

# Determinazione della resistenza di una sabbia mediante prove di taglio diretto

G. SCARPELLI \*

**SOMMARIO:** La resistenza di una sabbia, determinata attraverso prove di taglio diretto, assume valori diversi se diverse sono le ipotesi che si fanno per caratterizzare lo stato di rottura del provino. Alcune prove sperimentali mostrano che la superficie di rottura può essere assimilabile ad un piano sul quale le deformazioni incrementali sono nulle. In questo caso, la resistenza della sabbia non è funzione soltanto dello stato di sforzo medio sul piano, ma dipende anche dalla dilatanza sviluppata in condizioni di rottura.

## 1. Introduzione

La determinazione delle caratteristiche di resistenza di un materiale granulare mediante prove di taglio diretto è una procedura largamente utilizzata nella pratica, soprattutto per la semplicità del dispositivo sperimentale che si impiega.

La valutazione dei parametri di resistenza si basa normalmente sulle ipotesi di validità del criterio di Mohr-Coulomb e di coincidenza del piano di rottura con quello di massima obliquità dello stato di sforzo, dove il rapporto fra tensione tangenziale e normale al piano assume il suo valore massimo.

Pertanto, le caratteristiche di resistenza che si ottengono dai risultati sperimentali derivano da un'interpretazione essenzialmente statica del fenomeno della rottura che si produce durante una prova di taglio diretto. Nelle specifiche condizioni di prova invece, la rottura si determina piuttosto per vincoli di carattere cinematico con la presenza di superfici di discontinuità all'interno dei provini, di cui si deve tenere conto nella valutazione dei risultati ottenuti.

Infatti, in prossimità della rottura, le deformazioni del materiale tendono a concentrarsi nella regione centrale del provino in corrispondenza del piano medio della scatola di taglio, mentre nelle rimanenti zone le deformazioni sono molto piccole. In queste condizioni, il processo di rottura è simile a quello che si determina per lo scorrimento relativo di due corpi rigidi in contatto fra loro lungo una superficie inestensibile.

La precedente caratterizzazione cinematica della rottura conduce ad ipotesi differenti per

la valutazione dei risultati sperimentali ed a differenti valori della resistenza del materiale.

In particolare, se si assume che il piano di rottura coincida con uno dei piani lungo il quale gli allungamenti sono nulli, il valore dell'angolo di attrito  $\phi'$  che si ottiene dall'analisi dei risultati sperimentali è maggiore di quello che si può derivare con l'ipotesi che sul piano di rottura lo sforzo raggiunga la massima obliquità.

Alcune prove sperimentali eseguite nel corso di una ricerca sulla formazione di bande di rottura nelle sabbie confermano l'allineamento delle direzioni di non estensione con il piano di rottura, perlomeno per i valori medi degli sforzi che si avevano durante le prove.

In questa nota, il criterio di valutazione dei parametri di resistenza dai risultati delle prove di taglio diretto viene riformulato e generalizzato per tenere conto delle osservazioni sperimentali. Il valore dell'angolo di attrito che si ottiene con il criterio proposto viene esaminato anche alla luce dei risultati di prove eseguite da altri autori sullo stesso materiale.

## 2. Definizioni e simboli

Per un materiale granulare asciutto, il principio degli sforzi efficaci stabilisce la coincidenza tra sforzi efficaci e sforzi totali, e pertanto nel seguito non si farà alcuna distinzione fra di essi. Gli sforzi di compressione vengono considerati positivi.

Per uno stato di deformazione piana, le uniche componenti non nulle del tensore degli sforzi  $[\sigma]$  sono  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ . Il cerchio di Mohr rappresentativo dello stato tensionale sul piano  $x, z$  è indicato, per un tipico elemento di terreno, in fig. 1. Se  $P_d$  è il polo delle dire-

\* Dott. ing. Giuseppe SCARPELLI - Ricercatore - Laboratorio Geotecnico, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Università di Roma.

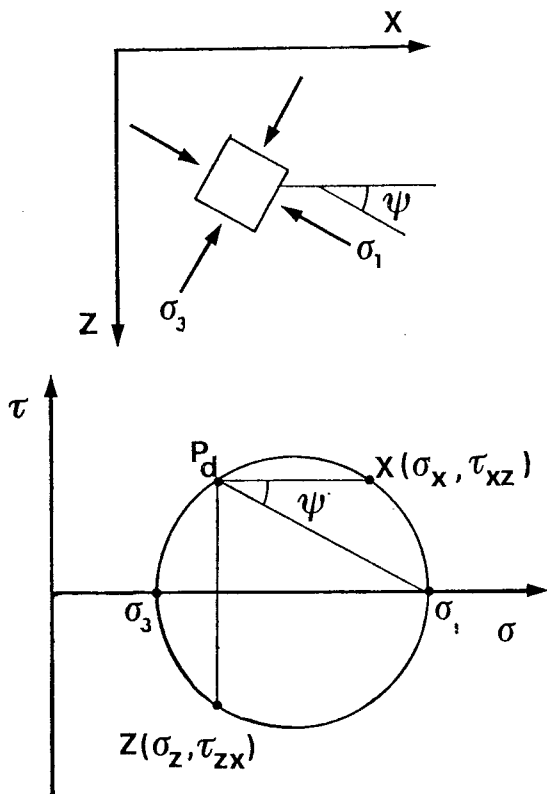


Fig. 1. - Cerchio di Mohr per lo stato di sforzo.

zioni, il punto X di coordinate  $(\sigma_x, \tau_{xz})$  individua gli sforzi agenti sul piano verticale, mentre Z di coordinate  $(\sigma_z, \tau_{zx})$  quelli agenti sul piano orizzontale. Se  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  sono i valori degli sforzi principali massimo e minimo rispettivamente, la direzione principale massima è individuata dall'angolo  $\psi$  che essa forma con la direzione orizzontale di riferimento.

$$\psi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2 \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}$$

L'angolo  $\psi$  si assume positivo in senso orario.

