

**Analisi della struttura di insiemi di particelle sferiche.**

ODA M., NEMAT-NASSER S., MEHARABATI M.: *A statistical study of fabric in a random assembly of spherical granules*. Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 6, pp. 77-94, 1982.

**1. Premessa**

L'interpretazione dei fenomeni meccanici che interessano i mezzi particellari viene condotta, solitamente, mediante modelli matematici che tengono conto soltanto di alcuni dei fattori dai quali il comportamento meccanico dipende. Tra tali fattori, possono citarsi la composizione granulometrica, la forma delle particelle, l'assetto strutturale del mezzo, le azioni interparticellari e, in presenza di moti di filtrazione, le caratteristiche del fluido filtrante ed i gradienti idraulici.

L'elevato numero di grandezze in gioco e la difficoltà di rappresentarle, contemporaneamente, mediante appropriate variabili, comportano notevoli incertezze per l'elaborazione di modelli matematici sufficientemente rappresentativi del mezzo particellare e dell'evoluzione dei fenomeni che in questo possono svolgersi. Di conseguenza, si preferisce sostituire al mezzo effettivo, discontinuo, un mezzo continuo, fittizio — o più continui sovrapposti nel caso di contemporanea presenza di più fasi — al quale possono, eventualmente, essere assegnati caratteri di omogeneità ed isotropia.

Com'è noto, questo tipo di rappresentazione mostra notevoli limiti nella « descrizione » e nella previsione del comportamento meccanico, specialmente nel caso dei terreni granulari. Per tale motivo, nel corso dell'ultimo ventennio sono stati proposti modelli diversi, per mezzo dei quali si è tentato di analizzare l'influenza dell'assetto strutturale sulle proprietà meccaniche.

Gli studi sull'argomento potrebbero, al riguardo, suddividersi in due gruppi. In quelli del primo gruppo rientra l'elaborazione dei modelli per mezzo dei quali si analizza l'influenza della struttura sulle proprietà meccaniche di sistemi di particelle sferiche, identiche,

disposte secondo strutture particolarmente ordinate. Si citano, a tale proposito, le analisi teoriche della dilatazione, gli studi sulla correlazione fra la porosità e il numero di coordinazione (1), le ricerche sulla distribuzione delle forze di contatto. In tali studi, la rappresentazione è di tipo deterministico, anche se estremamente semplificata. La disposizione ordinata delle particelle, posta a base dei calcoli, non consente, infatti, di estendere agevolmente ai terreni reali le soluzioni teoriche; si possono trarre solo indicazioni qualitative sul ruolo svolto dalla struttura del materiale nei processi di deformazione e di rottura.

Al secondo gruppo appartengono quei modelli che, pur rappresentando il mezzo granulare mediante un insieme di particelle sferiche distribuite casualmente, tengono conto della composizione granulometrica di questo e studiano l'influenza di quest'ultima sull'assetto strutturale. I caratteri macroscopici del sistema particellare vengono, pertanto, espressi in funzione di appropriate variabili statistiche.

A questo settore di ricerche fa capo il significativo contributo alla « descrizione » statistica di un insieme di particelle sferiche, casualmente disposte, offerto dagli AA. con la memoria che si recensisce. Anche se affetto da alcune limitazioni derivanti da ipotesi talvolta troppo restrittive, il lavoro degli AA. costituisce, un valido punto di riferimento per le ricerche nel settore.

**2. Indici statistici dell'assetto strutturale**

Gli AA. si riallacciano, innanzitutto, ai concetti fondamentali della teoria dei grafi per rappresentare geometricamente la disposizione di un insieme di particelle sferiche di assegnata composizione granulometrica, casualmente disposte, mediante un reticolo tridimensionale; i nodi del reticolo coincidono con i centri delle sfere, i rami congiungono i centri delle sfere poste a contatto (fig. 1). La descrizione statistica dell'assetto strutturale del complesso particellare viene quindi effettuata ricercando le espressioni delle probabilità che i rami del reticolo ricadano all'

l'interno di un assegnato angolo solido elementare  $d\omega$  e che le loro lunghezze siano comprese fra un generico valore  $l$  ed il valore incrementato  $l + 2dr$ .

