione di x_1,

v_{x2} coefficiente di variazione di x_2,

si calcola:

$s_{x1} = v_{x1} X_1/100$ deviazione standard di x_1,

$s_{x2} = v_{x2} X_2/100$ deviazione standard di x_2,

$P_{++} = P_{--} = 0.25\,(1 + r_{x1,x2})$
$P_{+-} = P_{-+} = 0.25\,(1 - r_{x1,x2})$ coefficienti ponderali,

$x_{1+} = X_1 + s_{x1}$
$x_{1-} = X_1 - s_{x1}$ valori puntuali di x_1,

$x_{2+} = X_2 + s_{x2}$
$x_{2-} = X_2 - s_{x2}$ valori puntuali di x_2,

$y_{++} = f\,(x_{1+}, x_{2+})$
$y_{-+} = f\,(x_{1-}, x_{2+})$
$y_{+-} = f\,(x_{+1}, x_{2-})$
$y_{--} = f\,(x_{1-}, x_{2-})$ stime puntuali di y,

$Y = P_{++}\, y_{++} + P_{+-}\, y_{+-} + P_{-+} y_{-+} + P_{--}\, y_{--} =$
$= (1 + r_{x1,x2})\,(y_{++} + y_{--}) + (1 - r_{x1,x2})\,(y_{+-} + y_{-+})$ valore medio di y,

$s_y = [P_{++}\, y^2_{++} + P_{+-}\, y^2_{+-} + P_{-+} y^2_{-+} + P_{--} y^2_{--} - Y^2]^{0.5} =$
$[(1 + r_{x1,x2})\,(y^2_{++} + y^2_{--}) + (1 - r_{x1,x2})\,(y^2_{+-} + y^2_{-+}) - Y^2]^{0.5}$ deviazione standard di y,

$v_y = 100\, s_y/Y$ coefficiente di variazione di y.

3. Esempi applicativi del metodo di Rosenblueth e confronti con i risultati del metodo Monte Carlo

Con il duplice scopo di chiarire la pratica applicabilità del metodo di Rosenblueth e di verificarne i risultati, sono stati presi in esame alcuni problemi di ingegneria geotecnica già affrontati da Autori diversi con la tecnica Monte Carlo e ne sono stati messi a confronto i risultati.

Per dimostrare la generalità del procedimento gli esempi si riferiscono ad argomenti molto diversi fra loro:

— fattori di capacità portante di fondazioni superficiali;

— coefficienti di spinta delle terre;

— stabilità dei pendii;

— consolidazione.

È importante sottolineare che per la sua brevità e semplicità *il calcolo non ha richiesto l'uso di computers.*

Fattori di capacità portante di fondazioni superficiali

La variabilità dei fattori:

i) $\tan^4 (45 + \varphi/2)$

ii) $N_q = e^{\pi \tan\varphi} [\tan^2 (45 + \varphi/2)]$ (7)

iii) $N_c = \cot\varphi \{e^{\pi \tan\varphi} [\tan^2 (45 + \varphi/2)] - 1\}$

che intervengono nella determinazione della capacità portante di fondazioni superficiali, è stata analizzata da SINGH [1971] con la tecnica Monte Carlo.

I fattori sono funzione di un'unica variabile aleatoria indipendente, l'angolo di attrito φ.

I risultati del calcolo sono riportati in tabella 3a, mentre i corrispondenti valori ottenuti da Singh sono riportati in tabella 3b.