Si definisce inoltre « obliquità dello stato di sforzo » su un determinato piano di normale n l'angolo:

$$\varphi_m = \tan^{-1} \frac{\tau_n}{\sigma_n}$$

dove  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  sono gli sforzi normale e tangenziale che agiscono sul piano. In particolare, l'angolo di obliquità sul piano orizzontale risulta

$$\varphi_m = \tan^{-1} \frac{\tau_{zx}}{\sigma_z}$$

In condizioni di deformazione piana le componenti non nulle del tensore della velocità di deformazione  $[\dot{\epsilon}]$  sono:

$$\dot{\epsilon}_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_z = -\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \dot{\gamma}_{xz} = -\left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

dove u e w sono le componenti della velocità di spostamento in un punto del piano di deformazione, parallele agli assi x e z rispettivamente. La convenzione sui segni è concorde a quella stabilita per gli sforzi.

Il cerchio di Mohr relativo ad uno stato di deformazione per un elemento è indicato in fig. 2. Se con  $P_d$  si indica il polo delle direzioni, assumendo come riferimento la direzione orizzontale individuata dall'intersezione X  $(\dot{\epsilon}_x, \dot{\gamma}_{xz}/2)$  con il cerchio di Mohr, la direzione delle velocità di deformazione massima è individuata dall'angolo  $\xi$ , positivo in senso orario

$$\xi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_z}$$

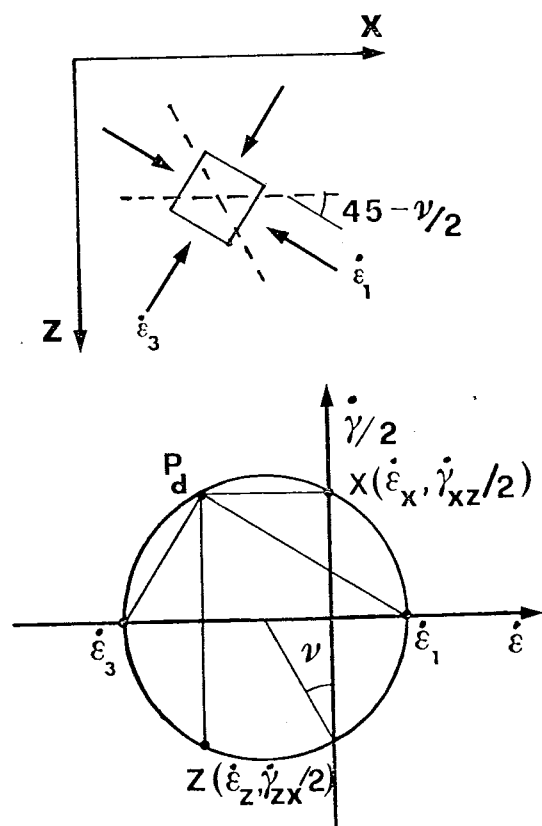


Fig. 2. - Cerchio di Mohr per lo stato di deformazione incrementale.

Si definiscono inoltre, la velocità di deformazione volumetrica

$$\dot{v} = \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3$$

la massima velocità di distorsione,

$$\dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3 = \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_z)^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2}$$

e l'angolo di dilatanza:

$$\nu = \sin^{-1} \left[ - \frac{\dot{v}}{\dot{\gamma}} \right]$$

### 3. Il criterio di Mohr Coulomb: definizione delle condizioni di rottura

Con il criterio di Mohr-Coulomb, la condizione di rottura viene di norma definita in base a sole considerazioni di tipo statico. In particolare la rottura viene raggiunta quando su un piano dell'elemento di terra l'angolo di obliquità  $\varphi_m$  raggiunge il suo valore massimo (o di picco)  $\varphi_p$ . In queste condizioni il cerchio di Mohr rappresentativo dello stato tensionale a rottura (fig. 3) è tangente ad una coppia di rette

che con la loro pendenza individuano l'angolo di attrito di picco  $\varphi_p$ .

D'altra parte, uno stato di rottura può essere caratterizzato in alcuni casi anche con considerazioni di tipo cinematico. In una prova di taglio diretto, la condizione di rottura si raggiunge attraverso l'imposizione di uno scorrimento fra due parti del provino che nel loro interno rimangono pressoché indeformate.

In questo modo la direzione del piano di scorrimento, per compatibilità cinematica, deve essere allineata con una delle linee di « non-estensione » del campo delle deformazioni incrementali. Con riferimento allo stato di deformazione indicato in fig. 2, si possono individuare due direzioni caratteristiche per le quali vale la condizione  $\dot{\epsilon} = 0$  le cui inclinazioni, che dipendono dall'angolo di dilatanza  $\nu$  del materiale, risultano di  $\pm (45^\circ - \nu/2)$  rispetto alla direzione di deformazione principale massima  $\dot{\epsilon}_1$  rispettivamente.

Le differenti ipotesi che si possono fare per definire una condizione di rottura si riflettono immediatamente in un differente modo di interpretare le prove e ricavarne le caratteristiche di resistenza del materiale.

Con riferimento specifico alla determinazione della resistenza di una sabbia mediante prove di taglio diretto, se si assume che il piano orizzontale sul quale si impone lo scorrimento sia coincidente con un piano di massima obliquità dello sforzo (ipotesi di Coulomb) evidentemente (fig. 3) la resistenza della sabbia può essere ricavata dalla semplice relazione:

$$\varphi_p = \tan^{-1} \left[ \frac{\tau_{zx}}{\sigma_z} \right]_p \quad (1)$$

dove il rapporto  $(\tau_{zx}/\sigma_z)_p$  rappresenta il massimo ottenuto nel corso della prova. Inoltre, la direzione del piano di rottura rispetto, ad esempio, alla direzione principale massima dello stato di sforzo è individuata dall'angolo  $\psi = 45^\circ - \varphi/2$ .

Quando si fa l'ipotesi di allineamento del piano di rottura con una linea di non estensione [ROSCOE, 1970], per determinare la resistenza della sabbia è necessario collegare fra di loro il campo degli incrementi di deformazione con quello degli sforzi nell'elemento di terra. Un modo usuale di introdurre questo collegamento è di assumere valida l'ipotesi di coassialità, cioè di coincidenza fra le direzioni principali dei due campi tensoriali.