Con riferimento alla probabilità che i rami del reticolo ricadano all'interno dell'angolo  $d\omega$ , si noti che, in corrispondenza di ciascun contatto, esistono due versori  $\vec{n}$  e  $-\vec{n}$ , coassiali con i rami del reticolo e normali al piano di tangenza,

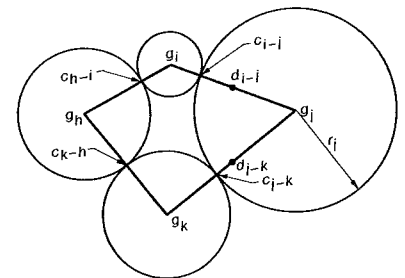


Fig. 1. - Reticolo rappresentativo del sistema particellare.

la cui posizione, con riferimento ad una terna di assi cartesiani  $X_i$ , uscenti dal punto di contatto, può specificarsi assegnando, per ciascuno di essi, due angoli  $\alpha, \beta$ , come in fig. 2a.

La densità di probabilità,  $E(\vec{n})$ , della distribuzione angolare dei rami dovrà soddisfare, pertanto, oltre la condizione di normalizzazione:

$$\int_{\omega} E(\vec{n}) \cdot d\omega = 1 \quad (1a)$$

anche la seguente:

$$E(\vec{n}) = E(-\vec{n}) \quad (1b)$$

Nella (1a) e (1b),  $d\omega$  è l'angolo solido elementare, pari a  $\sin\beta \cdot d\alpha \cdot d\beta$ , di una sfera di riferimento di raggio unitario, definita dalle relazioni  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  e  $0 \leq \beta \leq \pi$  (fig. 2b).

Per le condizioni di simmetria espres-

(1) In un mezzo granulare ogni particella è, generalmente, in contatto con le particelle contigue; il numero dei punti di contatto varia da particella a particella. Il valore medio dei numeri di punti di contatto definisce il numero di coordinazione del sistema particellare.

se dalla (1b) si può fare riferimento alla semisfera definita da  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  e

$$\iint_{\omega} E(\vec{n}) \cdot d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2 \cdot E(\alpha, \beta) \cdot \sin\beta \cdot d\alpha \cdot d\beta = 1 \quad (1c)$$

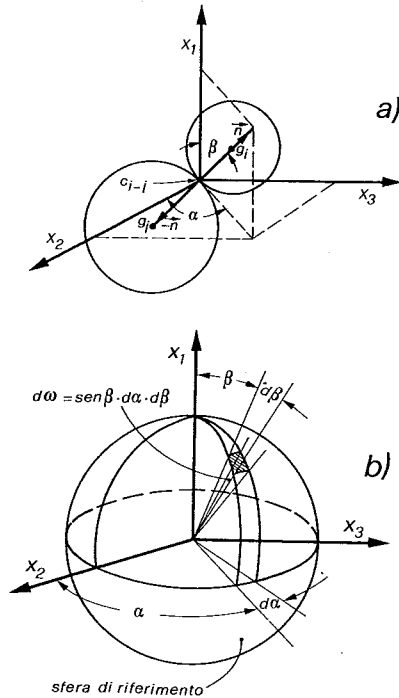


Fig. 2. - a: Vettori  $\vec{n}, -\vec{n}$  al contatto tra due particelle; b: angolo solido elementare  $d\omega$ .

Le condizioni espresse mediante le relazioni (1a) e (1b) non consentono, ovviamente, di ricavare analiticamente l'espressione della densità di probabilità  $E(\vec{n})$ ; tale determinazione è effettuata, attualmente, solo per via sperimentale. Si tratta, com'è facile intuire, di esperienze piuttosto delicate; è significativo tuttavia che, in una precedente ricerca, condotta sia su sistemi di particelle sferiche che su vari tipi di sabbie, uno degli AA. [ODA, 1972] sia riuscito a mettere in evidenza una marcata anisotropia strutturale, che si manifesta in fase di preparazione dei provini, dovuta all'esistenza del campo gravitazionale.

