

Trave ad asse curvo su suolo alla Winkler

E. COSENZA *

SOMMARIO: Viene affrontato per via differenziale il problema della trave circolare su suolo di Winkler; si perviene così ad una equazione differenziale del 6° ordine. La discussione dell'equazione caratteristica, relativamente ai casi strutturali, rappresenta la maggiore difficoltà analitica: si perviene all'interessante risultato che i problemi flessionali e torsionali della trave considerata rettilinea si accoppiano senza mutare natura analitica, ma modificando sia lo smorzamento torsionale, che aumenta, sia la lunghezza d'onda del problema flessionale che diminuisce rendendo più deformabile la trave. Le complesse relazioni analitiche tra caratteristiche della sollecitazioni ed abbassamento sono formulate in una compatta forma matriciale rendendo agevole l'uso di microcomputer. Lo studio è concluso da tre esempi numerici: il primo è relativo al caso di una trave anulare, mentre nel secondo e nel terzo si mostrano gli effetti della curvatura rispettivamente sul problema flessionale e sul problema torsionale.

1. Introduzione

I primi studi sulle travi curve su suolo di Winkler sono stati effettuati da VOLTERRA [1952, 1955] con riferimento alle travi anulari; a tale problema è rivolto anche lo studio di ALESSI e CHIARUGI [1974] che forniscono un'utile tabellazione dei risultati per diverse condizioni di carico. Il problema risulta semplificato dalla proprietà di avere necessariamente soluzione periodica con periodo 2π per qualunque condizione di carico, e quindi può effettuarsi un'analisi armonica senza studiare l'equazione differenziale del 6° ordine che regge il problema.

Nella presente nota il problema più generale della trave circolare con un qualunque angolo di apertura viene invece affrontato per via differenziale; il caso della trave anulare può ritrovarsi tramite opportune condizioni ai limiti.

Risulta inoltre possibile ritrovare come casi particolari sia i ben noti problemi flessionali e torsionali della trave rettilinea sul suolo di Winkler, sia il problema della trave circolare non contrastata dal terreno; anche quest'ultimo problema si trova ampiamente trattato in bibliografia: l'equazione differenziale che regge il problema si trova ricavata ad esempio per via energetica [COMO, 1967] e per via geometrica [BLASKOWIAK, KACZOWSKI, 1966].

2. Il problema differenziale

Si consideri una trave circolare di raggio r giacente su di un letto elastico alla Winkler con costante di sottofondo k ; considerato un estremo O come origine, il generico punto P

resta definito dall'angolo α o equivalentemente dall'ascissa curvilinea $x = r\alpha$ (cfr. fig. 1). La trave sia caricata ortogonalmente al proprio piano, e il carico esterno sia costituito da un carico distribuito $p_i(x)$ e da momenti torcenti distribuiti $m_i(x)$; il pedice t indica il carico globale agente sulla trave, ovvero somma algebrica del carico esterno e della reazione esercitata dal terreno. Le convenzioni sui segni dei carichi esterni, dei parametri cinematici e delle caratteristiche della sollecitazione sono indicati in fig. 1.

Indicando con l'apice le derivate rispetto ad x , le tre equazioni differenziali di equilibrio dell'elemento infinitesimo che legano taglio T , mo-

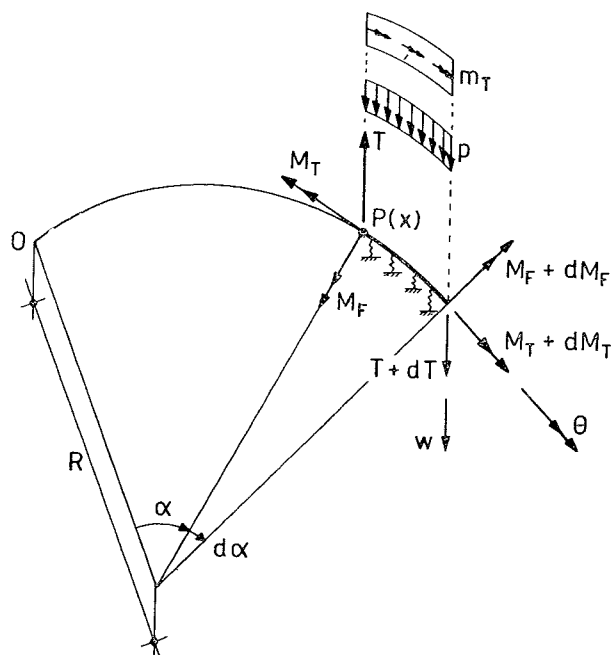


Fig. 1. - Simbologia e convenzione sui segni per carichi, spostamenti e caratteristiche della sollecitazione.

* Dr. Ing. Edoardo COSENZA, Istituto di Tecnica delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli.

mento flettente M_F e momento torcente M_T ai carichi esterni, forniscono:

$$T' = -p_t \quad (1')$$

$$M'_F - \frac{M_T}{r} = T \quad (1'')$$

$$M'_T + \frac{M_F}{r} = -m_t \quad (1''')$$

Detti w e θ rispettivamente abbassamento e rotazione torsionale dell'asse, i carichi distribuiti risultano costituiti dalle aliquote p ed m esterne e delle aliquote dovute alla reazione del terreno:

$$p_t = p - kBw \quad (2')$$

$$m_t = m - \frac{kB^3}{12}\theta \quad (2'')$$

$$\rho_T w^{IV} - \frac{1}{r^2} w^{II} + 4\alpha^4 \rho_T w + \frac{1}{r} (\rho_T + 1) \theta^{II} = \frac{p}{GC} \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} (1 + \rho_T) w^{II} - \theta^{II} + \left[\frac{1}{r^2} \rho_T + \beta^2 \right] \theta = \frac{m}{GC} \quad (5)$$

avendo posto:

$$\rho_T = \frac{EI}{GC} \quad (6)$$

$$\alpha^4 = \frac{kB}{4EI} \quad (7)$$

$$\beta^2 = \frac{kB^3}{12GC} \quad (8)$$

È immediato constatare come il sistema (4), (5) degeneri per $\frac{1}{r} \rightarrow 0$, ovvero nel caso di

essendo B la base della sezione a diretto contatto con il terreno.