TABELLA 3a

Variabilità dei fattori di capacità portante calcolata con il metodo di Rosenblueth

$\varphi = X$	15°		25°		35°	
	i) $y = \tan^4 (45 + \varphi/2)$					
v_x	Y	v_y	Y	v_y	Y	v_y
10%	2.903	10.8	6.196	19.0	14.321	29.0
20%	2.957	21.4	6.580	36.8	16.560	53.7
30%	3.049	31.5	7.249	52.3	20.770	71.9
	ii) $y = N_q = e^{\pi \tan\varphi} [\tan^2 (45 + \varphi/2)]$					
v_x	Y	v_y	Y	v_y	Y	v_y
10%	3.984	14.1	11.083	25.7	37.084	41.1
20%	4.116	27.7	12.400	48.4	50.047	70.6
30%	4.339	40.4	14.797	66.2	78.120	87.0
	iii) $y = N_c = \cot \varphi \{e^{\pi \tan\varphi} [\tan^2 (45 + \varphi/2)] - 1\}$					
v_x	Y	v_y	Y	v_y	Y	v_y
10%	11.031	8.6	21.151	17.5	49.272	30.9
20%	11.194	17.1	22.487	34.0	59.755	56.8
30%	11.471	25.3	24.867	48.9	81.309	75.4

TABELLA 3b

Variabilità dei fattori di capacità portante calcolata con il metodo Monte Carlo

$\varphi = X$	15°		25°		35°	
	i) $y = \tan^4 (45 + \varphi/2)$					
v_x	Y	v_y	Y	v_y	Y	v_y
10%	2.902	10.8	6.193	19.4	14.329	30.7
20%	2.924	16.3	6.354	29.5	15.300	48.1
30%	2.956	21.9	6.590	40.6	16.873	70.9
	ii) $y = N_q = e^{\pi \tan\varphi} [\tan^2 (45 + \varphi/2)]$					
v_x	Y	v_y	Y	v_y	Y	v_y
10%	3.983	14.3	11.081	26.8	37.242	47.4
20%	4.037	21.6	11.645	41.9	43.439	82.0
30%	4.115	29.1	12.515	59.0	55.763	138.0
	iii) $y = N_c = \cot \varphi \{e^{\pi \tan\varphi} [\tan^2 (45 + \varphi/2)] - 1\}$					
v_x	Y	v_y	Y	v_y	Y	v_y
10%	11.029	8.6	21.147	18.0	49.357	34.2
20%	11.096	13.8	21.712	27.8	54.197	57.5
30%	11.192	17.5	22.563	38.8	63.123	94.0

Il confronto evidenzia un buon accordo generale: il metodo di Rosenblueth porta ad una stima dei valori medi dei fattori di capacità portante leggermente superiore, e la differenza si fa più sensibile al crescere sia del valore medio che del coefficiente di variazione della variabile aleatoria indipendente, angolo di attrito. La differenza fra i coefficienti di variazione dei fattori di capacità portante calcolati con i due metodi non è sempre dello stesso segno, talvolta non è trascurabile ed è crescente, in valore assoluto, sia con la media che con il coefficiente di variazione dell'angolo di attrito.

Un commento generale ai risultati può essere così sintetizzato. A parità di coefficiente di variazione di φ:

— il coefficiente di variazione di N_q è generalmente il maggiore dei tre;

— i coefficienti di variazione dei fattori di capacità portante crescono più che linearmente al crescere del valore medio dell'angolo di attrito. Pertanto, utilizzando un fattore di sicurezza centrale costante, l'affidabilità decresce sensibilmente al crescere del valore medio dell'angolo di attrito. Poiché ciò non può essere facilmente tradotto in termini quantitativi, risulta evidente l'opportunità di sostituire, nel progetto delle fondazioni, il concetto tradizionale di fattore di sicurezza con quello di affidabilità, o almeno di calcolarlo con metodo « semiprobabilistico ».

Coefficienti di spinta delle terre

La variabilità dei coefficienti di spinta delle terre:

i) $K_a = \tan^2 (45 - \varphi/2)$

ii) $K_p = \tan^2 (45 + \varphi/2)$

è stata analizzata da SINGH [1971] con la tecnica Monte Carlo (n. 200 esperimenti).

I coefficienti di spinta delle terre sono funzione di un'unica variabile aleatoria indipendente, l'angolo di attrito φ.

