

Il carico limite inclinato delle fondazioni nastriformi con le caratteristiche

P. DE SIMONE *

SOMMARIO: Il carico limite di una fondazione nastriforme con un'inclinazione costante δ su un mezzo $\varphi \neq 0, c \neq 0, \gamma = 0$ o $\varphi = 0, c \neq 0, \gamma \neq 0$, viene ottenuto usando il metodo delle caratteristiche, ed in particolare gli invarianti di Riemann ed il primo teorema di Hencky.

I coefficienti d'inclinazione sono dati in funzione dell'angolo Δ di Caquot, per il quale vengono ricavate delle espressioni che costituiscono le generalizzazioni di quella ottenuta da Caquot; viene anche studiato il problema dell'inclinazione limite δ^* . È mostrato che gli effetti di c e di γD non sono semplicemente sovrapponibili, e viene determinato l'errore associato all'ipotesi di sovrapposizione.

Infine si considera il valore della soluzione ottenuta dal punto di vista della Fisica Matematica, e si mostra che il problema del carico limite è ben posto nel senso di Hadamard.

1. Introduzione

Il problema del carico limite delle fondazioni superficiali è stato studiato da diversi Autori a partire dal lavoro di PRANDTL [1920], in diverse condizioni di geometria, carico e sotto-suolo, mediante i metodi dell'equilibrio limite, dell'analisi limite e delle caratteristiche.

Nel metodo dell'equilibrio limite, molto usato per il passato, si considera il solo equilibrio globale del volume di scorrimento, e vengono fatte ipotesi arbitrarie sulla forma di tale volume e sulla distribuzione delle tensioni sul suo contorno.

I metodi dell'analisi limite, fondati sull'applicazione dei teoremi cinematico e statico stabiliti da DRUCKER *et al.* [1951a; 1951b], consentono di determinare un intervallo in cui il carico limite è certamente contenuto; ma quest'intervallo può essere ampio, soprattutto per le difficoltà connesse con l'applicazione del teorema statico.

Il metodo delle caratteristiche, che è un metodo generale della Fisica Matematica per la risoluzione dei problemi di tipo iperbolico (quale quello presente), consente di determinare direttamente il carico limite mediante integrazione di equazioni differenziali di tipo ordinario, nelle condizioni di deformazione piana ovvero assialsimmetrica. In particolare, per i mezzi $\varphi=0, c \neq 0, \gamma \neq 0$ e $\varphi \neq 0, c \neq 0, \gamma = 0$, è possibile risolvere il problema in forma chiusa per diverse condizioni al contorno di geometria e di carico [SOKOLOVSKII, 1965]. Si tratta evidentemente di mezzi di grande utilità nella pratica tecnica: il primo descrive, come è noto, il com-

portamento non drenato delle argille sature analizzato in termini di tensioni totali ($c = c_u$), mentre il secondo corrisponde all'analisi in termini di tensioni effettive (in genere in condizioni drenate) sia delle argille che dei terreni granulari ($\varphi = \varphi', c = c'$), nell'ipotesi di peso proprio trascurabile (tale effetto può poi essere portato in conto mediante il metodo di sovrapposizione).

Nella nota presente viene risolto in forma chiusa il problema del carico limite inclinato con riferimento a tali mezzi, utilizzando il metodo delle caratteristiche, ed in particolare gli invarianti di Riemann ed il primo teorema di Hencky. Vengono quindi forniti alcuni diagrammi di uso pratico per la determinazione dei coefficienti di inclinazione, e viene verificata l'entità dell'errore associato all'ipotesi di sovrapposizione. Vengono altresì svolte alcune considerazioni sul valore dei risultati ottenuti.

2. Equazioni reggenti, invarianti di Riemann, primo teorema di Hencky

Il problema dell'equilibrio plastico di un mezzo rigido-plastico in deformazione piana è staticamente determinato nel senso di HENCKY [1923]; esistono cioè tante equazioni contenenti le sole tensioni quante sono le componenti di tensione incognite. Tali equazioni sono le due condizioni indefinite di equilibrio piano:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma \quad (1b)$$

* Dott. Ing. Pasquale DE SIMONE, Assistente Ordinario presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli.

con l'asse y positivo verso il basso (vedi fig. 1a) e γ peso dell'unità di volume, e la condizione di plasticizzazione, che per un mezzo di Coulomb si scrive:

$$\sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin\varphi + c \cos\varphi \quad (2)$$

dove c è la coesione e φ l'angolo di attrito del mezzo.