È noto inoltre dalla teoria dell'elasticità [TIMOSHENKO, GOODIER, 1951] che sussistono le seguenti relazioni caratteristiche della sollecitazione-spostamenti

$$M_F = -EI \left[w'' + \frac{\theta}{r} \right] \quad (3')$$

$$M_T = GC \left[\theta' - \frac{w'}{r} \right] \quad (3'')$$

Si è così considerata la sola torsione primaria o alla De Saint Venant, e si è trascurata la deformabilità tagliante.

Le (1), (2), (3) costituiscono un sistema di 7 equazioni differenziali nelle 7 incognite, w , θ , T , M_F , M_T , p_t , m_t ; tramite semplici operazioni differenziali è immediato giungere al sistema di due equazioni differenziali in w , θ equivalente al sistema introdotto:

trave rettilinea, nelle due ben note equazioni differenziali:

$$w^{IV} - 4\alpha^4 w = \frac{p}{EI} \quad (9)$$

$$\theta^{II} - \beta^2 \theta = -\frac{m}{GC} \quad (10)$$

che reggono i problemi rispettivamente flessionale e torsionale della trave rettilinea su suolo elastico e conseguentemente gli integrali generali delle omogenee associate ammettono le note forme

$$w = e^{-\alpha x} (A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x) + e^{\alpha x} (A_3 \cos \alpha x + A_4 \sin \alpha x) \quad (11)$$

$$\theta = B_1 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x} \quad (12)$$

Le (4), (5) possono ancora trasformarsi, tramite semplici operazioni differenziali, in una

equivalente equazione differenziale del 6° ordine in w :

$$w^{VI} + \left[\frac{2}{r^2} - \beta^2 \right] w^{IV} + \left[4\alpha^4 + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} \frac{\beta^2}{\rho_T} \right] w^{II} +$$

$$- 4\alpha^4 \left[\frac{\rho_T}{r^2} + \beta^2 \right] w = \frac{1}{EI} \left[p^{II} - p \left[\frac{\rho_T}{r^2} + \beta^2 \right] + (1 + \rho_T) m^{II} \right] \quad (13)$$

Nel caso di $k = 0$, ovvero che la trave non sia su suolo elastico, tale equazione degenera nella

nota forma [BLASKOWIAK, KACZOWSKI, 1966; COMO, 1967]:

$$w^{VI} + \frac{2}{r^2} w^{IV} + \frac{1}{r^4} w^{II} = \frac{1}{EI} \left[p^{II} - p \frac{\rho_T}{r^2} + (1 + \rho_T) m^{II} \right] \quad (14)$$

Ritornando al problema (13) l'integrale generale dell'omogenea associata può ricercarsi tra le soluzioni del tipo

$$w = e^{-px} \quad (15)$$

da cui si ottiene l'equazione caratteristica del 6° ordine:

$$p^6 + p^4 \left[\frac{2}{r^2} - \beta^2 \right] + p^2 \left[4\alpha^4 + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} \frac{\beta^2}{\rho_T} \right] - 4\alpha^4 \left[\frac{\rho_T}{r^2} + \beta^2 \right] = 0 \quad (16)$$

Risulta conveniente introdurre i parametri adimensionali:

$$\rho_k = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{(\alpha r)^2} \quad (18)$$

di modo che, dividendo α^6 e ponendo:

$$\lambda = \left[\frac{p}{\alpha} \right]^2 \quad (19)$$

si ottiene l'equazione cubica equivalente:

$$\lambda^3 + (2y - \rho_k) \lambda^2 + \left[4 + y^2 + \frac{y\rho_k}{\rho_T} \right] \lambda - 4(y\rho_T + \rho_k) = 0 \quad (20)$$

Il problema viene così a dipendere dai soli tre parametri adimensionali ρ_T , ρ_k , y ; il primo di essi caratterizza il problema della sola trave circolare ed infatti è presente nel problema (14), il secondo pone in relazione i problemi flessionali e torsionali su suolo alla Winkler, il terzo infine rappresenta una misura adimensionale del raggio della trave.

3. L'integrale generale

Si osservi che l'equazione caratteristica in p^2 del solo problema torsionale su letto di Winkler ammette una sola radice positiva, mentre il problema flessionale ammette due radici complesse coniugate. Nell'appendice si dimostra

che il problema accoppiato (20) gode delle seguenti proprietà:

I) una radice è reale positiva;

II) due radici sono complesse coniugate;

III) la parte reale delle radici complesse è negativa.

Ciò significa che passando da una trave rettilinea ad una trave curva sempre su suolo di Winkler, i problemi flessionali e torsionali si accoppiano senza mutare la propria natura matematica; infatti le radici dell'equazione caratteristica (20) hanno la forma:

$$p_{1,2} = \pm \beta'$$

$$p_{3,4,5,6} = \pm \alpha' \pm i\alpha'' \quad (21)$$

e conseguentemente l'integrale generale si scrive

$$w = C_1 e^{-\beta'x} + C_2 e^{\beta'x} + e^{-\alpha'x} (C_3 \cos \alpha''x + C_4 \sin \alpha''x) + e^{\alpha'x} (C_5 \cos \alpha''x + C_6 \sin \alpha''x) \quad (22)$$

La fondamentale conseguenza è che risulta possibile trattare il problema della trave correggendo i risultati del caso della stessa trave considerata rettilinea; ovvero risulta conveniente porre:

$$\begin{aligned} \beta' &= \beta (1 + \varepsilon_1) \\ \alpha' &= \alpha (1 + \varepsilon_2) \\ \alpha'' &= \alpha (1 + \varepsilon_3) \end{aligned} \quad (23)$$

essendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ dei coefficienti correttivi adimensionali funzione di y, ρ_T, ρ_K , ed aventi la proprietà:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \varepsilon_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (24)$$

ovvero che le ε_i sono infinitesime con y .

La (24) esprime matematicamente il fatto fisico che le soluzioni (23) devono degenerare nel caso di trave rettilinea nelle note:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \pm \beta \\ p_{3,4,5,6} &= \pm \alpha \pm i\alpha \end{aligned} \quad (25)$$

Le tre quantità $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ possono dedursi in forma chiusa risolvendo l'equazione cubica, ovvero per via numerica.