Nella teoria classica della plasticità [HILL,

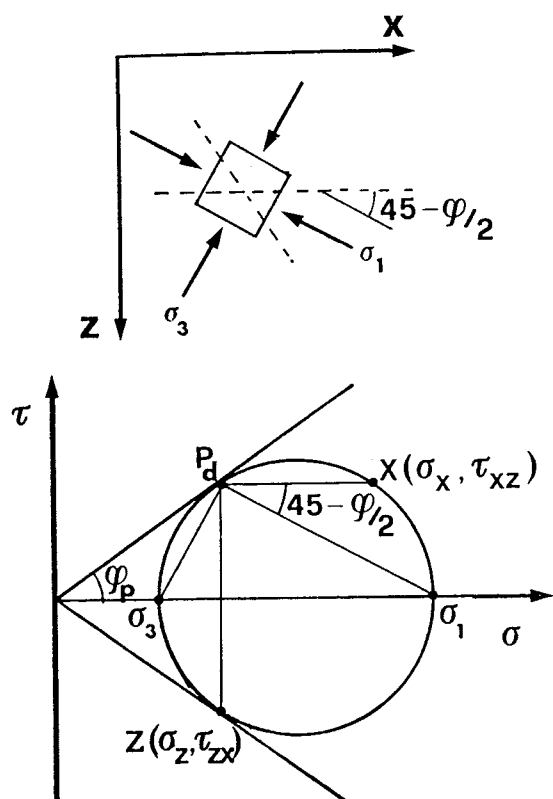


Fig. 3. - Soluzione di Coulomb: coincidenza del piano di rottura con uno di massima obliquità dello sforzo.

1950], l'ipotesi di esistenza di un potenziale plastico da cui derivare gli incrementi di deformazione plastica  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  insieme a quella di isotropia, sono condizioni sufficienti per la validità della ipotesi di coassialità. Questa si basa sulla osservazione sperimentale del comportamento dei metalli per i quali la direzione degli incrementi di deformazione durante la plasticizzazione dipende dallo stato di sforzo iniziale e non dalla entità degli incrementi applicati.

Nella ipotesi di coassialità le rappresentazioni degli sforzi e degli incrementi di deformazione con cerchi di Mohr sono geometricamente simili e possono tradursi in un unico diagramma, come in fig. 4. In queste ipotesi, pertanto, la direzione orizzontale, coincidente con quella del piano di rottura forma un angolo di  $45^\circ - \nu/2$  con la direzione dello sforzo principale massimo, mentre i piani di massima obliquità formano con quello di scorrimento degli angoli  $\delta_1 = (\varphi_p + \nu_p)/2$  e  $\delta_2 = \pi/2 - (\varphi_p + \nu_p)/2$  rispettivamente.

La resistenza del materiale risulta pertanto una funzione non solo del livello di sforzo  $\tau_{zx}/\sigma_z$  ma anche del corrispondente angolo di dilatanza:

$$\sin \varphi_p = \left[ \frac{\tau_{zx}/\sigma_z}{\cos \nu + \tau_{zx}/\sigma_z \cdot \sin \nu} \right]_p \quad (2)$$

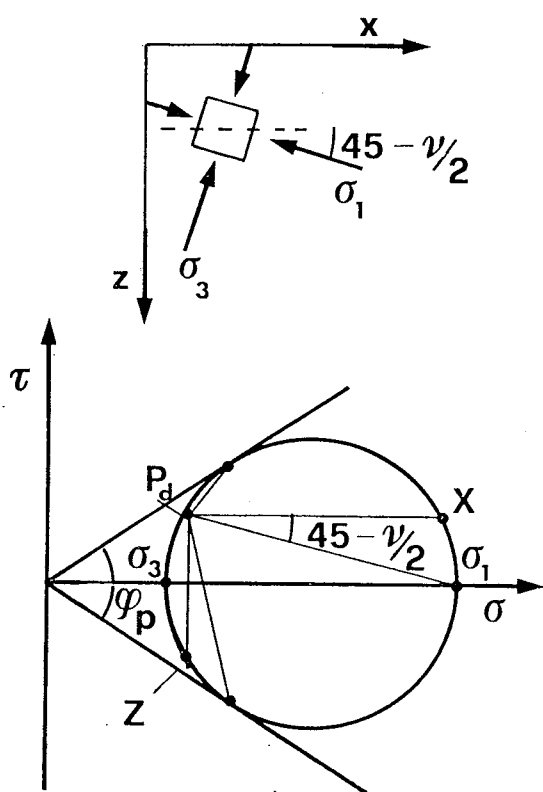


Fig. 4. - Soluzione di Roscoe: allineamento del piano di rottura con una delle direzioni di non estensione.

L'espressione (2), originariamente ottenuta da DAVIS [1968], può in generale ritenersi valida non soltanto in corrispondenza del valor massimo della resistenza (picco della curva sforzi-deformazioni), ma anche durante la maggior parte del processo che porta il campione di sabbia in condizioni di rottura quando, al crescere delle deformazioni di taglio, si entra nel campo di validità dell'ipotesi di coassialità [ROSCOE, 1970].

Nel caso particolare di dilatanza nulla la relazione precedente fornisce un semplice legame fra l'obliquità dello sforzo sul piano di rottura  $\varphi_m$  e angolo di attrito di picco  $\varphi_p$ . Si ha infatti, per  $\nu = 0$

$$\sin \varphi_p = \tan \varphi_m \quad (3)$$

In questa forma, il legame fra angolo di obliquità e resistenza è stato proposto da HILL [1950] in un breve paragrafo dedicato alla Meccanica dei Terreni, nel suo trattato di Teoria della Plasticità. Nel rappresentare i risultati di una prova di taglio diretto nel piano  $\tau - \sigma$ , Hill fa distinzione fra l'involuppo E dei cerchi di Mohr relativi a stati di rottura ed il luogo F costituito dai punti per i quali lo sforzo tangenziale è massimo. Con le ipotesi di coassialità e di allineamento del piano di rottura con una linea di non estensione del campo delle deformazioni, attraverso le prove sperimentali è solo possibile determinare il luogo F e non l'involuppo dei cerchi di Mohr E che invece può essere ricavato utilizzando la relazione (3).

L'affermazione di Hill è in accordo con le conseguenze di una caratterizzazione cinematica della superficie di rottura ma, per quanto detto in precedenza, richiede l'ulteriore ipotesi che la rottura si manifesti come un processo in cui lo scorrimento avviene senza variazioni di volume e cioè secondo una definizione usuale, in condizioni di stato critico.

