

# Analisi limite e collasso plastico per materiali non standard ben posti

G. ROMANO \*, E. SACCO \*\*

**SOMMARIO:** Si discute l'applicabilità dei teoremi del collasso plastico nell'ambito della meccanica dei terreni con attrito alla Coulomb, e con legge di scorrimento del tipo non standard.

Il problema è ormai classico essendo stato affrontato trent'anni fa da D. C. Drucker. Un riesame critico delle argomentazioni svolte in proposito, rivela la necessità di chiarire i termini della questione alla luce dei teoremi dell'analisi limite e del collasso plastico.

Si mostra che una corretta formulazione del teorema fondamentale dell'analisi limite, in termini di potenze virtuali, consente di valutare un limite superiore del carico di collasso anche nel caso di materiali non standard.

Si pone in evidenza che la congruenza delle deformazioni plastiche in fase di collasso impone di considerare materiali plastici non standard « ben posti », per evitare il verificarsi di paradossi meccanici.

## 1. Introduzione

In una classica memoria del marzo 1954, D. C. Drucker pose il problema dell'applicabilità dei teoremi del collasso plastico al caso di materiali con attrito alla Coulomb.

Il modello considerato da Drucker è un continuo perfettamente plastico, con legge di scorrimento associata, in cui sono presenti superfici di slittamento governato dalla legge di attrito alla Coulomb.

Come è noto, un puro slittamento, non accompagnato da separazione tra le facce della superficie di scivolamento, non rispetta la legge di normalità, e dunque le ipotesi poste alla base della classica dimostrazione dei teoremi del collasso plastico [KOITER, 1960].

La questione è affrontata da Drucker osservando che [DRUCKER, 1954]: « Trouble immediately appears in the upper-bound theorem 2. The rate of internal dissipation cannot be calculated in all cases because frictional dissipation is not determined uniquely by the flow pattern. It depends not only upon relative displacement rates but also on the normal pressure on the frictional interface, a quantity which often will not be known. This type of difficulty does not appear in the lower-bound theorem 1. It might seem plausible to assume that the theorem is valid with the additional requirement that the state of stress must not violate the friction condition at the interface and must stay below yield. A simple example

shows this hopeful intuitive approach to be in error ».

Egli propone dunque il ricorso a teoremi di confronto con i due casi estremi in cui le superfici di scivolamento presentano interfacce perfettamente lisce o perfettamente saldate e con il caso di scorrimento con legge associata.

Le considerazioni di Drucker e i suoi teoremi di confronto appaiono condivisi, se non semplicemente ripetuti, nella letteratura successiva.

Infatti, vent'anni dopo, Wai-Fah Chen, allievo di Drucker alla Brown University, nel suo testo sull'analisi limite e la plasticità dei terreni, così conclude una breve esposizione dei risultati originali del maestro [CHEN, 1975]: « The upper-bound theorem II for an ideal plastic body strictly is not applicable in general for a body with frictional interfaces in which energy is dissipated by friction. However, there is a strong temptation to ignore this consideration and to include the frictional dissipation in the total rate of internal dissipation of energy in an upper-bound calculation. This will provide useful information, if not a full answer ».

La tentazione cui fa riferimento Wai-Fah Chen, e cioè di applicare comunque il teorema cinematico a dispetto della difficoltà operativa riscontrata nel valutare la potenza di dissipazione interna per attrito, rivela che la questione merita un attento riesame critico. Risulta infatti sorprendente che, se da un lato si cerca di ottenere risultati fondati su una sicura base teorica, quale quella del calcolo a rottura, dall'altro sia indispensabile o proponibile il commettere un « crimine meccanico » per giungere comunque a tali risultati.

In tempi più recenti SALENÇON [1983] ha

\* Prof. ing. Giovanni ROMANO, Ordinario di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli.

\*\* Dott. ing. Elio SACCO, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli.

svolto un'organica trattazione della tematica discussa, evidenziando i presupposti teorici della Analisi Limite e della Teoria del Collasso Plastico. Per la stima del moltiplicatore di collasso per materiali non standard, egli si rifà in definitiva ai teoremi di confronto di Drucker per la determinazione di un limite superiore, e di PALMER [1966] e RADENKOVIC [1961] per quello inferiore.

Nell'analisi del collasso plastico, in presenza di materiali con comportamento non standard, è comunque da porre una questione preliminare che non appare evidenziata nella letteratura sull'argomento: è possibile considerare materiali non standard con legge di scorrimento arbitraria, o piuttosto è necessario individuare una classe di materiali accettabili?

Per fornire un contributo inteso a chiarire la questione, è opportuno richiamare i presupposti teorici del problema. A tale scopo nei prossimi paragrafi vengono brevemente riassunti i concetti ed i risultati di base della Analisi Limite e del Collasso Plastico.