Se le condizioni al contorno coinvolgono solo le tensioni, il problema è staticamente determinato anche nel senso di HILL [1950], e cioè le tensioni possono essere determinate nell'intero dominio plastico senza considerare le velocità di deformazione, che possono essere calcolate a parte successivamente.

$$\frac{\partial p}{\partial x} (1 + \sin\varphi \cos 2\vartheta) + \frac{\partial p}{\partial y} (-\sin\varphi \sin 2\vartheta) + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} [-2\sin 2\vartheta (p \sin\varphi + c \cos\varphi)] + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} [-2\cos 2\vartheta (p \sin\varphi + c \cos\varphi)] = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} (-\sin\varphi \sin 2\vartheta) + \frac{\partial p}{\partial y} (1 + \sin\varphi \cos 2\vartheta) + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} [-2\cos 2\vartheta (p \sin\varphi + c \cos\varphi)] + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} [2\sin 2\vartheta (p \sin\varphi + c \cos\varphi)] = \gamma \quad (4b)$$

Un'analisi (vedi Appendice 2) del sistema quasi-lineare di equazioni alle derivate parziali (4) mostra che esso è dotato delle due famiglie di curve caratteristiche reali e distinte:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(-\vartheta \mp \varepsilon) \quad (5)$$

dove con ε si è indicato l'angolo $\pi/4 - \varphi/2$; tale sistema è dunque iperbolico (vedi COURANT e HILBERT [1962]), e si può studiare col metodo delle caratteristiche.

Il passo centrale del metodo consiste nella sostituzione delle coordinate cartesiane x - y con delle coordinate curvilinee riferite alle due fa-

Esprimendo le componenti di tensione mediante la tensione media $p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ e l'angolo ϑ formato dalla tensione principale σ_1 con l'asse x (positivo se antiorario, vedi fig. 1), si hanno, allo stato plastico, le seguenti relazioni (vedi Appendice 1):

$$\sigma_x = p (1 + \sin\varphi \cos 2\vartheta) + c \cos\varphi \cos 2\vartheta \quad (3a)$$

$$\sigma_y = p (1 - \sin\varphi \cos 2\vartheta) - c \cos\varphi \sin 2\vartheta \quad (3b)$$

$$\tau_{xy} = -p \sin\varphi \sin 2\vartheta - c \cos\varphi \sin 2\vartheta \quad (3c)$$

che introdotte nelle (1), con c e φ costanti, danno le condizioni indefinite di equilibrio plastico piano in coordinate cartesiane x - y per mezzo omogeneo:

miglie di curve caratteristiche (5) α e β (dove con α (prima famiglia) si indicano le curve col segno meno, e con β (seconda famiglia) quelle col segno più). Le curve caratteristiche, infatti, costituiscono una sorta di « direzioni principali » per il problema, nel senso che il sistema di equazioni iniziale (alle derivate parziali), se riferito ad esse, diventa di tipo ordinario, contenendo ciascuna equazione derivate solo rispetto ad una coordinata (vedi COURANT e HILBERT [1962]).

Per ottenere tale trasformazione basta moltiplicare la (4a) per $\sin(-\vartheta + \varepsilon)$ e la (4b) per $-\cos(-\vartheta + \varepsilon)$ e sommare i risultati; dopo alcune manipolazioni trigonometriche, tenendo anche conto della fig. 1a, si ottiene:

$$\frac{\partial p}{\partial s_\alpha} \sin 2\varepsilon + \frac{\partial \vartheta}{\partial s_\alpha} 2(p \sin\varphi + c \cos\varphi) = -\gamma \left(\frac{\partial x}{\partial s_\alpha} \cos 2\varepsilon - \frac{\partial y}{\partial s_\alpha} \sin 2\varepsilon \right) \quad (6a)$$

dove con s_α si è indicata l'ascissa curvilinea lungo la generica curva α ; analogamente multi-

$$\frac{\partial p}{\partial s_\beta} \sin 2\varepsilon - \frac{\partial \vartheta}{\partial s_\beta} 2(p \sin \varphi + c \cos \varphi) = \gamma \left[\frac{\partial x}{\partial s_\beta} \cos 2\varepsilon + \frac{\partial y}{\partial s_\beta} \sin 2\varepsilon \right] \quad (6b)$$

(s_β ascissa curvilinea lungo β).