La variazione della differenza  $(\varphi_p - \varphi_m)$  in funzione dell'angolo  $\varphi_m$  e della dilatanza  $\nu$  è illustrata in fig. 5. Dall'esame di questo diagramma appare evidente come la soluzione di Roscoe fornisca valori di  $\varphi_p$  che sono sempre maggiori di quelli che corrispondono alla soluzione di Coulomb, con una distanza fra le due soluzioni che è crescente al crescere dell'obliquità sul piano di rottura, ed al diminuire della dilatanza.

Diverse espressioni per il calcolo della resistenza di una sabbia in prove di taglio diretto possono essere ottenute adottando diverse ipotesi per la caratterizzazione cinematica della

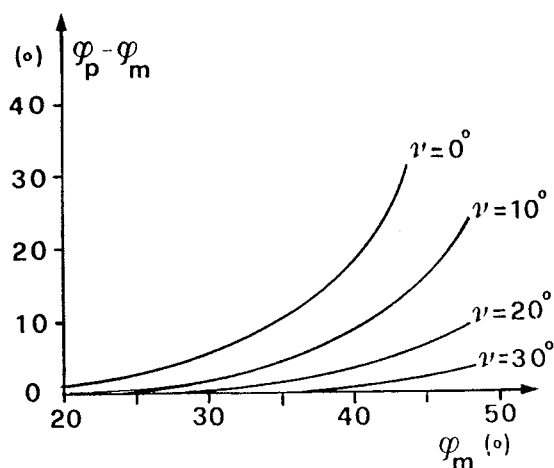


Fig. 5. - Distanza fra le soluzioni di Roscoe e di Coulomb.

rottura. HOULSBY e WROTH [1980] forniscono un'ampia classificazione delle discontinuità ammissibili per i terreni. Fra queste, uno schema di rottura che si adatta allo scopo è rappresentato dalla discontinuità delle velocità di deformazione. Questa si realizza (fig. 6) con una regione o banda di rottura in cui si concentrano le deformazioni e che è separata mediante due superfici di contorno dalle zone esterne dove le deformazioni del materiale sono molto piccole.

Le caratteristiche cinematiche della discontinuità possono essere determinate osservando che la condizione di congruenza richiede che attraverso le superfici di contorno, siano continue solo le componenti  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial w}{\partial x}$  del gradiente della velocità di spostamento, mentre la componente  $\frac{\partial u}{\partial z}$  può assumere valori diversi da una parte all'altra della discontinuità. È pertanto possibile assumere che nella zona in cui si concentrano le deformazioni valgono le seguenti condizioni:

$$\dot{\epsilon}_x \approx 0 \quad \dot{\gamma}_{xz} \approx - \frac{\partial u}{\partial z}$$

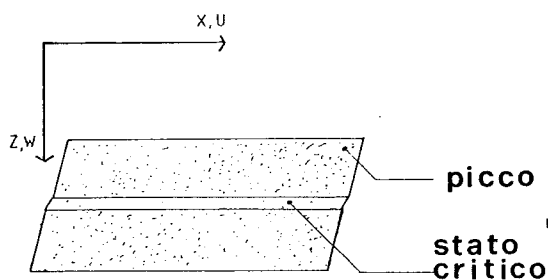


Fig. 6. - Schematizzazione di un elemento di terreno attraversato da una discontinuità.

Con riferimento ad una prova di taglio condotta su una sabbia addensata per la quale un tipico legame sforzi-deformazioni accoppia angoli di attrito massimi ( $\phi_p$ ) a piccole deformazioni e minimi ( $\phi_{cv}$ ) a grandi deformazioni, una caratterizzazione statica delle discontinuità può essere ottenuta supponendo che all'interno della banda di rottura,  $\phi = \phi_{cv}$  e  $v = 0$  mentre nelle zone esterne,  $\phi = \phi_p$  e  $v = v_p$  attribuendo così le condizioni di stato critico al materiale che si trova nella banda di scorrimento e quella di picco al resto del provino.

Sulla base delle precedenti assunzioni, cui si aggiunge l'ipotesi di coassialità, è allora possibile determinare completamente lo stato di deformazione e di sforzo in tutto il materiale. Poiché la sabbia all'interno della banda di rottura è in condizioni di stato critico, il cerchio di Mohr degli incrementi di deformazione ha il centro coincidente con l'origine degli assi coordinati, inoltre essendo  $\dot{\epsilon}_x \approx 0$  e  $v = 0$ , anche  $\dot{\epsilon}_z \approx 0$  e lo stato di deformazione in direzione orizzontale è rappresentato dal punto  $X_b$  (fig. 7a) coincidente con il polo delle direzioni  $P_d$ . Lo stato di sforzo del materiale all'interno della banda di rottura è determinato (fig. 7b) da un cerchio di Mohr che ha, nel piano  $\tau - \sigma$ , la stessa geometria di quello precedente e che è tangente ad una retta inclinata dell'angolo di attrito a volume costante  $\phi_{cv}$ .

Nelle zone esterne, lo stato di sforzo può essere ricavato se si osserva che, per l'equilibrio, lo sforzo normale  $\sigma_z$  si deve mantenere costante attraverso la discontinuità e che pertanto il cerchio di Mohr relativo alle zone circostanti la banda di rottura è individuato dal punto Z che rappresenta lo stato di sforzo sul piano orizzontale, e dalla condizione di tangenza alla retta inclinata dell'angolo di attrito di picco  $\phi_p$ . Due soluzioni sono staticamente ammissibili (fig. 7c e d) che forniscono rispettivamente una compressione (fig. 7e) ed una dilatazione (fig. 7f) della discontinuità.

L'angolo di attrito di picco  $\phi_p$  risulta legato al livello di sforzo  $\tau_{zx}/\sigma_z$  dalla relazione seguente:

$$\sin \phi_p = \frac{\tau_{zx}/\sigma_z}{\cos 2\alpha + \tau_{zx}/\sigma_z \sin 2\alpha} \quad (4)$$

L'angolo  $\alpha$  misura la rotazione delle direzioni principali nel passaggio fra l'interno e l'esterno della banda di rottura. Come si può ricavare dalla fig. 7 (c e d), risulta legato sia all'angolo di attrito di picco  $\phi_p$  che a quello che si ha in