Nella figura 2 sono riportati, in scala semilogaritmica, gli andamenti $\varepsilon_i(y)$ per valori significativi dei parametri ρ_T e ρ_K . Si osservi come, in accordo con l'affermazione III), risulti $\varepsilon_3 > \varepsilon_2$;

$$\begin{aligned} \bar{\theta} = \theta_T = & - \frac{\rho_T}{y(1 + \rho_T)(y\rho_T + \rho_K)} [y^2 w^{IV} + y^2 (2 + \rho_T) w^{II} + 4w] + \\ & + \frac{y}{y\rho_T + \rho_K} \left[\bar{m} + \bar{p} \frac{\rho_T}{1 + \rho_T} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

e tale soluzione degenera per $k = 0$ nella nota [BLASKOWIAK, KACZOWSKI, 1966]:

$$\bar{\theta} = - \frac{1}{1 + \rho_T} [w^{IV} + (2 + \rho_T) w^{II}] + \frac{\bar{m}}{\rho_T} + \frac{\bar{p}}{1 + \rho_T} \quad (27')$$

avendo posto:

$$\bar{p} = \frac{\rho_T^4}{EI}, \quad \bar{m} = \frac{\rho_T^3}{GC} \quad (28)$$

inoltre la correzione ε_2 è comunque più piccola di modo che la correzione sullo smorzamento non è importante, mentre con ε_3 può diminuire anche significativamente la lunghezza d'onda $2\pi/\alpha''$: ciò significa che la curvatura rende più deformabile flessionalmente la trave.

Per quel che riguarda il problema torsionale, il parametro ε_1 risulta essere sempre positivo, e ciò può far crescere in maniera significativa gli smorzamenti.

Si osservi inoltre che tutti gli effetti della curvatura sul problema di Winkler aumentano con il rapporto $\rho_T = EI/GC$ e con la deformabilità del terreno.

4. L'espressione dell'angolo di torsione e delle caratteristiche della sollecitazione

Al fine di esprimere le quantità θ, M_F, M_T, T in funzione della w tramite i parametri adimensionali y, ρ_T, ρ_K risulta conveniente considerare le derivate non più rispetto ad x bensì rispetto ad α ; nel seguito si fa sistematicamente riferimento alle derivate rispetto ad α ; sussiste la relazione:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{1}{r^n} \frac{d^n f}{d\alpha^n} \quad (26)$$

Dal sistema (4), (5) risulta dopo alcuni calcoli:

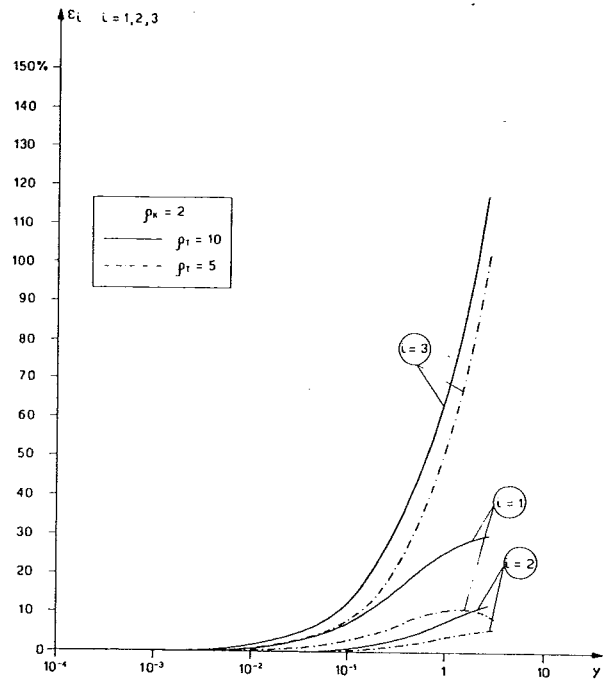
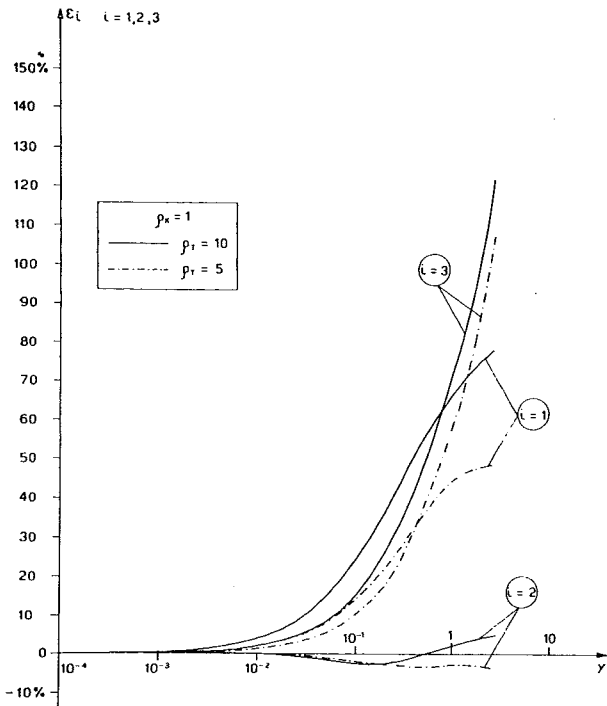
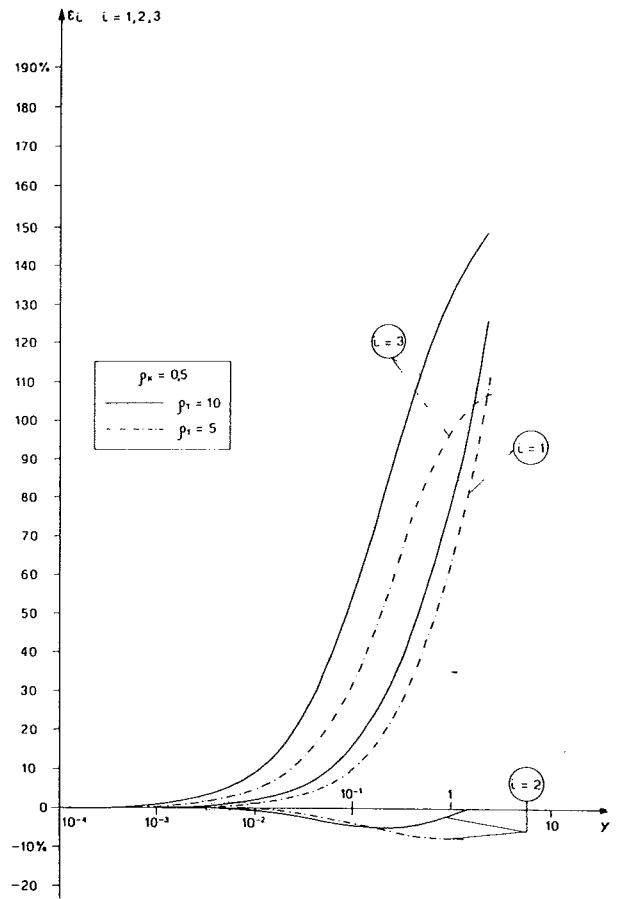
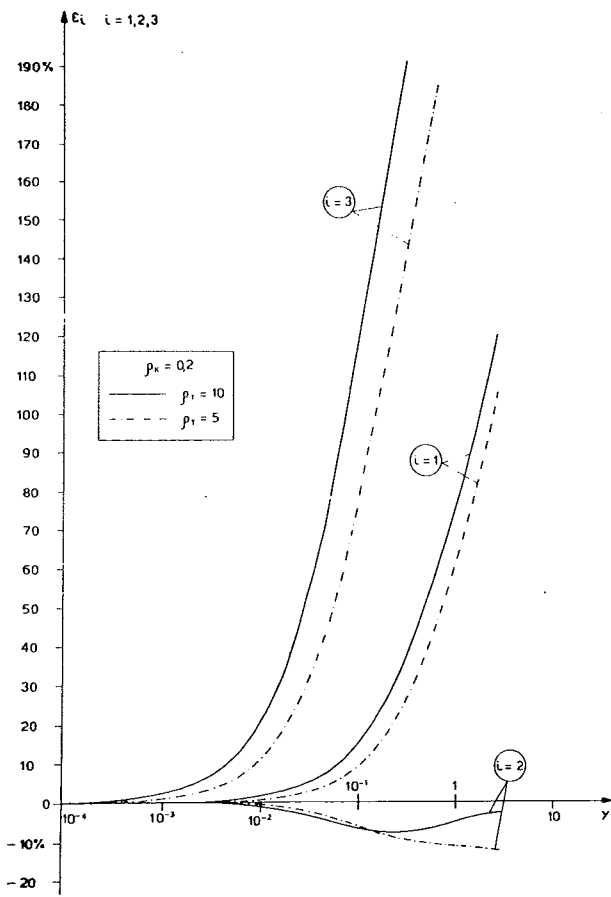