## 2. Analisi limite

Nello studio di modelli strutturali in cui si assume che gli stati tensionali ammissibili devono appartenere ad un prefissato insieme convesso, la questione fondamentale concerne la formulazione della condizione di equilibrio da imporre sui carichi. È questo il tema dell'analisi limite.

La risposta completa a tale problema è fornita [ROMANO e ROMANO 1983], in termini variazionali, dal seguente teorema:

**Teorema fondamentale della Analisi Limite**

Sia  $Q$  l'insieme convesso degli stati tensionali ammissibili e  $S(f)$  la varietà affine degli stati tensionali in equilibrio con il carico  $f$ .

Condizione necessaria e sufficiente affinché esista almeno uno stato tensionale ammissibile ed in equilibrio con il carico  $f$ , ovvero che il convesso  $S(f) \cap Q$  sia non vuoto, è che, per ogni atto di moto consentito dai vincoli, la potenza virtuale esterna compiuta dal carico sia non maggiore della corrispondente potenza virtuale interna esplicabile da un qualsiasi stato tensionale ammissibile:

In formule:

$$S(f) \cap Q \text{ non vuoto} \iff \langle \langle f, v \rangle \rangle \leq \sup [\langle s, \text{def} v \rangle / s \in Q] \quad \forall v \in L_0 \quad (1)$$

ove  $\langle ., . \rangle$ , denota la potenza virtuale,

Lo è il sottospazio degli atti di moto consentiti dai vincoli esterni, supposti fissi,  $s \in Q$  un qualsiasi stato tensionale ammissibile,  $\text{def} v$  è l'atto di deformazione corrispondente all'atto di moto  $v$ .

Il carico  $f$  è un carico limite se la varietà affine  $S(f)$  è tangente a  $Q$ . Ciò accade se e solo se la disequaglianza in (1) è soddisfatta come eguaglianza per almeno un atto di moto cui si associa un atto di deformazione non nullo [ROMANO e SACCO, 1984].

## 3. Il collasso plastico

Il fenomeno del collasso plastico di una struttura elastoplastica consiste nell'esistenza di un atto di moto ammissibile (cinematismo), cui corrisponde una velocità di deformazione plastica non nulla che rispetta la legge di scorrimento assunta per il materiale, in corrispondenza dello stato tensionale soluzione del problema elastoplastico. In un processo di carico, il carico di collasso è attinto quando lo stato tensionale soluzione appartiene alla frontiera del dominio plastico, e la legge di scorrimento consente, in corrispondenza di esso, il verificarsi di uno scorrimento plastico congruente.

La condizione di congruenza può enunciarsi [ROMANO, 1983] imponendo l'ortogonalità dello scorrimento plastico al sottospazio degli stati tensionali autoequilibrati  $S_0$ . Se la legge di scorrimento rispetta la normalità, tale condizione di ortogonalità è verificata se e solo se il carico  $f$  è un carico limite, come illustrato in figura 1. Nel caso di materiali standard ogni carico di collasso è anche carico limite e viceversa.

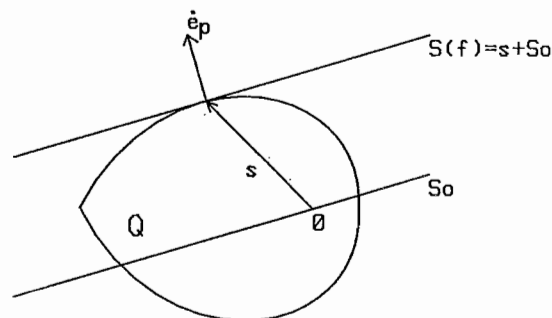


Fig. 1. - Congruenza degli scorrimenti plastici.

Se la legge di scorrimento è non standard si pone una questione preliminare: è possibile che in un processo di carico si attinga il valore limite senza che si verifichi il collasso?

Ebbene la risposta a tale problema è in generale positiva per materiali che escludono, tra i possibili scorrimenti, quelli che soddisfano la legge di normalità. In tal caso può infatti accadere che durante un processo evolutivo elastoplastico di una struttura iperstatica, lungo un processo di carico che conduce ad un carico limite, la legge di scorrimento non consenta mai velocità di deformazione plastica ortogonali a  $S_0$  (e cioè congruenti).

Il verificarsi di tale eventualità è chiaramente inaccettabile, in quanto porterebbe alla paradossale circostanza di non poter incrementare i carichi, pur essendo esclusa ogni possibilità di collasso.

Un tale paradosso non può verificarsi se si richiede che la legge di scorrimento del materiale non standard definisca, in ogni punto di frontiera del convesso degli stati tensionali ammissibili, un cono di velocità di deformazione plastica che contiene quello delle normali uscenti. In tal caso infatti ogni carico limite è anche di collasso (ma non viceversa).