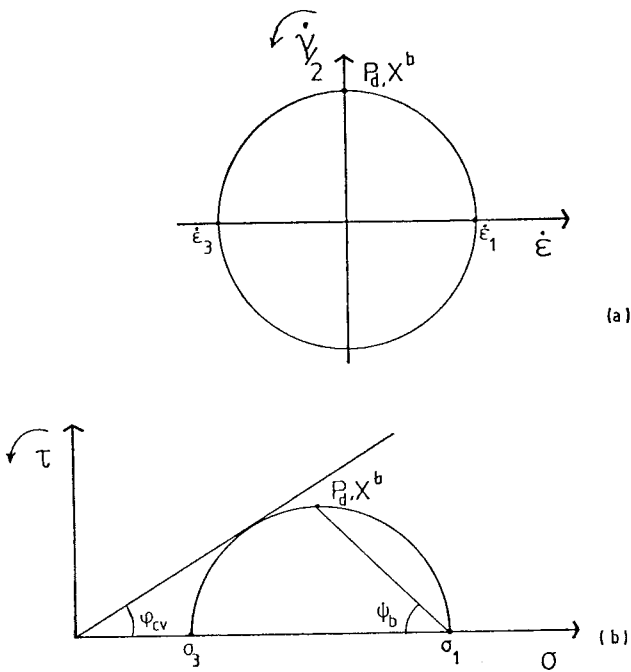
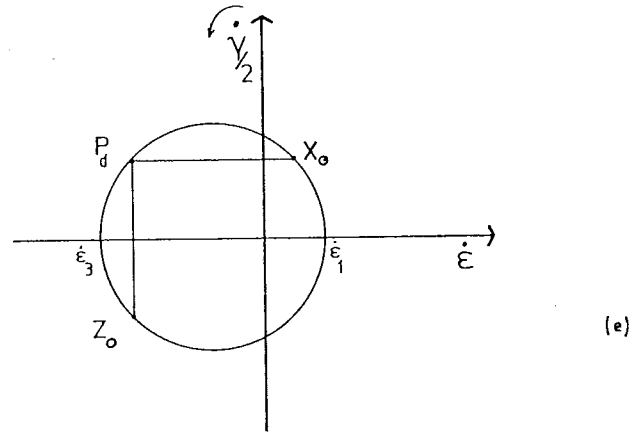
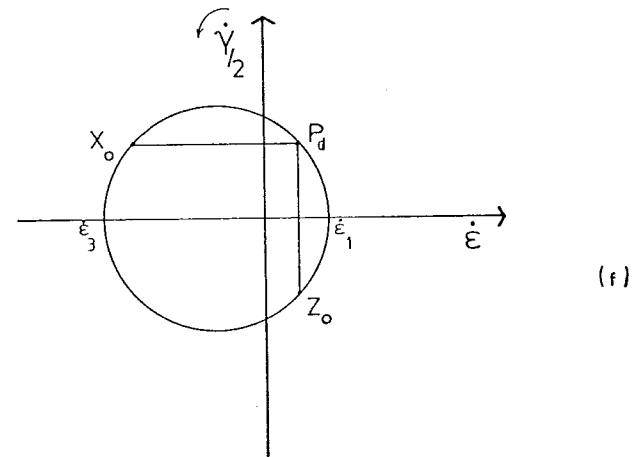


Fig. 7. (a, b) - Stato di sforzo (a) e di deformazione (b) per il terreno contenuto nella banda di scorrimento.

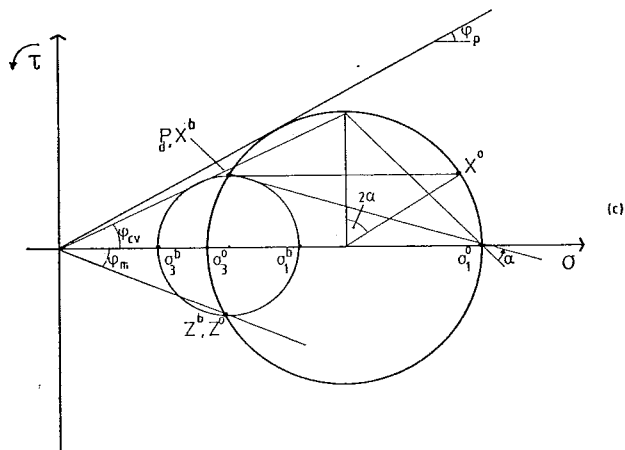


(e)

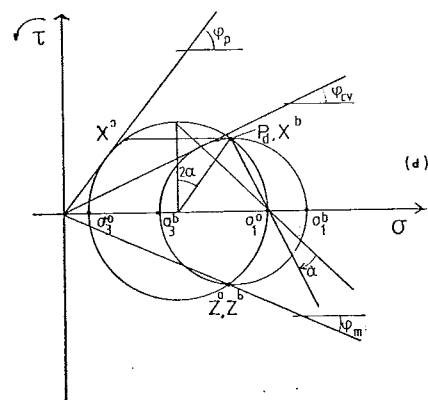


(f)

Fig. 7. (e, f) - Contrazione (e) o dilatazione (f) della discontinuità.



(c)



(d)

Fig. 7. (c, d) - Aumento (c) o riduzione (d) dello stato di sforzo nel passaggio dall'intero (indice b) all'esterno (indice o) della banda di scorrimento.

condizioni di stato critico  $\varphi_{cv}$  ed è pertanto una quantità indeterminata. Per ricavare l'angolo di attrito  $\varphi_p$  attraverso la relazione (4) è necessario ricorrere ad una non facile determinazione sperimentale dell'angolo  $\alpha$  e pertanto le considerazioni precedenti non risultano di pratico impiego. Queste però, sembrano concettualmente utili perché permettono di evidenziare alcuni aspetti caratteristici che sono alla base dei metodi che si possono impiegare per valutare la resistenza di un elemento di materiale sabbioso quando è attraversato da una superficie di rottura.

#### 4. Osservazioni sperimentali ed analisi dei risultati

Un apparecchio di taglio diretto è stato appositamente costruito per consentire la misura degli spostamenti interni e le osservazioni della formazione di superfici di discontinuità in terreni granulari, nell'ambito più generale di una ricerca sulle bande di rottura [SCARPELLI, 1981].

L'apparecchio di taglio è realizzato in legno, ma presenta i due lati paralleli al piano di deformazione, costruiti in materiale plastico trasparente. In questo modo si è facilitato l'impiego della tecnica radiografica per l'analisi del processo di formazione e sviluppo delle superfici di rottura.