Fig. 2. - Andamenti dei parametri $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ in funzione di y per alcuni valori significativi di ρ_T e ρ_K .

Si ottiene inoltre:

$$\bar{M}_F = \frac{M_{FT}^2}{EI} = \frac{1}{(1 + \rho_T)(y\rho_T + \rho_K)} [y^2\rho_T w^{IV} + y(y\rho_T - \rho_K - \rho_T\rho_K) w^{II} + 4\rho_T w] +$$

$$- \frac{y}{y\rho_T + \rho_K} \left[\bar{m} + \bar{p} \frac{\rho_T}{1 + \rho_T} \right] \quad (29)$$

$$\bar{M}_T = \frac{M_{TT}^2}{GC} = \frac{-1}{(1 + \rho_T)(y\rho_T + \rho_K)} [y^2\rho_T w^V + y^2\rho_T(2 + \rho_T) w^{III} + [4\rho_T + (1 + \rho_T)(y\rho_T + \rho_K)] w^I] +$$

$$+ \frac{y}{y\rho_T + \rho_K} \left[\bar{m}^I + \bar{p}^I \frac{\rho_T}{1 + \rho_T} \right] \quad (30)$$

$$\bar{T} = \frac{T_T^3}{GC} = \frac{1}{y(y\rho_T + \rho_K)} [y^2\rho_T w^V + y\rho_T(2y - \rho_K) w^{III} + [4\rho_T + y(y\rho_T + \rho_K)] w^I] +$$

$$- \frac{y}{y\rho_T + \rho_K} [(1 + \rho_T) \bar{m}^I + \rho_T \bar{p}^I] \quad (31)$$

I parametri $\bar{\theta}$, \bar{M}_F , \bar{M}_T , \bar{T} , \bar{p} , \bar{m} hanno tutti, come w , dimensione di una lunghezza.

Risulta conveniente, utilizzando la metodologia introdotta da POZZATI [1977] nel caso di trave rettilinea, introdurre la matrice di ordine 6×6 :

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

essendo 0 la matrice nulla di ordine 2×2 ed:

$$D_1 = r \begin{bmatrix} -\beta' & 0 \\ 0 & \beta' \end{bmatrix}, \quad D_2 = r \begin{bmatrix} -\alpha' & \alpha'' \\ -\alpha'' & -\alpha' \end{bmatrix}, \quad D_3 = r \begin{bmatrix} \alpha' & \alpha'' \\ -\alpha'' & \alpha' \end{bmatrix}. \quad (33)$$

L'operatore matriciale D permette di eseguire sinteticamente le successive derivate di w ; infatti introducendo le notazioni vettoriali:

si ha evidentemente:

$$w = x^T \cdot c \quad (35)$$

avendo indicato con T all'apice l'operatore di trasposizione, e si può verificare che la generica derivata n^{ma} di w può esprimersi come:

$$x = \begin{Bmatrix} e^{-\beta'x} \\ e^{\beta'x} \\ e^{-\alpha'x} \cos \alpha''x \\ e^{-\alpha'x} \sin \alpha''x \\ e^{\alpha'x} \cos \alpha''x \\ e^{\alpha'x} \sin \alpha''x \end{Bmatrix}, \quad c = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

$$\frac{d^n w}{d\alpha^n} = x^T \cdot D^n \cdot c \quad (36)$$

essendo D^n il prodotto n volte di D per se stesso.

Si osservi che sussistono le relazioni:

$$r\beta' = y^{-1/2} \rho_K^{1/2} (1 + \varepsilon_1), \quad r\alpha' = y^{-1/2} (1 + \varepsilon_2), \quad r\alpha'' = y^{-1/2} (1 + \varepsilon_3) \quad (37)$$

e quindi la matrice adimensionale D è anche essa funzione dei tre parametri y, ρ_T, ρ_K (da cui si ricavano $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$).

Ciò premesso è immediato constatare che la generica funzione f dell'insieme ($w, w', \bar{\theta}, \bar{M}_F, \bar{M}_T, \bar{T}$) può esprimersi nella forma matriciale:

$$f = c_f x^T \cdot \left[\sum_{i=0}^5 a_{if} D^i \right] \cdot c \quad (38)$$

utilizzando la posizione (36) nelle (27), (29), (30), (31); i coefficienti c_f ed a_{if} sono riportati nella tabella 1 dove si è posto $z = y(1 + \rho_T) \cdot (y\rho_T + \rho_K)$.