I materiali non standard che soddisfano tale requisito si diranno « ben posti ».

I materiali standard giocano nella classe dei materiali plastici ben posti, un ruolo speciale: essi sono quelli che forniscono alla struttura un comportamento ottimale nei confronti del collasso.

#### 4. Conclusioni

Le considerazioni svolte consentono di trarre le seguenti conclusioni.

##### 4.1 Il Teorema Cinematico

Se si affronta il problema della possibilità o meno di equilibrio sotto un'assegnata condizione di carico, la risposta è fornita in modo completo, in termini variazionali, dal confronto tra la potenza virtuale esterna delle forze attive e la massima potenza virtuale interna esprimibile dagli stati tensionali ammissibili, in corrispondenza di un arbitrario atto di moto della struttura consentito dai vincoli.

La validità del teorema cinematico, inteso come condizione sufficiente ad escludere ogni possibilità di equilibrio, è indipendente dalla particolare legge di scorrimento assunta (associata o meno), essendo basata esclusivamente sulla convessità del dominio ammissibile degli stati tensionali.

La difficoltà incontrata nell'applicare il teorema cinematico, è in effetti originata da un equivoco di fondo. E cioè dal ritenere che la condizione di impossibilità di equilibrio sia fondata sul confronto tra la potenza compiuta dai carichi esterni e quella plastica dissipata in un meccanismo di collasso.

In effetti il confronto va fatto, in generale, tra la potenza virtuale esterna e la massima potenza virtuale interna.

Poiché per materiali standard la dissipazione plastica è uguale alla massima virtuale interna, ciò ha indotto a ritenere, a torto, che il teorema cinematico debba far sempre riferimento alla dissipazione plastica, anche per materiali non standard.

È dunque l'enunciato generale del teorema cinematico che va recitato correttamente in termini di massima potenza virtuale interna. Come tale esso è applicabile a qualsiasi materiale con superficie limite convessa.

Nelle applicazioni del teorema cinematico rivolte ad ottenere un limite superiore del moltiplicatore di collasso, è necessario considerare cinematicismi cui si associ una velocità di deformazione che sia normale al dominio limite in un punto al finito. In caso contrario la potenza virtuale interna è illimitata superiormente e la condizione di equilibrio è banalmente verificata.

Il calcolo di un limite superiore del moltiplicatore di collasso, anche nel caso di materiali non standard, va dunque eseguito come se il materiale fosse standard. È da sottolineare comunque che, in tal caso, il più piccolo limite superiore, al variare dei possibili cinematicismi di collasso soddisfacenti la legge di normalità, non fornisce in generale il valore del moltiplicatore di collasso.

Nei problemi di meccanica dei terreni in cui si ipotizzano superfici di slittamento con attrito, va dunque sempre considerato uno scorrimento accompagnato da una dilatazione pari al prodotto dello scorrimento per il coefficiente di attrito, in modo che la velocità di deformazione sia normale alla bilatera di Coulomb.

Così, nel classico problema della valutazione della stabilità delle scarpate, un limite superiore è ottenibile, in terreni dotati di attrito interno, solo mediante linee di scivolamento a forma di spirale logaritmica o rettilinee.

L'adozione di linee di scivolamento di tipo diverso, ad esempio circolare, non consente di applicare il teorema cinematico, in quanto conduce ad una potenza virtuale interna illimitata.

## 4.2 Il Teorema Statico

La validità del teorema statico, inteso come condizione sufficiente ad escludere ogni possibilità di collasso plastico della struttura, è invece condizionata direttamente dalla proprietà di normalità della velocità di deformazione plastica al convesso degli stati tensionali ammissibili.

Pertanto il teorema statico non è certamente applicabile, in generale, al caso di materiali non standard. Il controesempio riportato da Drucker, che per dirla con l'Autore « shows this hopeful intuitive approach to be in error », è dunque del tutto plausibile e ad esso se ne possono affiancare molti altri.

È piuttosto l'« hopeful intuitive approach » che appare del tutto ingiustificato.

Per la determinazione di un limite inferiore del moltiplicatore di collasso è possibile far ricorso ad un materiale standard di riferimento, nello spirito delle proposte di Radenkovic e Palmer. La condizione di applicabilità di tale metodo, e cioè che il dominio convesso di riferimento sia interno al dominio ammissibile del materiale, non implica però in generale che il materiale standard sia « ben posto ».

Al contrario per un materiale non standard « ben posto », il metodo di Palmer è sempre applicabile.

In conclusione è da osservare che comunque, per materiali non standard, il minimo moltiplicatore superiore ed il massimo inferiore, così ottenibili, in generale non coincidono. Se la stima del carico di collasso è insufficiente non resta che condurre un'analisi completa del processo evolutivo elastoplastico.