Le prove di taglio sono state condotte su provini di sabbia di Leighton Buzzard con diametro dei granuli compreso fra 0.3 e 0.5 mm, preparati per deposizione a strati in modo tale da ottenere uno stato di addensamento iniziale piuttosto elevato. Il valore medio dell'indice dei vuoti iniziale (0.53) è infatti molto prossimo al valore minimo per la sabbia utilizzata. I provini, di area  $7 \times 6 \text{ cm}^2$  e di 2.5 cm di altezza, soggetti ad uno sforzo verticale medio  $\sigma_z = 10 \text{ kPa}$  venivano portati a rottura imponendo, per incrementi successivi, lo spostamento relativo delle due semi-scatole che compongono l'apparecchio.

Durante la preparazione dei provini dopo la deposizione di uno strato di sabbia, si disponevano in maglia regolare, alcune sferette di piombo aventi lo stesso diametro dei granelli di sabbia. In questo modo, mediante una radiografia del campione al termine di ogni incremento dello spostamento applicato, è stato possibile misurare gli spostamenti nei punti interni e dedurre il campo degli incrementi di deformazione ad essi corrispondenti. L'impiego della tecnica radiografica per la misura degli spostamenti all'interno dei campioni di sabbia e per l'esame delle superfici di rottura, si basa sul

fenomeno dell'assorbimento differenziale che subiscono i raggi X nell'attraversare un mezzo con densità variabile da punto a punto [ROSCOE, ARTHUR e JAMES, 1963]. In una lastra radiografica, le zone a maggiore addensamento appaiono più scure di quelle addensate ed in particolare le sferette di piombo si presentano come macchie nere immerse in un fondo più chiaro.

La sequenza delle radiografie eseguite nel corso di una delle prove di taglio, per diversi valori dello spostamento imposto, è riportata in fig. 8. Risultano evidenti la formazione e lo sviluppo di una superficie di rottura al crescere dello spostamento relativo; in particolare si nota un fenomeno di propagazione della discontinuità a partire dai bordi dello strumento. In fig. 8 vengono inoltre rappresentati alcuni risultati dell'analisi delle radiografie ricavati dalla misura degli spostamenti delle sferette di piombo. Nella figura sono state tracciate le direzioni delle linee di non estensione in alcuni punti del provino nell'ipotesi che il campo degli spostamenti sia localmente uniforme. La lunghezza dei singoli tratti di linea è proporzionale all'ampiezza dell'incremento di deformazione principale massima; quest'ultima è diretta come la bisettrice dell'angolo formato dalle due linee di non estensione. Inoltre, l'ampiezza dell'angolo fra le due linee in un punto è per quanto detto in precedenza, inversamente proporzionale alla dilatanza del materiale in quel punto.

Con l'apparecchio descritto non è possibile

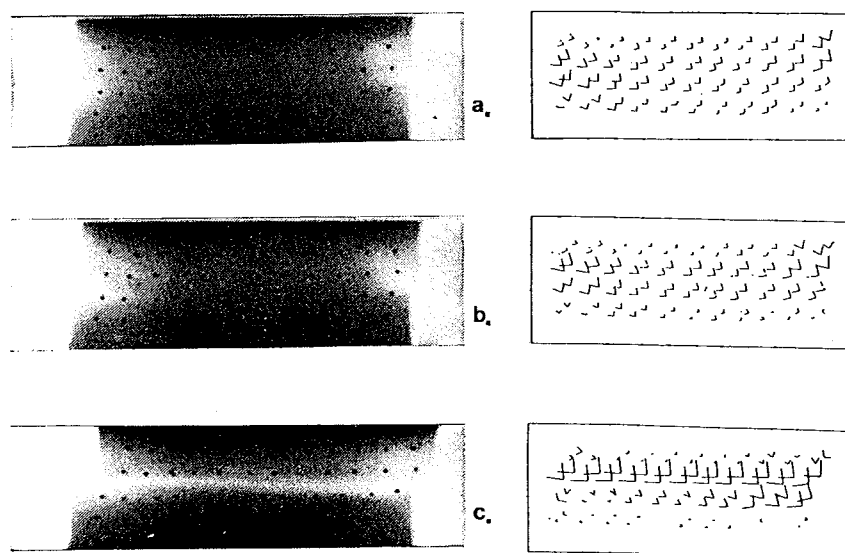


Fig. 8. - Radiografie di un campione di sabbia durante una prova di taglio diretto e corrispondenti andamenti delle direzioni di non estensione per diversi valori dello spostamento orizzontale imposto.

effettuare la misura delle forze di taglio che si applicano nel corso della prova. Le caratteristiche di resistenza del materiale sono state pertanto determinate mediante un apparecchio di taglio convenzionale. I risultati di una delle prove eseguite sono schematizzati in fig. 9, dove si riportano i diagrammi dell'angolo di obliquità sul piano orizzontale (fig. 9a) e dello spostamento verticale  $w$  (fig. 9b), in funzione di quello orizzontale cumulato,  $u$ .

Il confronto fra le radiografie ed il risultato delle analisi del campo degli spostamenti mostra come durante una prova di taglio si verifichi l'allineamento di una delle linee di non estensione con la direzione della superficie di rottura, prima che questa si sia completamente sviluppata (fig. 8b). Osservando inoltre che in presenza di rottura, le linee di non estensione nella zona dove si concentrano le deformazioni formano fra loro un angolo quasi retto, si può affermare che la dilatanza del materiale è molto piccola all'interno della banda di rottura. Viceversa, nelle zone esterne, la dilatanza assume valori più elevati con un massimo di  $23^\circ$  per l'angolo  $\nu$ .