5. La determinazione delle costanti di integrazione

La (38) permette di scrivere molto semplicemente le condizioni ai limiti: infatti, noti y, ρ_T, ρ_K in primo luogo si ricavano $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ad esempio con i diagrammi forniti e si determinano le matrici $D^0 = I, D^1, \dots, D^5$; volendo scrivere la condizione ai limiti relativa alla funzione f nel punto x_0 va inoltre calcolato il vettore x nel punto x_0 , e tramite la tabella 1 si calcolano i coefficienti c_f, a_{if} . Infine si svolgono le operazioni matriciali alla sinistra di c : si ottiene così il vettore dei coefficienti delle incognite C_1, C_2, \dots, C_6 che traducono in equazione lineare la condizione ai limiti.

Si osservi che è molto semplice considerare

cedimenti elastici ed anelastici, e che se sono presenti azioni cinematiche o statiche in sezioni non di estremità, la trave va suddivisa in tratti introducendo sei costanti per ciascun tratto.

Determinato il vettore c la (38) è utile per scrivere l'espressione funzionale di qualsiasi funzione f svolgendo le operazioni matriciali alla destra di x^T e lasciando per tale vettore l'espressione funzionale (34).

Si osserva infine che la (38) e tutte le operazioni enunciate sono implementabili in modo estremamente semplice su di un elaboratore di ridotte capacità.

6. Applicazioni numeriche

Una prima applicazione riguarda il caso di una trave anulare su suolo elastico, caricato da quattro forze uguali disposte ad interasse uguale; tale esempio può essere il caso della fondazione di un serbatoio circolare.

Il problema si riduce, per simmetria, allo studio del tratto di trave con apertura $\pi/2$ della figura 3, in cui sono riportate tutte le caratteristiche meccaniche e geometriche del problema.

Tale trave risulta in definitiva caratterizzata dai tre parametri:

$$y = 3,9836 \times 10^{-2}$$

$$\rho_T = 8,8660$$

$$\rho_K = 0,6009$$

TABELLA I

Coefficienti per il calcolo matriciale di spostamenti e caratteristiche della sollecitazione

f	c_f	a_{0f}	a_{1f}	a_{2f}	a_{3f}	a_{4f}	a_{5f}
w	1	1	0	0	0	0	0
$\frac{dw}{d\alpha} = \frac{rdw}{dx}$	1	0	1	0	0	0	0
$\bar{\theta} = \frac{\theta}{r}$	$-\rho_T/z$	4	0	$y^2(2 + \rho_T)$	0	y^2	0
$\bar{M}_F = \frac{M_F r^2}{EI}$	$1/z$	$4\rho_T$	0	$y(y\rho_T - \rho_K - \rho_T\rho_K)$	0	$y^2\rho_T$	0
$\bar{M}_T = \frac{M_T r^2}{GC}$	$-1/z$	0	$4\rho_T + z$	0	$y^2\rho_T(2 + \rho_T)$	0	$y^2\rho_T$
$\bar{T} = \frac{T r^3}{GC}$	$1/y(y\rho_T + \rho_K)$	0	$4\rho_T + y(y\rho_T + \rho_K)$	0	$y\rho_T(2y - \rho_K)$	0	$y^2\rho_T$

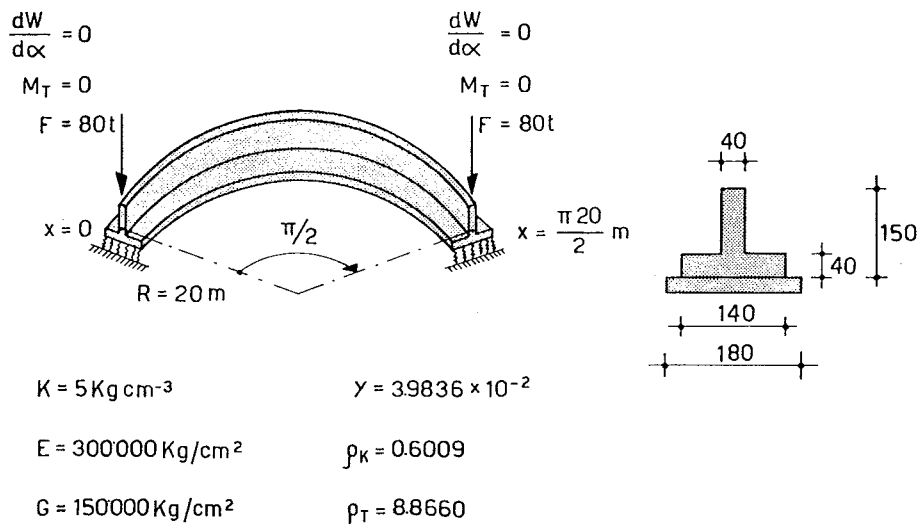


Fig. 3. - Caratteristiche elastiche e geometriche del primo esempio numerico relativo al caso di una trave anulare.

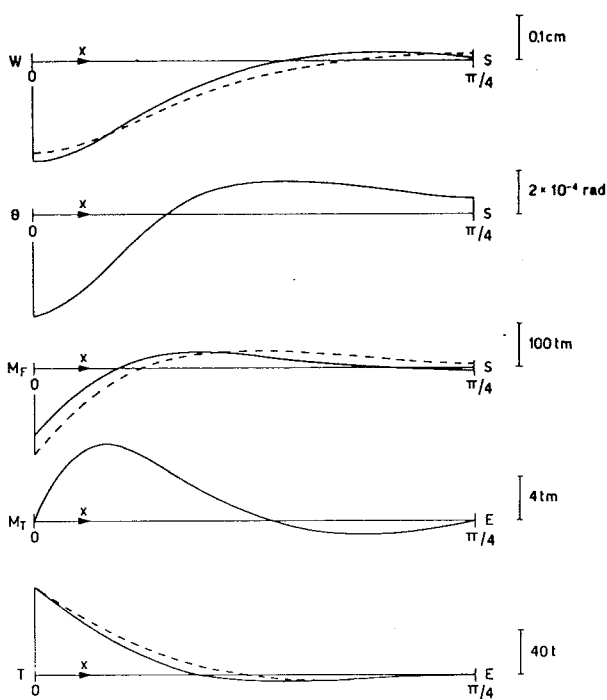


Fig. 4. - Andamenti degli spostamenti e delle caratteristiche della sollecitazione nel caso della trave anulare. È rappresentata solo una apertura di $\pi/4$ ed S sta per simmetrico mentre E per emisimmetrico. Le curve tratteggiate sono riferite alla stessa trave considerata rettilinea.

che forniscono i seguenti valori ai parametri ϵ_i :

$$\epsilon_1 = 21,2\%; \quad \epsilon_2 = -2,6\%; \quad \epsilon_3 = 6,3\%.$$

Si ha quindi una sensibile correzione allo smorzamento torsionale, mentre il problema flessionale non risente particolarmente dell'influenza delle curvature.