I risultati del calcolo eseguito con i due metodi, di Rosenblueth e Monte Carlo, sono riportati nella tabella 4. Con α si è indicato il rapporto tra il valore medio dei coefficienti di variazione dell'angolo di attrito.
todo di Rosenblueth risultano fra loro identici mentre calcolati con il metodo Monte Carlo risultano lievemente diversi) e il coefficiente di variazione dell'angolo di attrito,.

L'accordo fra i risultati ottenuti con i due metodi è in generale molto soddisfacente, sia con riferimento ai valori medi che ai coeffi-

TABELLA 4

Coefficienti di variazione di K_a e K_p, e fattore di amplificazione α con i metodi di Rosenblueth e Monte Carlo

v_φ	φ	v_{Kp} R.	v_{Kp} M. C.	v_{Ka} R.	v_{Ka} M. C.	α R.	α M. C.
10%	15°	5.4	5.2	5.4	5.3	0.54	0.53
	25°	9.6	9.5	9.6	9.4	0.96	0.945
	35°	14.8	14.9	14.8	14.7	1.48	1.48
	45°	21.9	22.8	21.9	21.8	2.19	2.23
20%	15°	10.8	10.7	10.8	10.7	0.54	0.535
	25°	19.1	19.4	19.1	19.1	0.95	0.96
	35°	29.1	31.6	29.1	29.6	1.46	1.53
	45°	42.2	54.5	42.2	43.8	2.11	2.46

cienti di variazione. Fra tutti i casi esaminati l'unico per il quale vi è una sensibile differenza fra i coefficienti di variazione calcolati con i due metodi è quello per $\varphi = 45°$ e $v_\varphi = 20\%$.

Per i valori alti dell'angolo di attrito ($\varphi > 26°$) α supera l'unità; ciò significa che i coefficienti di variazione di K_a e K_p divengono superiori al coefficiente di variazione di φ, per cui con un fattore di sicurezza costante l'affidabilità decresce al crescere dell'angolo di attrito.

Stabilità dei pendii

A) Pendio indefinito con filtrazione parallela al pendio

Il problema è stato affrontato con il metodo Monte Carlo da Cherubini *et al.* [1983].

Sono considerate variabili aleatorie la coesione e l'angolo di attrito, in termini di pressioni effettive, di un terreno saturo anche al di sopra del livello di falda.

Sono stati assunti:

— per la coesione c′ il valore medio 3 t/m² e due valori della deviazione standard, 0.50 e 0.25 t/m²;

— per l'angolo di attrito φ il valore medio 25° e due valori della deviazione standard, 5° e 2.5°.

Il coefficiente di correlazione fra le due variabili aleatorie è stato fatto variare per tutto il campo di esistenza, da −1 a +1 con passo 0.5.

Il terreno è omogeneo ed ha peso di volume saturo 2.0 t/m³, la pendenza i ha i valori 20°, 23°, 25°, 28°, la falda freatica è alla profondità di 3 m dal p.c., la superficie di scorrimento è alla profondità di 8 m dal p.c..

Le tabelle 5a e 5b riportano i risultati ottenuti rispettivamente con il metodo di Rosenblueth e con il metodo Monte Carlo. In esse sono indicati: il valore medio del fattore di sicurezza, F_m, e le probabilità di rottura del pendio ($F < 1$), per tutti i casi esaminati.

Al di là del significato geotecnico sia dei dati, che evidentemente hanno solo valore esemplificativo, sia dei risultati, il confronto delle due tabelle indica la buona corrispondenza dei risultati ottenuti con i due metodi, nonostante la grandissima differenza quantitativa di calcolo.

B) Pendio limitato

Il problema della verifica di stabilità di un pendio omogeneo e limitato è stato affrontato da Cherubini *et al.* [1983] applicando la tecnica Monte Carlo.

La geometria del pendio ed il cerchio di scorrimento sono rappresentati in fig. 1.