In questo modo i risultati sperimentali sembrano confermare da una parte la validità dell'ipotesi di Roscoe per la determinazione della

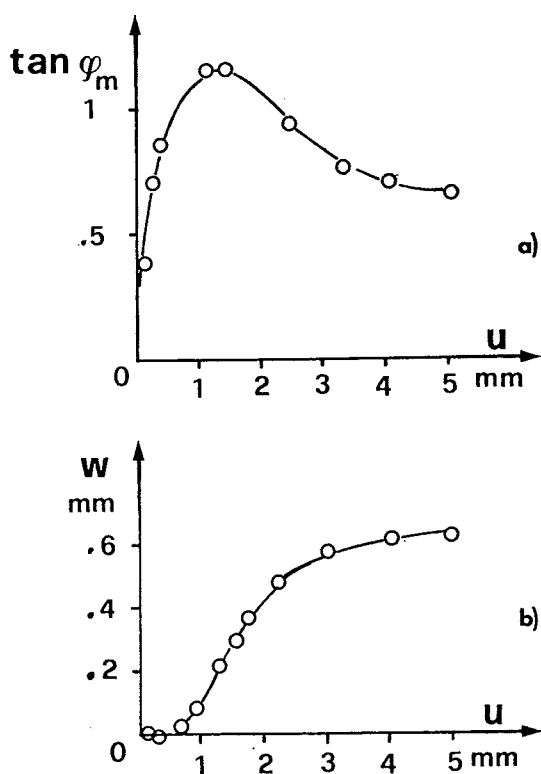


Fig. 9. - Risultati di una prova di taglio diretto sulla sabbia Leighton Buzzard 30-52 con  $\sigma_v = 10$  kPa.

resistenza del materiale, e dall'altra la possibilità di rappresentare la rottura di un campione in una prova di taglio diretto con il modello di discontinuità cinematica illustrato in precedenza, dove zone di sabbia fortemente dilatante circondano una banda di rottura in cui il materiale si trova in condizioni di stato critico.

Il modello di discontinuità cinematica non sempre si presta a rappresentare lo stato di rottura in una prova di taglio diretto, ma il suo impiego risulta limitato ai provini la cui dimensione nella direzione del movimento applicato è sufficientemente piccola. Infatti, se si esaminano i risultati di altre prove di taglio eseguite su campioni di sabbia di 33 cm di lunghezza [SCARPELLI & WOOD, 1982], raramente si osserva la formazione di una banda di rottura che attraversa l'intero campione mentre più frequente è la presenza di molteplici zone di concentrazione delle deformazioni che si originano dai bordi della scatola di taglio. Solo se le estremità del campione sono vicine tutte queste zone concorrono alla formazione di un'unica discontinuità centrale, come illustrato nelle precedenti figure.

Con riferimento al livello di sforzo di picco  $\tau_{zx}/\sigma'_z = 1.163$  misurato durante la prova di taglio illustrata in fig. 9 ed all'angolo di dilatanza  $\nu_p = 23^\circ$  ottenuto dall'analisi delle radiografie, la soluzione di Roscoe fornisce per l'angolo di attrito di picco, il valore  $\phi_p = 57^\circ$ .

Sebbene la resistenza della sabbia così determinata assume un valore estremamente elevato, il risultato ottenuto non è in disaccordo con quelli dedotti da altri autori anche in prove sperimentali differenti. Ad esempio, in fig. 10 si riporta il confronto fra la soluzione di Roscoe prima determinata ed i risultati di prove di

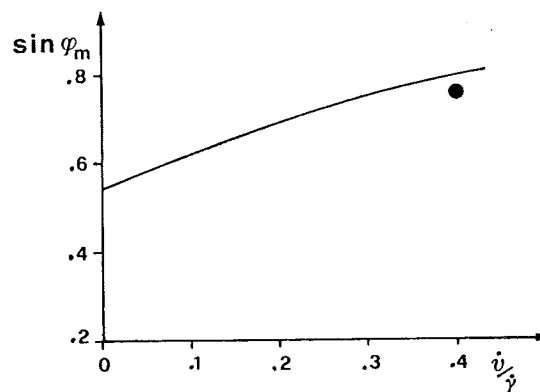


Fig. 10. - Confronto fra i risultati della prova (●) e quelli ottenuti da Stroud (1971) per la sabbia Leighton Buzzard 14-25 con  $\sigma_v = 10$  kPa.



taglio semplice eseguite da STROUD [1971] sulla sabbia Leighton Buzzard, anche se con diverso diametro medio dei granuli ( $d \approx 1$  mm).

Dall'analisi dei campi delle deformazioni incrementali determinate attraverso la misura degli spostamenti interni, non è stato possibile ricavare una precisa tendenza per la rotazione  $\alpha$  delle direzioni principali delle deformazioni nel passaggio attraverso la superficie di discontinuità, sebbene localmente si possono rilevare alcuni cambi di direzione soprattutto in corrispondenza delle estremità del campione, dove si origina la superficie di rottura.

La ragione di questo va probabilmente ricercata nel fatto che, a bassi livelli di sforzo medio quale quello che si aveva nella sabbia durante le prove, le deformazioni delle zone che circondano la banda di rottura sono estremamente ridotte in valore assoluto ed il metodo di analisi dei campi di deformazione utilizzato diventa inadeguato per lo studio dei fenomeni sperimentali. Per una verifica della validità del modello di discontinuità cinematica illustrato precedentemente si dovrebbe disporre di una apparecchiatura che consenta di applicare ai provini sforzi medi più elevati pur mantenendo la possibilità di impiegare l'analisi radiografica per la misura degli spostamenti interni durante le prove. Questa apparecchiatura dovrebbe inoltre consentire la misura degli sforzi agenti sul provino per un controllo diretto dello stato di sforzo contemporaneamente a quello dello stato di deformazione.

## 5. Conclusioni

Le prove sperimentali illustrate mostrano che in un apparecchio di taglio diretto, la superficie di rottura che si sviluppa in un provino di sabbia per effetto della deformazione imposta, è parallela ad una linea di non estensione del campo delle deformazioni. Questa osservazione sperimentale implica che nel calcolo della resistenza di una sabbia si dovrebbe tenere conto non soltanto dello stato di sforzo del materiale durante la prova, ma anche di quello di deformazione. In particolare, nell'ipotesi di coincidenza della direzione del piano di rottura con una delle linee di non estensione del campo di deformazione incrementale, l'angolo di attrito  $\phi'$  è una funzione del rapporto delle tensioni  $\tau/\sigma$  sul piano di rottura e della dilatanza  $v$  del mate-

riale. I valori di  $\phi'$  così ottenuti sono più elevati di quelli che risultano nell'ipotesi di coincidenza fra il piano di rottura e quello di massima obliquità dello stato di sforzo.

I risultati sperimentali mostrano inoltre che, per grandi deformazioni, il comportamento del provino di sabbia è analogo a quello di una discontinuità cinematica dove una banda di materiale, di spessore finito, si deforma mantenendo costante il proprio volume, mentre è circondata da zone che si mantengono rigide al crescere degli spostamenti applicati. L'analisi teorica di questo modello di discontinuità ha mostrato che per la sua definizione completa è necessario determinare sperimentalmente l'entità della rotazione delle direzioni principali (degli sforzi o degli incrementi di deformazione) nel passaggio dall'interno all'esterno della banda di materiale che subisce forti deformazioni.