Le equazioni (6) sono le condizioni indefinite dell'equilibrio plastico piano (per mezzo omogeneo) riferite alle curve caratteristiche. Come si vede la prima contiene derivate solo rispetto ad s_α , mentre la seconda solo rispetto ad s_β ; tuttavia adesso le incognite sono quattro, giacché rispetto ad s_α ed s_β risultano incognite oltre a p e ϑ anche x ed y , ed il problema è retto dalle quattro equazioni (5) e (6).

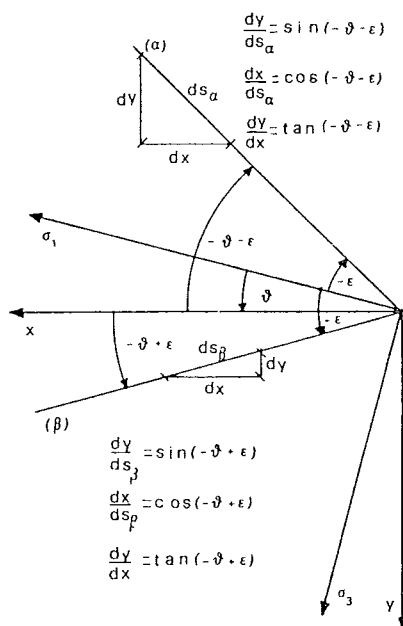


Fig. 1a

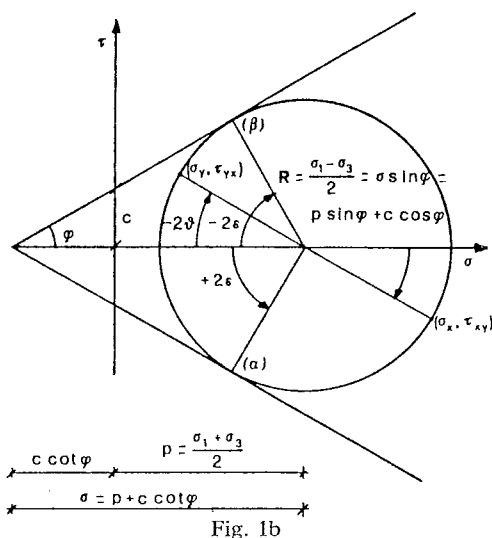


Fig. 1b

Fig. 1. - Linee caratteristiche e definizione di ϑ : a) nel piano fisico; b) nel piano di Mohr.

plicando la (4a) per $-\sin(-\vartheta - \varepsilon)$ e la (4b) per $\cos(-\vartheta - \varepsilon)$ e sommando, alla fine si ha:

2.1. Mezzo di Coulomb privo di peso proprio

Nel caso del mezzo di Coulomb privo di peso proprio ($\varphi \neq 0, c \neq 0, \gamma = 0$), introducendo con SOKOLOVSKII [1965] il parametro adimensionale χ :

$$\chi = \frac{\cot \varphi}{2} \ln \frac{\sigma}{\sigma_r} \quad (7)$$

in cui σ è la tensione media equivalente (vedi fig. 1b) e σ_r una tensione costante di riferimento, le equazioni (6) si riducono alle:

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} (\chi + \vartheta) = 0 \quad (8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_\beta} (\chi - \vartheta) = 0 \quad (8b)$$

che integrate rispettivamente lungo α e β danno gli invarianti di Riemann:

$$\chi + \vartheta = \text{cost} \quad (\text{lungo } \alpha) \quad (9a)$$

$$\chi - \vartheta = \text{cost} \quad (\text{lungo } \beta) \quad (9b)$$

Scrivendo le (9) fra i punti A, B, C, D (vedi fig. 2) di una generica maglia del reticolo di caratteristiche:

$$\chi_A + \vartheta_A = \chi_B + \vartheta_B$$

$$\chi_C + \vartheta_C = \chi_D + \vartheta_D$$

$$\chi_A - \vartheta_A = \chi_C - \vartheta_C$$

$$\chi_B - \vartheta_B = \chi_D - \vartheta_D$$

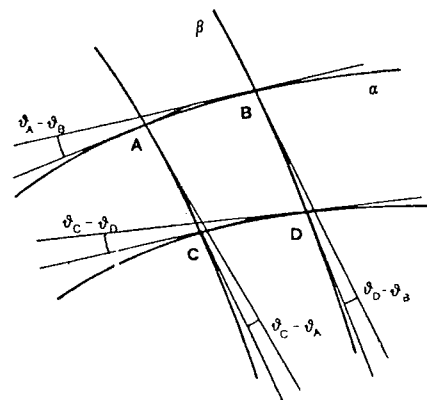


Fig. 2. - Primo teorema di Hencky.

ed eliminando le χ , si ottiene l'estensione del primo teorema di Hencky al mezzo $\varphi \neq 0, \gamma = 0$ [BOOKER e DAVIS, 1972]:

$$\vartheta_A - \vartheta_B = \vartheta_C - \vartheta_D \quad (10)$$

« La variazione di ϑ corrispondente al passaggio da una caratteristica della famiglia β (α) ad un'altra, lungo una generica caratteristica della famiglia α (β), è la stessa per ogni caratteristica α (β) ». Nel problema del carico limite risulta di grande utilità l'evidente corollario: « Se una caratteristica α (β) è rettilinea nel tratto compreso fra due caratteristiche β (α), allora tutte le caratteristiche α (β) sono rettilinee fra tali due caratteristiche β (α) ».

2.2. Mezzo di Tresca pesante

Nel caso del mezzo di Tresca pesante ($\varphi = 0, c \neq 0, \gamma \neq 0$), le relazioni (3) si particolarizzano nelle seguenti (vedi fig. 3):

$$\sigma_x = p + c \cos 2\vartheta \quad (11a)$$

$$\sigma_y = p - c \cos 2\vartheta \quad (11b)$$

$$\tau_{xy} = -c \sin 2\vartheta \quad (11c)$$

e le equazioni reggenti (6) diventano:

$$\frac{\partial p}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial \vartheta}{\partial s_\alpha} 2c = \gamma \frac{\partial y}{\partial s_\alpha} \quad (12a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s_\beta} - \frac{\partial \vartheta}{\partial s_\beta} 2c = \gamma \frac{\partial y}{\partial s_\beta} \quad (12b)$$

Introducendo ancora con SOKOLOVSKII [1965] il parametro χ_γ :

$$\chi_\gamma = \frac{p - \gamma y}{2c} \quad (13)$$

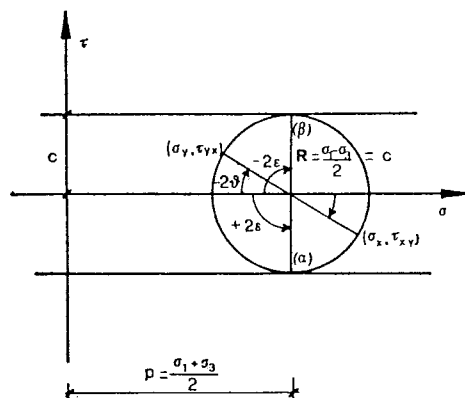


Fig. 3. - Cerchio di Mohr per $\varphi = 0$.

le equazioni (12) diventano (se γ è costante):

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} (\chi_\gamma + \vartheta) = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_\beta} (\chi_\gamma - \vartheta) = 0 \quad (14b)$$

da cui si ottengono ancora gli invarianti di Riemann:

$$\chi_\gamma + \vartheta = \text{cost} \quad (\text{lungo } \alpha) \quad (15a)$$

$$\chi_\gamma - \vartheta = \text{cost} \quad (\text{lungo } \beta) \quad (15b)$$

La struttura delle (15) consente ancora di estendere al mezzo in esame il primo teorema di Hencky con relativo corollario [BOOKER e DAVIS, 1972]; va tuttavia notato che in questo caso la costanza di ϑ non implica costanza della tensione media p .

3. Coefficienti d'inclinazione

3.1. Mezzo di Coulomb

Si vuole ora determinare il carico limite di una fondazione nastriforme su un mezzo $\varphi \neq 0, \gamma = 0$, nell'ipotesi che il carico limite sia inclinato di un angolo δ rispetto alla verticale (vedi fig. 4).