Per la determinazione della densità di probabilità,  $g(l)$ , della distribuzione della lunghezza  $l$  dei rami, gli AA. definiscono, preliminarmente, un volume  $V$  di ampiezza minima tale da non variare la composizione granulometrica e la struttura del mezzo in esame ed ammettono, implicitamente, che il numero di particelle contenute nel volume  $V$  sia abbastanza elevato da permettere la sostituzione delle frequenze numeriche dei raggi delle particelle con

$0 \leq \beta \leq \pi/2$ ; la (1a) può, quindi, esprimersi nel seguente modo:

i valori della densità di probabilità  $f(r)$  di questi.

Anche in questo caso la normalizzazione impone che la  $f(r)$  soddisfi la seguente relazione:

$$\int_{r_m}^{r_M} f(r) \cdot dr = 1 \quad (2)$$

essendo  $r_m, r_M$ , rispettivamente, il minimo ed il massimo valore del raggio  $r$  delle particelle. Con elementari considerazioni geometriche (v. fig. 1) può mostrarsi, inoltre, che la lunghezza  $l$

$$g^{(AB)}(l) \cdot 2dr = K \cdot f(r) \cdot dr \cdot f(l-r) \cdot dr \quad (4)$$

essendo  $K$  una costante di proporzionalità.

Se ora si considerano tutte le possibili combinazioni di due gruppi di par-

del ramo varierà fra i limiti

$$2r_m \leq l \leq 2r_M \quad (3)$$

Se si considerano, pertanto, due gruppi A e B di particelle in contatto, di raggi compresi, rispettivamente, fra  $r, r + dr$  e  $(l-r), (l-r) + dr$ , ed escludendo che le particelle di ciascun gruppo possano venire in contatto fra di loro, le lunghezze dei rami varieranno da  $l$  a  $l + 2dr$ .

È ragionevole ipotizzare che la probabilità  $g^{(AB)}(l) \cdot 2dr$  che un ramo abbia lunghezza compresa fra  $l$  e  $l + 2dr$  sia proporzionale al numero delle particelle dei due gruppi comprese nel volume  $V$ , ovvero proporzionale alle rispettive probabilità  $f(r) \cdot dr$  e  $f(l-r) \cdot dr$ . La contemporanea presenza di due gruppi di particelle statisticamente indipendenti impone, inoltre, che la probabilità  $g^{(AB)}(l) \cdot 2dr$  dipenda dal prodotto  $[f(r) \cdot dr \cdot f(l-r) \cdot dr]$ .

Può scriversi, pertanto:

ticelle che forniscono un ramo di lunghezza  $g(l)$ , fra quelle scelte nel volume  $V$ , si ottiene:

$$g(l) = (K/2) \cdot \int_{l-r_M}^{l-r_m} f(r) \cdot f(l-r) \cdot dr \quad (5)$$

Per ottenere la costante  $K$ , è sufficiente imporre la condizione di normalizzazione

$$\int_{2r_m}^{2r_M} g(l) \cdot dl = 1 \quad (6)$$

La caratterizzazione del sistema particellare è completata, inoltre, mediante la conoscenza della densità  $\delta$  di particelle e della densità  $N$  dei contatti interparticellari. La densità  $\delta$  indica il rapporto fra il numero di sfere racchiuse nel volume  $V$  — prima definito — e il volume  $V$  medesimo. La densità  $N$ , analogamente, è pari al rapporto fra il numero dei contatti interparticellari ed il volume  $V$ .