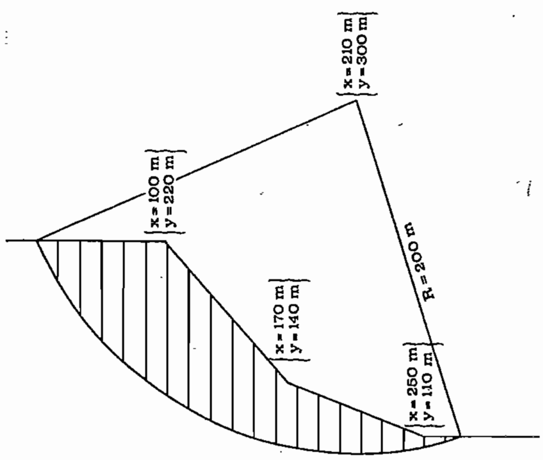

Fig. 1. - Dati geometrici per il pendio e per la superficie di scorrimento (da Cherubini *et al.*, 1983)

TABELLA 5a

Probabilità di rottura e fattore di sicurezza medio per pendio indefinito calcolati con il metodo di Rosenblueth

$r_{c\varphi}$ \ i	20°	23°	25°	28°	Proprietà geotecniche	
	Probabilità (%) F < 1					
– 1.0	0.0	0.1	0.8	16.6	*Angolo di attrito*	
	0.0	0.0	0.0	3.4	valore medio	25°
– 0.5	0.3	2.9	8.9	30.5	dev. standard	5.0°
	0.0	0.0	0.4	17.1		2.5°
0.0	1.7	7.1	14.9	34.8		
	0.0	0.2	2.2	23.6	*Coesione*	
0.5	3.7	10.8	19.2	37.5	valore medio	3 t/m²
	0.0	0.7	4.5	27.1		
1.0	5.7	13.8	22.1	38.6	dev. standard	0.50 t/m²
	0.1	1.6	6.7	29.8		0.25 t/m²
F_m	1.47	1.28	1.18	1.06	*Peso di volume*	2.0 t/m³

TABELLA 5b

Probabilità di rottura e fattore di sicurezza medio per pendio indefinito calcolati con il metodo Monte Carlo

$r_{c\varphi}$ \ i	20°	23°	25°	28°	Proprietà geotecniche	
	Probabilità (%) F < 1					
– 1.0	0.0	0.0	0.3	15.3	*Angolo di attrito*	
	0.0	0.0	0.0	2.4	valore medio	25°
– 0.5	0.0	1.3	8.0	28.1	dev. standard	5.0°
	0.0	0.0	1.1	16.6		2.5°
0.0	0.8	5.5	12.6	29.3		
	0.0	0.0	1.3	21.7	*Coesione*	
0.5	1.4	7.9	14.2	30.0	valore medio	3 t/m²
	0.0	0.5	3.6	23.9		
1.0	2.9	9.0	14.1	29.9	dev. standard	0.50 t/m²
	0.0	1.5	5.1	24.5		0.25 t/m²
F_m	1.46	1.28	1.18	1.06	*Peso di volume*	2.0 t/m³

Il calcolo di stabilità è stato condotto con il metodo di Bishop semplificato.

Le caratteristiche geotecniche sono le seguenti:

peso di volume		2 t/m³
angolo di attrito	valore medio	25°
	dev. standard	3°
coesione	val. medio	4.0 t/m²
	dev. standard	0.5 t/m²
coeff. di correlazione		$r_{c,\varphi} = -0.3$
coeff. di press. dei pori		$R_u = 0$

I risultati ottenuti con i metodi di Rosenblueth e Monte Carlo sono praticamente coincidenti (tabella 6).

TABELLA 6

Pendio di fig. 1; variabilità del fattore di sicurezza calcolata con i metodi di Rosenblueth e Monte Carlo

	Fattore di sicurezza R.	M. C.
Valore medio	1.156	1.159
Coeff. di var.	11.7	11.6

Altri due esempi numerici in cui è stata usata la tecnica di Monte Carlo per la verifica probabilistica di stabilità di un pendio omogeneo (i = 2/3), limitato da due superfici orizzontali, sono riportati da SINGH [1971].