La risoluzione del problema tramite la metodologia del paragrafo 5 fornisce i diagrammi

di fig. 4 che per semplicità sono riportati per un'apertura di $\pi/4$, e dove S sta per simmetrico ed E per emisimmetrico; si osservi come, coerentemente con l'osservazione fatta su ϵ_2 ed ϵ_3 , i diagrammi di w , M_F , T siano molto poco discosti da quelli tratteggiate che sono riferiti alla stessa trave considerata rettilinea.

È interessante osservare che la più semplice risoluzione della stessa struttura con il metodo proposto da ALESSI e CHIARUGI [1974] fornisce ottima approssimazione in termini cinematici, ma mena buona in termini di momento flettente: ciò perché in esso non viene considerata l'azione torcente esercitata dal terreno. La seconda applicazione mostra gli effetti della curvatura su un problema essenzialmente flessionale; con riferimento alla sezione dell'applicazione precedente si è studiata una trave di lunghezza 10 m libera ad entrambi gli estremi, con un estremo caricato da una forza concentrata; sono stati esaminati i tre casi di raggio pari a 10 m, 20 m, ∞ ovvero trave rettilinea; i relativi parametri sono definiti nella tabella di fig 5.

Particolarmente significativo è l'andamento di w nei tre casi: la trave rettilinea (tratto e punto) risulta pressoché rigida rispetto al terreno, con un andamento di w quasi lineare; con l'aumentare della curvatura aumenta l'inflessione che diviene notevole nel caso di raggio maggiore (tratteggiato); tale incremento di deformabilità è il risultato della notevole correzione sulla lunghezza d'onda ϵ_3 , che raggiunge il 21,4%.

Interessanti sono anche i diagrammi del momento flettente e del momento torcente: al di-

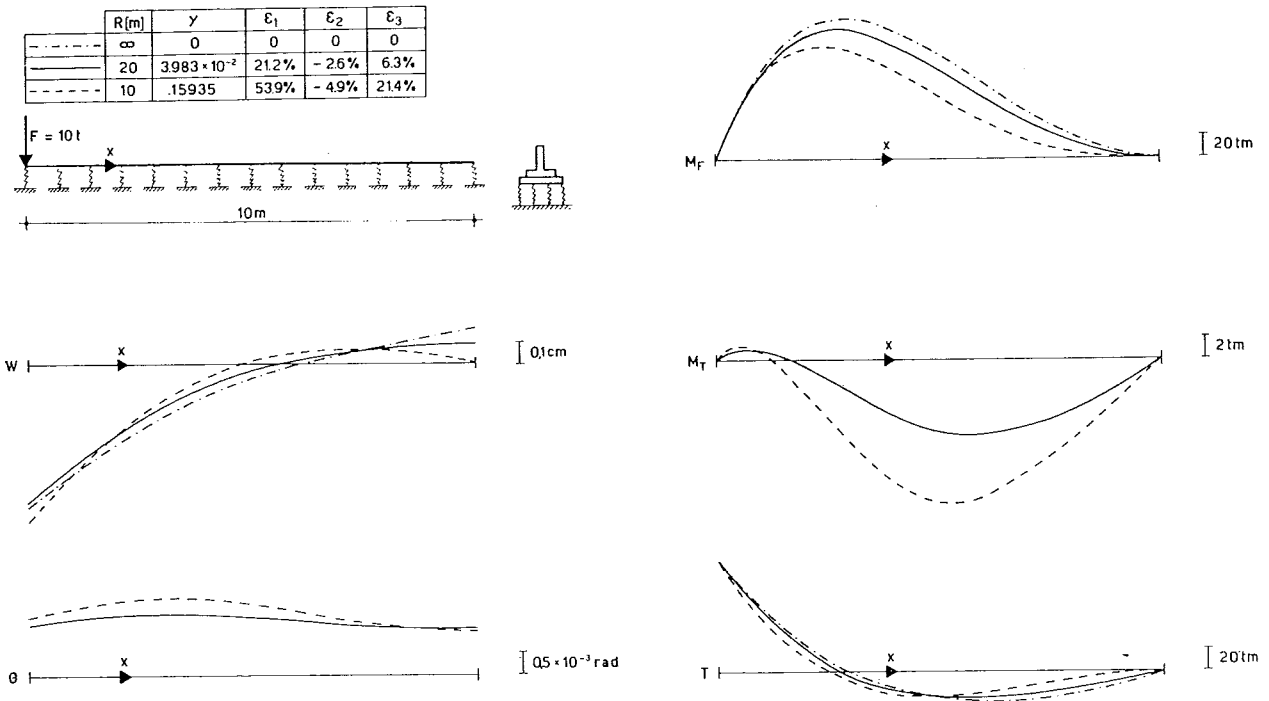


Fig. 5. - Effetto della curvatura su di un problema prevalentemente flessionale.