Osservato che il prodotto  $f(r) \cdot dr$  rappresenta la probabilità che le particelle di raggio compreso fra  $r$  e  $r + dr$  siano comprese nel volume  $V$ , il corrispondente numero di particelle  $dN_p$  può ricavarsi dalla seguente espressione:

$$dN_p = \delta \cdot V \cdot f(r) \cdot dr \quad (7)$$

Ne segue che il volume occupato dalle particelle di raggio compreso fra  $r$  e  $r + dr$  è dato da:

$$dV_s = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot dN_p \quad (8)$$

e quindi, il volume totale  $V_s$  delle particelle, contenuto nel volume  $V$ , è:

$$V_s = \int_{r_m}^{r_M} 4/3 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \delta \cdot V \cdot f(r) \cdot dr \quad (9)$$

Indicato con  $e$  l'indice di porosità, e sostituendo, nella (9),  $V = V_s \cdot (1 + e)$ ,

$$\delta = \frac{3}{4 \cdot \pi \cdot (1 + e) \cdot \int_{r_m}^{r_M} r^3 \cdot f(r) \cdot dr} = \frac{3}{4 \cdot \pi \cdot (1 + e) \cdot r^3} \quad (10)$$

avendo posto

$$\bar{r}^3 = \int_{r_m}^{r_M} r^3 \cdot f(r) \cdot dr \quad (11)$$

La densità particellare  $\delta$ , come indicato dalla (10), dipende dall'indice di porosità ( $e$ ) e dalla composizione granulometrica del mezzo particellare tramite la funzione  $f(r)$ . È facile verificare che il valore di  $\delta$  si riduce all'aumen-

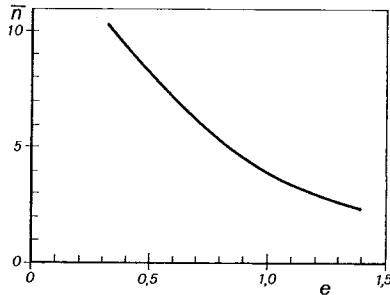


Fig. 3. - Relazione tra il numero di coordinazione  $\bar{n}$  e l'indice di porosità  $e$  [ODA, 1977].

$$N = \frac{N^{(v)}}{V} = \frac{1}{2} \cdot \bar{n} \cdot \delta = \frac{3 \cdot G(e)}{8 \cdot (1 + e) \cdot \bar{r}^3} \quad (14)$$

È opportuno notare, ai fini degli sviluppi successivi della trattazione, che, potendosi associare ad ogni contatto un ramo del grafo, il numero  $N^{(v)}$  esprime il numero totale dei rami del grafo contenuti nel volume  $V$ ; di conseguenza, la (14) esprime anche la densità dei rami del grafo.

Per l'espressione  $\bar{n} = G(e)$ , gli AA. scelgono una relazione del tipo  $\bar{n} \cdot e = \text{cost.}$ , nella quale, dall'interpolazione dei dati sperimentali disponibili, il valore della costante risulta all'incirca pari a 4.

A questo proposito, tuttavia, è opportuno segnalare che, recentemente, è stata posta in discussione [GOURVES, 1981] la validità della relazione (12), dal momento che l'indice di porosità dipende, oltre che dalla disposizione relativa delle particelle, anche dalla granulometria del materiale, dalla forma delle particelle, dallo stato della superficie esterna, dalle dimensioni dei grani  $e$ , nel caso di materiale costipato, dalla modalità di formazione del mezzo. A conferma di quest'osservazione sono stati evidenziati ampi scostamenti dei valori di  $\bar{n}$  rispetto a quelli forniti dalla (12), soprattutto per distribuzioni del numero di contatti che non si conformano al modello di Gauss, come di regola avviene nel caso di materiali costipati o non bene assortiti [GARCIA-BENGOCHEA *et al.*, 1979; MC KINLAY e SAFFULLAH, 1980].

Molte delle conclusioni, a cui pervengono gli AA., basandosi sulla citata re-

lare sia dell'indice di porosità che del termine  $r^3$ . Quest'ultimo, a sua volta, aumenta con il crescere delle dimensioni delle particelle; inoltre, fissati i valori minimo e massimo del raggio, il termine  $r^3$  cresce con il valore della frequenza numerica delle particelle più grandi.