Il fattore di sicurezza è funzione della resistenza al taglio e del peso di volume del terreno, dell'altezza h e della geometria del pendio:

$$F = f\,(c/\gamma h,\ \varphi,\ \text{geometria})$$

Poiché peso di volume, altezza e geometria hanno variabilità trascurabile, il coefficiente di variazione di F dipende dai coefficienti di variazione di c e di φ:

$$v_F = f\,(v_c/\gamma h,\ v_\varphi)$$

Il coefficiente di correlazione fra le variabili parametri di resistenza al taglio è stato assunto uguale a zero ($r_{x1,\,x2} = 0$).

In tabella 7, ove si è posto:

$$x_1 = c/\gamma h, \qquad x_2 = \varphi$$

sono confrontati i risultati ottenuti per i due esempi proposti da Singh con le tecniche di Rosenblueth e Monte Carlo.

TABELLA 7

Verifiche probabilistiche di pendii omogenei e limitati; confronto fra i risultati ottenuti con i metodi di Rosenblueth e Monte Carlo

X_1	v_{x1}	X_2	v_{x2}	F_m R.	F_m M. C.	v_F R.	v_F M. C.
0.13	30	25	10	2.015	1.928	23.2	17.3
0.20	40	5	10	1.51	1.51	39.9	34.5

Se si tien presente che nell'articolo di Singh non è precisato il metodo di verifica di stabilità usato e che sono stati necessari 200 esperimenti per ciascuna delle variabili aleatorie e per ognuno degli esempi, mentre la soluzione di confronto, con Rosenblueth, si è ottenuta per via grafica utilizzando l'abaco di Biarez [COSTET et SANGLERAT, 1969] con solo 4 stime puntuali, appare senz'altro soddisfacente la qualità del risultato.

Il valore del coefficiente di variazione del fattore di sicurezza è compreso fra i valori dei coefficienti di variazione di $c/\gamma h$ e di $\tan\varphi$. La variabilità di F è prossima a quella del parametro di resistenza al taglio prevalente. Poiché la coesione ha un coefficiente di variazione in genere più grande di quello dell'angolo di attrito, a parità di fattore di sicurezza vi è maggiore affidabilità in pendii costituiti da terreni incoerenti.

Consolidazione

Il coefficiente di consolidazione, c_v, di uno strato « uniforme » di argilla è una grandezza aleatoria con notevole variabilità (cfr. tab. 2). Pertanto anche il calcolo del grado di consolidazione può e deve essere affrontato con criteri probabilistici, anche per valutare l'effettiva utilità di teorie più raffinate della classica teoria della consolidazione unidirezionale di Terzaghi.

L'esempio che segue, già svolto con altra tecnica probabilistica da CHANG and SOONG [1979], è stato risolto con il metodo di Rosenblueth.

Un deposito naturale di argilla, posto su un substrato roccioso impermeabile, ha le seguenti caratteristiche:

spessore		H = 6.00 m (20ft)
coeff. di consolid.	val. medio	10^{-3} cm²/sec
	coeff. di var.	40%

Dopo la messa in opera di un riporto uniforme in superficie, si vuole conoscere:

a) il valore medio ed il coefficiente di variazione del grado di consolidazione dopo 10, 20, 40 mesi;

b) il tempo necessario perché il grado di consolidazione sia del 20%, 40%, 60%. La soluzione a tali quesiti, ottenuta applicando la teoria della consolidazione unidirezionale di Terzaghi ed il metodo di Rosenblueth, è messa a confronto con i risultati ottenuti da Chang e Soong nelle tabelle 8a e 8b.

TABELLA 8a

Valore medio e coeff. di variazione del grado di consolidazione; confronto fra i risultati ottenuti con i metodi di Rosenblueth e di Chang e Soong *

t (mesi)	U (%) R.	U (%) C&S	v_U (%) R.	v_U (%) C&S
10	30	26	22	23
20	42	38	22	21
40	59	57	22	19

TABELLA 8b

Valore medio e coeff. di variazione del tempo di consolidazione; confronto fra i risultati ottenuti con i metodi di Rosenblueth e di Chang e Soong *

U (%)	t (mesi) R.	t (mesi) C&S	v_t (%) R.	v_t (%) C&S
20	5.3	4.4	40	45
40	21.7	19.0	40	35
60	49.3	44.4	40	37

* Poiché i risultati nell'articolo di Chang e Soong sono riportati in termini di valore medio e di banda di confidenza senza specificare il numero di osservazioni, i relativi coefficienti di variazione sono stati calcolati in modo approssimato.