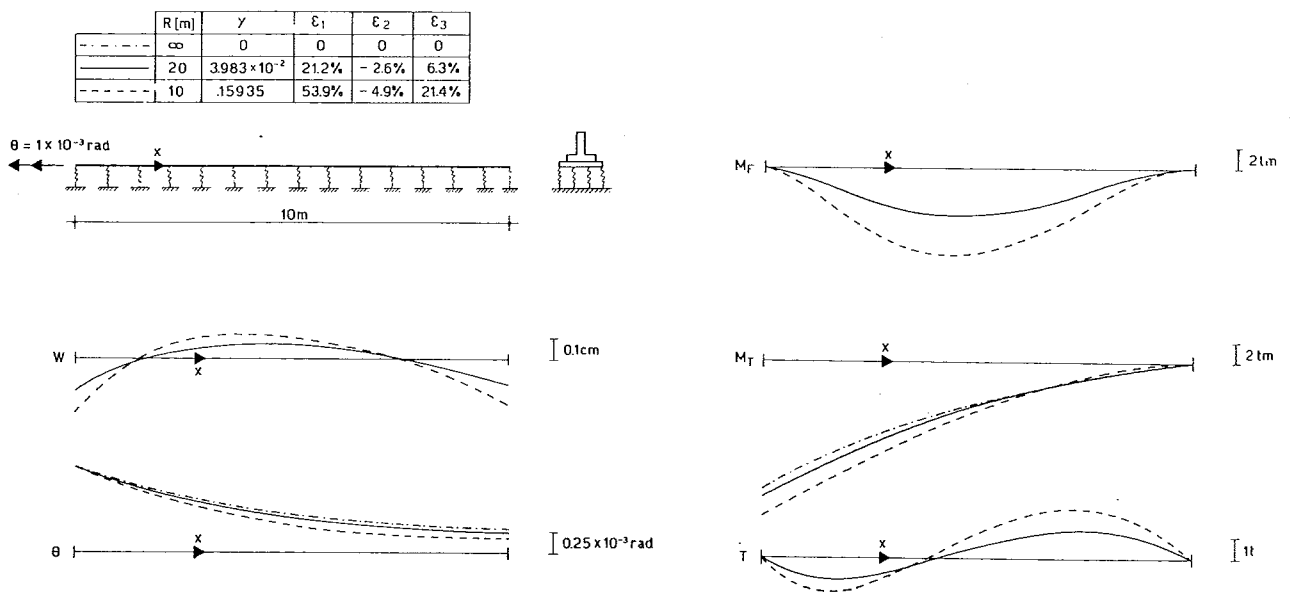


Fig. 6. - Effetto della curvatura su di un problema prevalentemente torsionale.

minuire del raggio aumenta il momento torcente e diminuisce il momento flettente; ciò avviene però senza che vari la «forma» del diagramma, non mutando la natura analitica del problema.

Il terzo esempio infine mostra gli effetti della curvatura sulla torsione: sono considerati gli stessi tre casi della precedente applicazione, avendo imposto ad una estremità una certa

rotazione torsionale; caratteristiche del problema e andamenti dei parametri sono riportati in fig. 6.

Si evidenzia dal diagramma delle θ il maggior smorzamento con l'aumentare della curvatura, e dal diagramma delle w la maggior deformabilità; si osservi infine come il momento torcente aumenti con la curvatura, ma senza cambiare forma.

Discussione dell'equazione caratteristica

L'equazione caratteristica cubica si presenta nella forma:

$$f(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (A1)$$

essendo

$$A = 2y - \rho_K \approx 0$$

$$B = 4 + y^2 + y \frac{\rho_K}{\rho_T} > 0 \quad (A2)$$

$$C = -4 (y\rho_T + \rho_K) < 0$$

Si vuole dimostrare che:

I) una radice è reale positiva

II) due radici sono complesse coniugate

III) la parte reale delle radici complesse è negativa.

Il punto I) segue immediatamente dalla regola di Cartesio: per $A > 0$ [$A < 0$] si hanno 1 [3] variazioni di segno nel polinomio caratteristico e quindi vi è sempre almeno una radice positiva.

Per dimostrare i punti II) e III) si deve preliminarmente osservare come nei reali casi strutturali si abbia:

$$\frac{y\rho_K}{4\rho_T} = \frac{1}{12} \left[\frac{B}{r} \right]^2 \ll 1; \quad (A3)$$

trascurando tale termine rispetto all'unità si ottiene la notevole proprietà:

$$AB - C \approx 2y(y^2 + 4 + 2\rho_T) > 0. \quad (A4)$$

$$f_{\max} = \frac{1}{27} [2A^2(A + \sqrt{A^2 - 3B}) - 6B\sqrt{A^2 - 3B} - 9(AB - C) + 18C] \quad (A6)$$

e per $A \leq -\sqrt{3B}$ è immediato constatare, anche in virtù delle (A4), che tutti gli addendi delle (A6) sono negativi e quindi si è nel caso 4.

Rimane da esaminare ciò che accade per $A \geq \sqrt{3B}$; sempre dalla (A6) si ottiene che se vale il segno di eguaglianza si ha $f_{\max} < 0$, e ciò deve valere in un intero intorno destro di $\sqrt{3B}$; il caso della diseguaglianza è poco reale nelle strutture, e può aversi solo per raggi molto piccoli con terreni molto deformabili. In tal caso in prima approssimazione può porsi $Y \gg 1$ ovvero:

$$\sqrt{A^2 - 3B} \approx y \quad (A7)$$

e con tale posizione e con semplici passaggi che si lasciano si può constatare che f_{\max} è negativa ed addirittura decrescente con A: si è quindi ancora nel caso 4.

Rimane da dimostrare il punto III); a tale fine si osservi che, dette $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ le tre radici di f, si hanno le ben note (si veda ad esempio VON KARMAN, BIOT 1940) relazioni tra coefficienti e radici:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= A \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 &= B \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -C \end{aligned} \quad (A8)$$

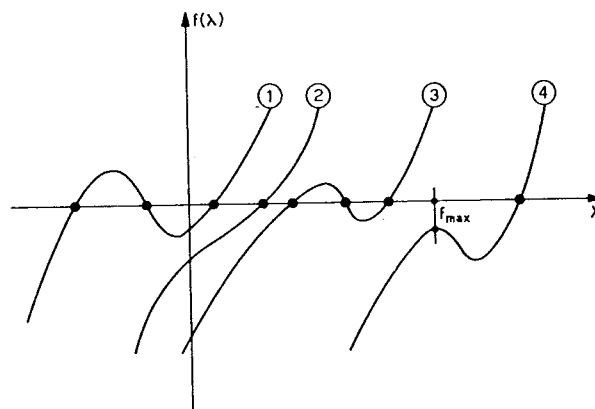


Fig. 7. - Andamenti dell'equazione caratteristica: si dimostra che è possibile solo il 2 o il 4.

Ciò premesso va notato che non risulta conveniente la discussione dell'equazione cubica per la via classica del discriminante, in quanto per la dipendenza dei coefficienti del polinomio (A1) da ben tre parametri si giunge ad espressioni troppo complesse; risulta invece conveniente una discussione sintetica della funzione $f(\lambda)$.

Poiché il coefficiente del termine cubico è positivo, mentre il termine noto è negativo, la f deve avere necessariamente uno dei 4 andamenti di figura 7. Quindi una condizione sufficiente affinché sia vera la II) è che ci si trovi nei casi 2 o 4 ovvero che la f non posseda estremi relativi, oppure che il massimo relativo sia negativo. Risulta quindi conveniente discutere esistenza e segno degli estremi relativi; dall'annullamento della derivata prima della f:

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2A\lambda + B = 0 \quad (A5)$$

si ottiene immediatamente che per $A \in] -\sqrt{3B}, \sqrt{3B}[$ gli estremi relativi non esistono, ovvero che si è nel caso 2.