Per il calcolo della densità  $N$  dei contatti interparticellari, gli AA. fanno ricorso ai risultati (fig. 3) di una precedente indagine sperimentale, [ODA, 1977], dalla quale traggono argomenti per ritenere la relazione fra l'indice di porosità  $e$  ed il numero di coordinazione  $\bar{n}$  indipendente dalla composizione granulometrica. Ponendo, pertanto

$$\bar{n} = G(e) \quad (12)$$

ed osservando che il numero dei contatti  $(?)$  interparticellari all'interno del volume  $V$  è

$$N^{(v)} = \frac{1}{2} \bar{n} \cdot \delta \cdot V \quad (13)$$

si può scrivere

lazione, sono pertanto da accettare con riserva.

### 3. Il tensore strutturale

L'analisi statistica delle caratteristiche geometriche più significative del reticolo, che rappresenta il sistema particellare, ha consentito agli AA. di ottenere le espressioni di parametri che possono essere posti in relazione con le proprietà meccaniche del sistema.

A tale proposito, dopo aver considerato un generico piano  $\nu$  di versore  $\vec{v}$ , che separa le particelle in due gruppi, in dipendenza della posizione del centro delle particelle rispetto al piano, con considerazioni analoghe a quelle esposte precedentemente, gli AA. pervengono all'espressione del numero medio  $N^{(v)}$  di intersezioni per unità di area fra i rami del reticolo ed il piano  $\nu$  e all'espressione della funzione  $E^{(v)}(\vec{n})$  che rappresenta la densità di probabilità di rami che intercettano il medesimo piano  $\nu$ .

Gli AA. utilizzano le grandezze precedentemente introdotte, nello studio del comportamento meccanico del mezzo particellare, per passare dalla distribuzione delle forze di contatto, effettivamente agenti fra le particelle, ad uno stato di sforzo, convenzionalmente definito sui singoli elementi piani passanti per un generico punto.

A tale scopo, gli AA., innanzitutto, sommano vettorialmente i rami che

intercettano un'area unitaria di un piano arbitrariamente orientato; mostra, quindi, che la citata operazione fornisce come risultato, formalmente, un « tensore strutturale » del secondo ordine, le cui componenti,  $F_{ij}$  (con  $i, j = 1, 2, 3$ ), rappresentano le proiezioni, sull'asse  $X_j$ , della somma vettoriale dei rami relativa a una superficie unitaria, la cui normale è diretta secondo l'asse  $X_i$ .

L'espressione finale della componente  $F_{ij}$ , a cui pervengono, può scriversi come segue:

$$F_{ij} = N \cdot l \int_{\omega} n_i \cdot n_j \cdot E(\vec{n}) \cdot d\omega \quad (22)$$

in cui

$$\bar{l} = \int_{2r_M}^{2r_m} l \cdot g(l) \cdot dl$$

è pari al valore medio delle lunghezze dei rami, mentre  $n_i, n_j$  rappresentano

le componenti del versore  $\vec{n}$ , rispettivamente, lungo gli assi  $X_i, X_j$  della terna di riferimento.

Questa grandezza, come mostrano gli AA. in una memoria successiva, rappresenta l'equivalente « discreto » dell'usuale tensore degli sforzi  $\sigma_{ij}$  della Meccanica del Continuo.

È importante osservare che le componenti del tensore sono definite in funzione

della densità di probabilità,  $E(\vec{n})$ , precedentemente introdotta e determinata sperimentalmente da vari Autori. Quest'ultima, in base ai risultati degli studi condotti da uno degli AA. [ODA, 1980], può essere rappresentata, approssimativamente, da un ellissoide.

Tale circostanza induce gli AA. a rappresentare geometricamente la struttura di un mezzo particellare mediante un ellissoide, definito dalle seguenti proprietà:

- 1) ad ogni elemento  $\Delta S'_{(\alpha)}$  della sua superficie corrisponde una superficie di contatto  $\Delta S_{(\alpha)}$  nel sistema particellare;
- 2) le superfici coniugate  $\Delta S'_{(\alpha)}$  e  $\Delta S_{(\alpha)}$  ammettono normali, di versori  $\vec{n}'$  e  $\vec{n}$ , parallele (fig. 4).