Una migliore definizione del modello di rottura illustrato richiederebbe ulteriori sviluppi di questa ricerca sperimentale. In particolare sarebbe necessaria la realizzazione di una nuova apparecchiatura per la misura contemporanea dei campi di sforzo e di deformazione, anche per valori degli sforzi medi nei provini più elevati di quelli impiegati.

## BIBLIOGRAFIA

- DAVIS E. H. (1968) - *Theories of plasticity and failure of soil masses*. Soil Mechanics, Selected Topics, I. K. Lee, ed. Butterworths, London.
- HILL R. (1950) - *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Clarendon Press.
- HOULSBY G. T., WROTH C. D. (1980) - *Strain and displacement discontinuity in soil*. J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, EM4, pp. 753-771.
- ROSCOE K. H. (1970) - *The influence of strains in soil mechanics*. Géotechnique, 20, no. 2, 129-170.
- ROSCOE K. H., ARTHUR J. R. F., JAMES R. G. (1963) - *The determination of strains in soils by an X-ray method*. Civ. Eng. Publ. Works Rev., 58, no. 684, 876 and 58, no. 685, 1009-1012.
- ROSCOE K. H., BASSETT R. M., COLE E. R. L. (1967) - *Principal axes observed during simple shear of a sand*. Proc. Geotechn. Conf., Oslo 1, 231-7.
- SCARPELLI G. (1981) - *Shear band in sand*. M. Phil. Thesis, Cambridge University.
- SCARPELLI G. e WOOD D. M. (1982) - *Experimental observations of shear band patterns in direct shear tests*. IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials. Delft, ed. Vermeer P. A. and Luger H. J., 473-484.
- STROUD M. A. (1971) - *The behaviour of sand at low stress levels in the simple shear apparatus*. Ph. D. Thesis, Cambridge University.

## SUMMARY

### Shear strength of dry sands in direct shear tests

Direct shear testing is a well established technique to measure the shear strength of granular soils, but the interpretation of results is still an open question in soil mechanics.

When a dense sample is sheared it will usually dilate and change its density. Regions of different densities can be observed if X-rays are passed through the sample during the deformation process. Radiographs taken during experiments on dense sand have shown the presence of zones of preferential dilation when large shear deformations are applied to samples. These zones are often referred to as shear bands or rupture surfaces.

In direct shear test a horizontal rupture surface is forced to develop between the two halves of the shear box.

Many suggestions have been made in the past concerning the relation between the orientation of these surfaces and the local directions of the principal axes of stress or of strain increment. If the Mohr-Coulomb criterion is used to describe the failure characteristics of a sand, different values of the peak friction angle are obtained when different hypotheses concerning shear bands which form at failure are made.

It is frequently assumed that rupture surfaces form in the direction of planes on which the maximum stress obliquity occurs (fig. 3). With this hypothesis, the value of the peak friction angle  $\phi_p$  can be obtained when the angle of stress obliquity  $\phi_m = \tan^{-1}(\tau_{xx}/\sigma_z)$  on the horizontal plane is known by measuring forces at the boundaries:

$$\tan \phi_p = \tan \phi_m \quad (1)$$

On the other hand, if the shear band is seen as a region of intensely shearing material where strains are considerably greater than those of the surrounding regions which therefore keep almost rigid, then compatibility indicates the coincidence of the shear bands with zero extension lines. These lines are the direction along which an element of sand does not elongate. They form an angle of  $(45^\circ - \nu/2)$  with the direction of the maximum principal strain increment (fig. 2), where  $\nu$  is the angle of dilation.

In order to obtain a theoretical prediction for the strength of a sand element from this kinematical requirement, an additional hypothesis has to be made to link strain increments to stresses. For an initially isotropic plastic material a principle of coaxiality of principal strain increments and principal stresses is often assumed. In this way, the peak friction angle will depend both on the stress

obliquity and on the angle of dilation; it can be evaluated through the following relationship (fig. 4):

$$\sin \phi_p = \left[ \frac{\tau_{xx}/\sigma_z}{\cos \nu + \tau_{xx}/\sigma_z \cdot \sin \nu} \right]_p \quad (2)$$

In order to observe the behaviour of a sand sample in direct shear test a special apparatus has been developed which keeps the main features of the Casagrande shear box and allows for the employment of the radiographic technique. Tests have been carried out on the 30-52 Leighton Buzzard sand. Samples, prepared by slow pouring from a hopper, appeared to be fairly uniform with an initial void ratio of about 0.53; this is close to the minimum void ratio for the sand. In the present device, tests were performed at an average vertical stress of 10 KPa. During the test internal displacements of the sample could be measured by observing the displacements of lead shots embedded in the sand, with X-rays; in this way the main features of the incremental strain field can be obtained.

A typical result of a test is shown in fig. 8, through a set of radiographs taken at different values of the horizontal displacement applied to the top half of the box. The analysis of the deformation field is also shown in fig. 8. It is clear that well before a shear band appears in the radiographs, one of the zero extension line at the mid-height of the sample is horizontal.

Therefore, experimental observations seem to suggest that the evaluation of shear strength of the sand should be performed by using the relationship based on the hypothesis of alignment of the shear band with one of the zero extension line of the incremental strain field.

In order to perform this calculation, the stress obliquity during a test have to be evaluated and this has been done in a conventional Casagrande shear box. Relevant plots are shown in fig. 9. The results of the calculation gives, with  $\tau_{xx}/\sigma_z = 1.163$  and  $\nu = 23^\circ$ , the latter being obtained from measurements of lead shot movements, a peak friction angle  $\phi_p = 57^\circ.7$ . This value seems high but the combination of  $\phi_p = 57^\circ.7$  and  $\nu = 23^\circ$  agrees reasonably well with the results obtained by STROUD (1971) in simple shear tests on a rather coarser Leighton Buzzard sand (fig. 10).

This study has shown how the failure state in the Casagrande direct shear test is more obeying to kinematical rather than statical constraints at least at the stress level used in the present experiments. A further research development would require a new testing device in which direct shear experiments can be run at much higher stress level, with the possibility to evaluate both stresses and incremental strains which occurs during tests.