3.1.1. Caso $c = 0, \gamma D \neq 0$

Consideriamo dapprima il caso del mezzo privo di coesione ($c = 0$) e dotato di sovraccarico γD .

A rottura un volume di terreno PSRQ al di sotto ed a destra della base PQ (vedi fig. 4), la cui forma ed estensione sono peraltro da determinare, si muoverà nel senso mostrato dalla freccia, con tutti i suoi punti allo stato plastico.

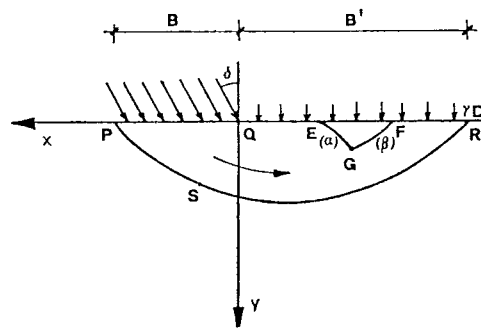


Fig. 4. - Regione plastica per carico inclinato.

La componente verticale del carico limite q_y , pari alla componente normale di tensione σ_{yM} su

un elemento orizzontale nella zona mista (fig. 5), è data da:

$$q_y = \gamma D \frac{1 + \sin\varphi \cos(\Delta + \delta)}{1 - \sin\varphi} \exp[(\pi - \Delta - \delta) \tan\varphi] \quad (22)$$

Se si scrive la (22) nella forma simbolica:

$$q_y = N_q i_q \gamma D \quad (23)$$

con $N_q = (1 + \sin\varphi)/(1 - \sin\varphi) \exp(\pi \tan\varphi)$, il coefficiente d'inclinazione i_q risulta avere l'espressione:

$$i_q = \frac{1 + \sin\varphi \cos(\Delta + \delta)}{1 + \sin\varphi} \exp[-(\Delta + \delta) \tan\varphi] \quad (24)$$

Infine dalla fig. 6 è ora possibile ricavare anche l'estensione $B' = QR$ della zona passiva:

$$B' = \frac{\sin(\vartheta_M - \varepsilon)}{\sin \varepsilon} \exp(\vartheta_M \tan\varphi) B \quad (25)$$

dove $B = PQ$.

3.1.2. Caso $c \neq 0$, $\gamma D = 0$

Nel caso $c \neq 0$, $\gamma D = 0$ la tensione media equivalente nella zona di Cauchy σ_c vale (vedi fig. 7):

$$\sigma_c = \frac{c \cot\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad (26)$$

Se ci si riferisce all'inclinazione effettiva δ , ed al relativo angolo di Caquot Δ (vedi fig. 7)

$$q_y = c \cot\varphi \frac{1 + \sin\varphi \cos(\Delta + \delta)}{1 - \sin\varphi} \exp[(\pi - \Delta - \delta) \tan\varphi] - c \cot\varphi \quad (27)$$

Scrivendo anche la (27) nella forma simbolica:

$$q_y = N_c i_c c \quad (28)$$

con $N_c = (N_q - 1) \cot\varphi$, ne risulta per il coefficiente d'inclinazione i_c l'espressione:

$$i_c = \frac{\{1 + \sin\varphi \cos(\Delta + \delta)\} \exp[(\pi - \Delta - \delta) \tan\varphi] - (1 - \sin\varphi)}{(1 + \sin\varphi) \exp(\pi \tan\varphi) - (1 - \sin\varphi)} \quad (29)$$

ovvero quella più compatta, in funzione di N_q ed i_q :

$$i_c = \frac{N_q i_q - 1}{N_q - 1} \quad (30)$$

La (30) potrebbe anche ottenersi applicando il teorema degli stati corrispondenti di CAQUOT [1934], e cioè scrivendo la (22) con riferimento all'inclinazione equivalente δ' (e relativo angolo Δ' , vedi fig. 7) e ad un sovraccarico pari a $c \cot\varphi$,