È da puntualizzare, tuttavia, che, per la definizione delle caratteristiche geometriche dell'ellissoide, gli AA. introducono ipotesi restrittive sulla superficie di contatto  $\Delta S_{(\alpha)}$ . Queste, peraltro, non risultano confermate sperimentalmente e limitano, di conseguenza, la validità e l'utilità della rappresentazione proposta.

(2) Il punto di contatto è un punto della superficie esterna della particella; il contatto  $c_{ij}$  di due particelle  $i$  e  $j$  consiste, invece, nella condizione di tangenza delle due particelle. Di conseguenza, ad ogni contatto  $c_{ij}$  corrispondono due punti di contatto, relativi, rispettivamente, uno alla particella  $i$  e l'altro alla particella  $j$ .

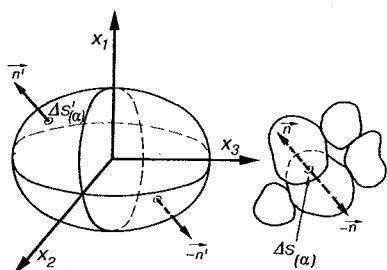


Fig. 4. - Rappresentazione dell'assetto strutturale.

#### 4. Conclusioni

La formulazione delle leggi di una meccanica di mezzi costituiti di particelle di dimensioni finite non è, attualmente, un obiettivo facilmente raggiungibile. La descrizione quantitativa dell'assetto strutturale dello scheletro solido ne rappresenta, tuttavia, una imprescindibile tappa.

Gli AA. forniscono, innanzitutto, una descrizione del sistema particellare per mezzo di alcuni parametri geometrici, definiti statisticamente e correlati alla porosità del sistema. Sulla base di questi determinano, successivamente, nuovi indici statistici per caratterizzare

globalmente l'assetto strutturale del mezzo particellare, con particolare riferimento alla distribuzione delle forze fra i punti di contatto delle particelle.

Il risultato più significativo è costituito dalla definizione e dalla proposta di un tensore simmetrico del secondo ordine, espresso in funzione della distribuzione angolare dei rami.

Al riguardo, appare abbastanza fondata, oltre che auspicabile, la possibilità, lasciata intravedere dagli AA., di pervenire ad un sistema completo di equazioni costitutive che correlino l'assetto strutturale e la sua evoluzione spazio-temporale con le grandezze tensoriali (sforzi, deformazioni) comunemente impiegate nel sistema fittizio continuo.

Tale sviluppo della ricerca è certamente interessante anche se, è da osservare, l'assetto strutturale del mezzo non può ritenersi completamente definito se alla descrizione statistica della disposizione relativa delle particelle non sono associate le analoghe grandezze relative alla disposizione reciproca dei pori e alla distribuzione delle dimensioni di questi ultimi.

(Francesco Federico)

#### BIBLIOGRAFIA

- GARCIA - BENGOCHEA I., LOVELL C. V., WOOD L. E. (1979) - *The use of pore size distribution parameters to predict permeability*. Proc. 7th I.C.S.M.F.E., vol. 2, pp. 49-56.
- GOURVES R. (1981) - Discussion of the paper: *Particle contacts in discrete materials*. J. of the Geotechnical Engineering Division, Proc. of the A.S.C.E., vol. 107, n. GT 10, p. 1437.
- MC KINLAY D. G., SAFIULLAH A. M. M. (1980) - *Pore distribution and permeability of silty clays*. J. of Geotechnical Engineering Division, Proc. of the A.S.C.E., vol. 106, n. GT 10, pp. 1165-1170.
- ODA M. (1972) - *Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material*. Soils and Foundations, vol. 12, n. 1, pp. 17-36.
- ODA M. (1977) - *Co-ordination number and its relation to shear strength of granular material*. Soils and Foundations, vol. 17, n. 2, pp. 29-42.
- ODA M., KONISHI J., NEMAT-NASSER S. (1980) - *Some experimentally based fundamental results on the mechanical behaviour of granular materials*. Geotechnique 30, n. 4, pp. 479-495.