### SUMMARY

#### Limit analysis and plastic collapse for well-posed non standard materials.

In a well-known paper, DRUCKER [1954] posed the problem of the applicability of the kinematic and the static theorems of plastic collapse to the analysis of an assemblage of perfectly plastic bodies with frictional interfaces. A finite sliding friction and Coulomb's criterion are assumed.

A plastic flow in which sliding is not accompanied by a suitable dilatancy, doesn't meet the condition of normality to the convex domain of admissible stresses. Hence a basic assumption in the classical proof of collapse theorems is violated [KOITER, 1960].

Drucker's point of view can be summarized as follows:

1) An upper bound calculation, based on the kinematic theorem, requires the evaluation of the internal rate of frictional dissipation, a quantity which often will not be known.

2) A lower bound calculation, based on the static theorem, seems plausible under the additional requirement that the state of stress must not violate the friction condition. However simple examples show this intuitive approach to be in error.

These considerations have been accepted in the subsequent works on the subject until recently [CHEN 1975].

A critical review of Drucker's arguments reveal that the difficulty in the application of the kinematic theorem is due to an inadequate formulation of the theorem.

In fact the kinematic theorem of plastic collapse is a special formulation, in the case of standard materials, of the general theorem of limit analysis which yields the necessary and sufficient condition of equilibrium for the applied loads. This condition [ROMANO and ROMANO 1983] requires that for any admissible velocity field the virtual power of the external load must not exceed the corresponding maximal internal virtual power when the stress state ranges in the convex set of the admissible ones (see formula (1)).

In the case of standard materials, i.e. when the normality rule is satisfied, the plastic dissipation coincides with the maximal internal virtual power. This circumstance is responsible for the common opinion that the application of the kinematic theorem, requires the evaluation of the internal dissipation, also for non standard materials.

On the contrary a correct formulation of the general equilibrium condition, reveals that, in upper bound calculation based on the kinematic theorem, the comparison must be made between the external active and the maximal internal virtual power.

Hence the kinematisms to be considered must always give rise to strain fields which are normal to the convex set of admissible stress states at a finite point. Otherwise the internal virtual power has not a finite upper bound and the equilibrium conditions is trivially satisfied.

The evaluation of an upper bound of the collapse multiplier must then be carried out, in the case of non standard materials, exactly in the same way as for standard materials. However the smallest upper bound will not yield in general the collapse value.

For what concerns the existence of a collapse load, a preliminary observation is in order.

A « well posed » non standard flow rule must always include, among the admissible plastic flows, those which are normal to the plastic domain. Otherwise it could be possible that, in a statically indeterminate structure, there are no admissible plastic strain rates which are also kinematically compatible. In such a case the following paradoxical circumstance could occur: the limit load is attained, but the collapse is not allowed by the kinematical constraints.

Lower bound calculations via the static theorem of plastic collapse may be carried out by means of the Radenkovic-Palmer theorem which involves the construction of a convex subdomain of safe stress states. The lower bound estimate of the collapse load may however be too poor in some applications.

If the gap between the upper and the lower bounds results to be too large, a satisfactory evaluation of the collapse load must involve an evolutive elastoplastic analysis.

### BIBLIOGRAFIA

- CHEN W. F. (1975) - *Limit Analysis and Soil Plasticity*. Elsevier.  
DRUCKER D. C. (1954) - *Coulomb Friction, Plasticity and Limit Loads*. Appl. mech., vol. 21, pp. 71-74.  
KOITER W. T. (1960) - *General Theorems for Elastic-Plastic Solids*. Progress in Solids Mechanics, vol. 1, pp. 165-221.  
PALMER A. C. (1966) - *A Limit Theorem for Material with*

- non Associated Flow Rule*. J. de Mecanique, vol. 5, pp. 217-222.
- RADENKOVIC D. (1961) - *Théorems Limites pour un Matériel de Coulomb à dilatation non standardisée*. C.R. Ac. Sc. Paris, tomo 252, pp. 4103-4104.
- ROMANO G. (1982) - *Duality and Variational Principles in Structural Mechanics under Bilateral and Unilateral Constraints*. Laboratório de Computação Científica, Lectures notes, Rio de Janeiro.
- ROMANO G., ROMANO M. (1983) - *Equilibrium and Compatibility under External and Internal Convex Constraints*. Atti Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria di Catania.
- ROMANO G., SACCO E. (1984) - *Sul Calcolo di Strutture non Resistenti a Trazione*. VII Congresso Nazionale AIMETA (Trieste), sez. 5, pp. 217-226.
- SALENÇON J. (1983) - *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presse de l'école National des Ponts et Chaussées.