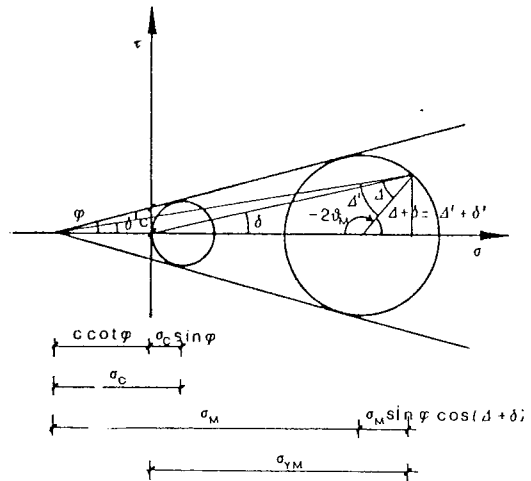


Fig. 7. - Cerchi di Mohr della zona di Cauchy e della zona mista: $\varphi \neq 0$, $\gamma = 0$, $c \neq 0$, $\gamma D = 0$.

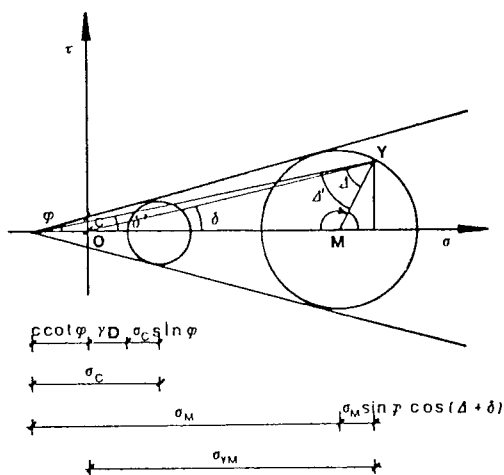


Fig. 8. - Cerchi di Mohr della zona di Cauchy e della zona mista: $\varphi \neq 0$, $\gamma = 0$, $c \neq 0$, $\gamma D \neq 0$.

e poi sottraendo $c \cot \varphi$ e considerando che $\Delta' + \delta' = \Delta + \delta$.

3.1.3. Caso $c \neq 0$, $\gamma D \neq 0$

Nel caso generale $c \neq 0$, $\gamma D \neq 0$, σ_c è data (vedi fig. 8) da:

$$\sigma_c = \frac{\gamma D + c \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (31)$$

e ϑ_M e σ_M ancora dalle (20) e (21); il carico limite ha quindi l'espressione:

$$q_y = (\gamma D + c \cot \varphi) \frac{1 + \sin \varphi \cos (\Delta + \delta)}{1 - \sin \varphi} \exp [(\pi - \Delta - \delta) \tan \varphi] - c \cot \varphi \quad (32)$$

Se si scrive la (32) nella forma simbolica:

$$q_y = N_{i_c} c + N_{i_q} \gamma D \quad (33)$$

i coefficienti i_q ed i_c conservano le espressioni formali (24) e (29); tuttavia poiché in ciascuno dei casi esaminati Δ ha una diversa dipendenza dai parametri del problema, sussistono differenze sostanziali fra essi.

3.1.4. Espressione generalizzata dell'angolo Δ di Caquot ($\varphi \neq 0$)

Per utilizzare le (22), (27) e 32 occorre conoscere il valore dell'angolo Δ ; per ottenere un

legame fra Δ ed i parametri noti del problema, applichiamo il teorema dei seni al triangolo OMY di fig. 8 (caso generale $c \neq 0$, $\gamma D \neq 0$); si può allora scrivere:

$$\frac{\sin \Delta}{\sin \delta} = \frac{\sigma_M - c \cot \varphi}{\sigma_M \sin \varphi} \quad (34)$$

e sostituendo nella (34) il valore di σ_M :

$$\sigma_M = \frac{\gamma D + c \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp [(\pi - \Delta - \delta) \tan \varphi] \quad (35)$$

la relazione cercata, e cioè l'espressione di Caquot per Δ generalizzata al caso $c \neq 0$:

$$\sin \Delta = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \left\{ 1 - \frac{\cot \varphi (1 - \sin \varphi)}{(\Gamma + \cot \varphi) \exp [(\pi - \Delta - \delta) \tan \varphi]} \right\} \quad (36)$$