Se A non appartiene a tale intervallo, si ha:

Ricordando la (A4) e ponendo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> 0 \\ \lambda_{2,3} &= v_1 \pm iv^2 \end{aligned} \quad (A9)$$

risulta immediato constatare che:

$$0 < AB - C = -2v_1(\lambda_1^2 + B) \quad (A10)$$

ovvero

$$v_1 < 0 \quad (A11)$$

che costituisce proprio l'affermazione fatta al punto III).

BIBLIOGRAFIA

ALESSI R., CHIARUGI A. - *Travi anulari su suolo elastico sottoposte a condizioni di carico qualsiasi*. INARCOS, n. 344, Agosto 1974.
 BLASKOWIAK S., KACZOWSKI Z. - *Iterative methods in structural analysis*. Pergamon Press, Warszawa, 1966.
 COMO M. - *Estensione, flessione e torsione degli archi a*

- volta sottile. Giornale del Genio Civile, Fascicolo 4^o, Aprile 1967.
- POZZATI P. - *Teoria e tecnica delle strutture*. Vol. 2^o, tomo I, pag. 135, Torino 1977.
- TIMOSHENKO S., GOODIER J.N. - *Theory of elasticity*. Mc Graw-Hill, 1951.
- VOLTERRA E. - *Bending of a Circular Beam Resting on an Elastic Foundation*. J. Appl. rech., ASME, 1952, vol. 19, n. 1.
- VOLTERRA E., CHUNG R. - *Constrained Circular Beams on Elastic Foundations*. Trans. ASCE, 1955, vol. 120.
- VON KARMAN T., BIOT M. - *Mathematical methods in Engineering*. Mc Graw-Hill, 1940.

SUMMARY

Curved beam on a Winkler soil

In this paper the problem of a curved beam on elastic foundation under Winkler hypothesis is solved by determining the governing differential equation. The resulting 6th order characteristic equation is then discussed and the general integral is given.

The anular beam, which can be studied directly by means of the harmonic analysis, is presented as a particular case by inserting appropriate boundary conditions.

The geometrical properties and sign conventions are given in fig. I where T is the shear resultant, M_f is the bending moment and M_t is the torque. The relations between these resultants and the external distributed loads (p_t - transversal load and m_t - torque moment) are given in (1), the prime standing for derivation with respect to x .

The distributed actions, in accordance with (2), are represented by the external loads p and m and by the soil reaction. B is the soil foundation width and k is the Winkler constant.

In (3), the elasticity relations which relate stress resultants to deflections w and slopes ϕ are formulated.

If we indicate with α^4 and β^2 the parameters of equations (7) and (8) which govern the bending and torsional equations of the rectilinear beam, ρ_t being the ratio (6) between bending and torsional rigidity, it is possible with simple differential operations to derive the system of equations in w and ϕ (4), (5) and, as a particular case, the well-known equations of a rectilinear beam (9) and (10). The equation of a curved beam (14) can be derived as a particular case of the given general equation.

On the contrary, the problem of a curved beam on elastic foundation examined herein, is governed by the 6th order differential equation in w (13) and, having made the position (15), by the characteristic equation (16). It should be noted that the adimensional parameters which govern the problem are the following three: ρ_t (already defined), ρ_k (ratio between bending and torsional behaviour of the rectilinear beam on elastic foundation) and y (dimensionless parameter of the radius of the beam).

In the appendix it is proved that the roots of the characteristic equation (16) have the following properties:

- I) one root is positive real
- II) two roots are complex conjugates

III) the real part of the complex roots is negative.

The solutions are therefore of the type (21) and the general integral is of the form (22) the parameter β' , α' , α'' , being related to the rectilinear beam β , α parameters through (23) or through ε_1 , ε_2 , ε_3 which are function of y , ρ_t , ρ_k . Hence it is proved that the curvature of the beam does not modify the mathematical problem i.e. the analytical form of the general integrals governing the bending and torsional problem of the rectilinear beam. The numerical values of bending and torsional ramping together with the period of the beam are instead modified.

Equation (24) analytically synthetizes that the beam with zero curvature yields the rectilinear beam solutions (25).

The ε_1 , ε_2 , ε_3 parameters can be obtained in closed form from the solution of the cubic characteristic equation, they can be otherwise derived numerically. These parameters are diagrammatically given in fig. 2 for some significant values of ρ_t and ρ_k . It should be observed that the torsional damping increases with the curvature while the bending one remains constant. On the other hand α'' results greater than α' thus decreasing the period of the beam and increasing flexural deformations.

The expression relating kinematical and stress resultant parameters to deflection w is given by equations (27) ÷ (31), where the prime stands for derivation with respect to α . With the notations (32), (33) (matrix of derivation) and (34) is it trivial to prove that equations (27) ÷ (31) lead to (38). In this equation f is the generic function of the set $\{w, w', \theta, M_f, M_T, T\}$ while the c_i , a_{if} coefficients are represented in table I. It should be noted that it is immediate to implement equation (38) even on a personal computer thus deriving the vector c representing the integration constants for an assigned kinematical or static boundary condition.

Three numerical application are then presented. In the first one an anular beam with four symmetrical forces is studied. Symmetry conditions allow to study the beam of fig. 3 where geometrical and elastic properties are given. This application is governed primarily by bending, the parameters requiring small corrections; in fact we have:

$$\varepsilon_2 = -2,6\%, \quad \varepsilon_3 = 6,3\%.$$

The diagrams showing w , M_f and T in fig. 4 are therefore similar to those which could be obtained by assuming rectilinear conditions (dashed lines).

The second application is summarized in fig. 5. It is related to a 10 meters beam having the same cross-section of the first beam. The beam is loaded by a force at its end. In order to investigate the effects of the curvature in such a problem mainly governed by bending having fixed the length of the beam, three different values of the radius have been analyzed: 10 m., 20 m., ∞ . Again deflections increase with the radius of the beam while M_f and M_t values without to modify shape.

The last application is relative to the same beam loaded by a torque moment. In fig. 6 it is shown this primarily torsional problem. Again it can be observed the increase of damping and deformability with the radius of curvature while the shape of the M_f , M_t , T diagrams remains of the same type.