4. Considerazioni sulla « misura » della sicurezza e conclusioni

I metodi per la « misura » della sicurezza in ingegneria sono classificabili in:

— metodo deterministico (livello 0);

— metodo probabilistico (livello I);

— metodo probabilistico approssimato (livello II);

— metodo probabilistico rigoroso (livello III).

In ingegneria geotecnica lo sviluppo delle ricerche e delle conoscenze sui parametri statistici delle proprietà geotecniche consente di passare dal tradizionale metodo deterministico (livello 0) ai metodi semiprobabilistico (livello I) e probabilistico approssimato (livello II).

Le verifica di sicurezza semiprobabilistica (livello I) utilizza, « valori caratteristici » delle sollecitazioni e delle resistenze, definiti come opportuni « frattili » (rispettivamente superiore e inferiore) delle corrispondenti variabili aleatorie. L'elaborazione statistica necessaria per determinare i valori caratteristici è implicita, ma è svolta a monte, per cui il procedimento operativo di verifica è apparentemente

« deterministico » [AUGUSTI, 1983]. In pratica i valori caratteristici si ottengono dal prodotto dei valori medi per coefficienti parziali di carico (maggiori di 1) e di resistenza (minori di 1), calibrati sulla base dell'esperienza e imposti da una normativa o consolidati dall'uso. Indicazioni per verifiche di sicurezza semiprobabilistiche relative a diversi problemi di ingegneria geotecnica (stabilità dei pendii, strutture di sostegno e scavi, fondazioni superficiali e profonde) sono illustrate da MEYERHOF [1983] anche con riferimento alle normative danese e canadese.

Per applicare un metodo di livello II (probabilistico approssimato) è necessario conoscere o ipotizzare i valori medi e le varianze dei parametri di calcolo. Per la valutazione di tali grandezze può essere di valido aiuto il metodo delle stime puntuali di Rosenblueth qui trattato. La verifica di sicurezza consiste nel calcolare la probabilità che si verifichi la rottura o un diverso stato critico, avendo ipotizzato le leggi di distribuzione statistica, con l'avvertenza che tale quantificazione è convenzionale ed utile solo a scopo comparativo.

Infine i metodi di livello III, che forse mai potranno essere utilizzati in ingegneria geotecnica, presumono la conoscenza statistica completa di tutte le variabili aleatorie che influiscono sulla sicurezza.

Un interessante confronto, con esempi numerici, fra metodi di diverso livello per la valutazione della sicurezza è svolto da BIAREZ *et al.* [1981] con riferimento alla capacità portante di fondazioni superficiali e profonde.

Il metodo di Rosenblueth per l'analisi probabilistica di funzioni complicate di variabili aleatorie può essere di grande utilità in ingegneria geotecnica nelle verifiche di sicurezza di livello II, poiché con esso è possibile ottenere, in modo estremamente semplice e speditivo, risultati confrontabili con quelli del metodo Monte Carlo.

Tale circostanza, verificata attraverso esempi applicativi su problemi di natura assai varia (dalla capacità portante di fondazioni superficiali, alla stabilità del pendii ed alla consolidazione edometrica) può trovare giustificazione nel fatto che la maggior parte delle funzioni di interesse geotecnico sono continue e monotone, e le leggi di distribuzione delle proprietà geotecniche sono spesso, con buona approssimazione, normali o quantomeno simmetriche.

Naturalmente l'« accuratezza » del risultato non è costante, specie per quanto riguarda i coefficienti di variazione calcolati, ma poiché, è sempre opportuno utilizzare metodi di calcolo adeguati al grado di conoscenza dei dati di ingresso, il metodo di Rosenblueth può essere, a giudizio dell'Autore, addirittura preferibile al più laborioso metodo Monte Carlo in fase di indagine preliminare e comunque in assenza di una buona base statistica sperimentale, quando cioè si è obbligati ad assumere per le variabili aleatorie di ingresso i valori dei coefficienti di variazione consigliati dalla letteratura tecnica.

SUMMARY

Approximate probabilistic analysis in Geotechnical and Foundations Engineering

In geotechnical engineering there are several different causes of uncertainty which are the results of the following:

a) the use of approximate methods and calculation schemes;

b) imperfect knowledge of the loads involved;

c) variability in the geotechnical parameters.

The first cause of uncertainty has a differing importance in different geotechnical problems. For example, it can lead to a variation in the safety factor calculated between 7% and 10% for checks on slope stability and between 70% and 90% for the bearing capacity of shallow foundations (Table 1). If there is a great deal of uncertainty about the extent to which the mathematical model used corresponds to the real conditions, a more accurate knowledge of the geotechnical characteristics does not produce effectively more reliable results, nor is there any way in which probabilistic analysis can be influence this.

As far as the second cause of uncertainty is concerned, in the case of buildings the loads which are assumed to be trasmitted to the ground derive from structural analysis and are almost always given by codes which include a suitable safety margin related to the mean or median values. Dead loads have a much lower variation than live loads. However, in the types of work in which the former are very much predominant, such as embankments, earth dams, etc., the uncertainty factor on the load is negligible. In general, with only few exceptions such as seismic loads, uncertainties regarding the actual loads are less than those due to variability in the geotechnical parameters, but the former nevertheless can be and have been dealt with on a probabilistic basis.

Finally the effects of variability in geotechnical parameters whether due to heterogeneity of the layer or to the techniques used in laboratory and in situ testing can be rationally studied by probabilistic models with the aim of acheiving a greater knowledge as to the reliability of results.

The spread of statistical methods and probability models in geotechnical and foundation engineering has been hindered for a long time for many good reasons:

— one of these is inherent in the real nature of soils which, being natural materials, have numerous and variable physical and mechanical properties whose value is gauged using a necessarily small number of samples which are generally insufficient to define the law of distribution in an acceptable quantitative way. Nevertheless, if exten-

sive geotechnical surveys have been carried out for the design and supervision of an engineering project and a large amount of data is therefore available, the statistical parameters of distribution can be directly evaluated. If, on other hand, the amount of geotechnical data is not sufficient for statistical analysis, it is still always possible to use the values of the coefficients of variation provided by the literature, which is now both extensive and reliable on this subject. In recent years systematic studies have been carried out to quantify the variability of geotechnical characteristics measured both in situ and in the laboratory and the ranges of the coefficients of variation have been determined. Tables 2 and 3 show the coefficients of variation of the main geotechnical properties.

— a further hindrance to the spread of probabilistic methods is the need to use analytical and numerical procedures which are sometimes exacting and time-consuming, not always available or, at the very least, are not always well received by design practitioners.

When the relationship between the variables is so complicated as to make analytical study difficult or impossible, the Monte Carlo simulation method is used. The drawbacks of the Monte Carlo method lie in the need to know or to assume the PDF of the independent random variables and in the large amount of numerical calculations needed to acheive a reliable result. The use of a computer is indispensable and the cost, in term of both time and money, can prove high.

This paper suggests as an alternative to the Monte Carlo method the use of a different method of probabilistic analysis [ROSENBLUETH, 1975] which allows the parameters of distributions of a function of random geotechnical variables, however complicated it is, to be calculated with an adeguate accuracy in an extremely simple and rapid way. Rosenblueth's method permits the expected value and the first moments of a function of random variables to be considered, once the first moments of such variables are known (mean and standard deviation). It is not necessary to know the probability density function of the independent random variables; it is enough if these are approximately symmetrical. In cases where it is not possible to define explicitly by an analytical relationship the functional relationship $y=f(.)$, the method is still applicable to point estimates obtained by numerical procedures. If the really significant independent random variables can be reduced to 2 or 3, as is often the case in geotechnical engineering, Rosenblueth's method becomes particularly speed and simple, especially if the number of point estimates of the independent random variables is kept to a minimum.

With the aim both of making clear the practical applicability of Rosenblueth's method and of verifying its results, several geotechnical engineering problems which have already been considered by various researchers using the Monte Carlo method have been examined and the results compared. To demonstrate the general application of the method the examples concern a wide range of topics:

— Bearing capacity factors for shallow foundations (Tables 3a, 3b)

— Earth pressure coefficients (Table 4)

— Slope stability (Tables 5a, 5b, 6, 7)

— Consolidation (Tables 8a, 8b).

It is important to emphasize that *the calculation did not require the use of computers.*

Since the majority of the functions used in geotechnical engineering are continuous and monotonic, and the PDF's for geotechnical properties are, within a reasonable margin, normal or at least symmetrical, comparison of the results is in general very satisfactory.

Naturally the « accuracy » is not constant, especially as far as the calculated coefficient of variation are concerned, but since it is always appropriate to use methods which are suited to the precision of the input data, the Rosenblueth's method can be genuinely preferable to the more laborious Monte Carlo method not only in the preliminary survey phase but also in any case where there is an absence of a good experimental data base and it is therefore necessary to take the values of the coefficients of variation given by the technical literature.

BIBLIOGRAFIA

AUGUSTI G. (1983) - *La Determinazione Probabilistica della Sicurezza Strutturale: Principi Base e « Livelli » di Calcolo.* In « Progetto delle strutture in c.a. con il metodo degli stati limite » CLUP, Milano.

AUGUSTI G., BARATTA A., CASCIATI F. (1984) - *Probabilistic Methods in Structural Engineering.* Chapman and Hall, London.

BIAREZ J., FAVRE J. L., LAREAL P., BOISSIER D. (1981) - *Caractérisation des Sols et Mésures de la Sécurité.* Proc. X ICSMFE, vol. 1, Stockholm.

BOWLES J. E. (1982) - *Foundation Analysis and Design.* Mc Graw Hill Book Company, New York.

CHANG C. S., SOONG T. T. (1979) - *A Probabilistic Approach to Consolidation Analysis.* Proc. ICASP 3, Sydney.

CHERUBINI C., COTECCHIA V., RENNA G., SCHIRALDI B. (1983) - *The Use of Bivariate Probability Density Functions in Monte Carlo Simulation of Slope Stability in Soils.* Proc. ICASP 4, Firenze.

COSTET J., SANGLERAT G. (1969) - *Cours Pratique de Mecanique des Sols.* Dunod, Paris.

I.A.E.E. (1984) - *Earthquake Resistant Regulations. A World List 1984.* Int. Ass. for Earthquake Eng.

INGRA T. S., BAECHER G. B. (1983) - *Uncertainty in Bearing Capacity of Sands.* Journ. of Geotech. Engrg., vol. 109, n. 7, July.

KRAHN J., FREDLUND D. G. (1983) - *Variability in the Engineering Properties on Natural Soil Deposits.* Proc. ICASP 4, Firenze.

LEE I. K., WHITE W., INGLES O. G. (1983) - *Geotechnical Engineering.* Pitman Pub. Inc., Marshfield, Massachusetts, U.S.A.

LUMB P. (1966) - *The Variability of Natural Soils.* Canadian Geotech. Journal, vol. 3.

MEYERHOF G. G. (1983) - *Safety Factors and Limit States Analysis in Geotechnical Engineering.* Canadian Geotech. Journal, vol. 21.

ROSENBLUETH E. (1975) - *Point Estimates for Probability Moments.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 72, n. 10.

SINGH A. (1971) - *How Reliable is the Factor of Safety in Foundation Engineering?* Proc. ICASP 1, Hong Kong.