dove si è posto $\Gamma = \gamma D/c$; come si vede nel caso generale Δ (e quindi i_q ed i_c) è funzione dei tre parametri δ , φ e Γ . Nel caso $c = 0$, $\gamma D \neq 0$ ($\Gamma \rightarrow \infty$) la (36) restituisce la ben nota relazione di CAQUOT [1934]:

$$\sin \Delta = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \quad (37)$$

con Δ funzione solo di δ e di φ , mentre nel caso $c \neq 0$, $\gamma D = 0$ ($\Gamma = 0$) essa diventa:

$$\sin \Delta = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \left\{ 1 - \frac{1 - \sin \varphi}{\exp [(\pi - \Delta - \delta) \tan \varphi]} \right\} \quad (38)$$

con Δ ancora funzione solo di δ e di φ .

3.1.5. Inclinazione limite δ^* ($\varphi \neq 0$)

Se si incrementa l'angolo δ , con φ e Γ costanti, a partire da zero, si raggiunge una inclinazione limite δ^* , cui corrisponde collasso per

scorrimento lungo la base, ovvero volume di scorrimento nullo (vedi fig. 9). L'angolo ϑ_M è allora pari ad ε , ovvero $\Delta + \delta^* = \pi/2 + \varphi$, e quindi dalla (36), o direttamente dalla fig. 10 si ottiene l'espressione per δ^* :

$$\cot \delta^* = \cot \varphi - \frac{1 - \sin \varphi}{\sin^2 \varphi (\Gamma + \cot \varphi) \exp [(\pi/2 - \varphi) \tan \varphi]} \quad (39)$$

che costituisce una generalizzazione di quella ottenuta da KEZDI [1961] per il caso $\Gamma = 0$;

analogamente i coefficienti di inclinazione limite i_q^* ed i_c^* sono:

$$i_q^* = (1 - \sin \varphi) \exp [-(\pi/2 + \varphi) \tan \varphi] \quad (40)$$

$$i_c^* = \frac{\cos^2 \varphi \exp [(\pi/2 - \varphi) \tan \varphi] - (1 - \sin \varphi)}{(1 + \sin \varphi) \exp (\pi \tan \varphi) - (1 - \sin \varphi)} \quad (41)$$

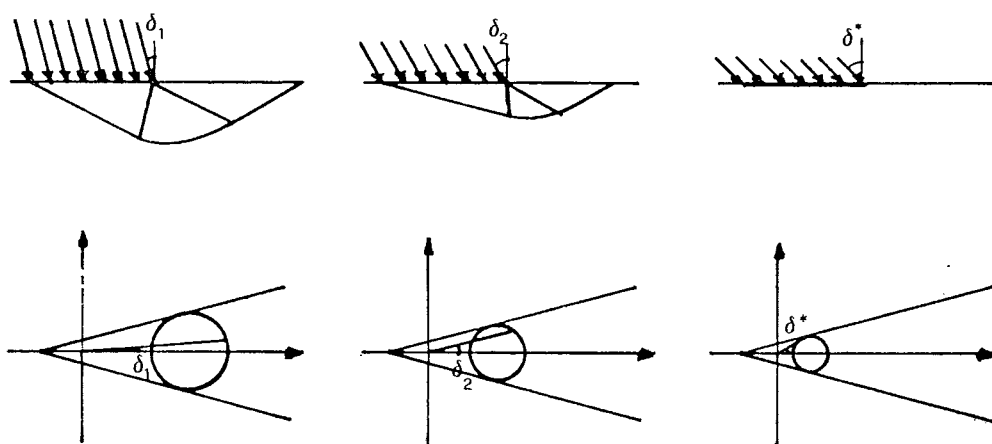


Fig. 9. - Inclinazione limite δ^* .

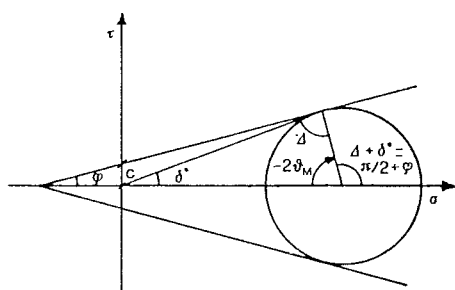


Fig. 10. - Cerchio di Mohr per l'inclinazione limite δ^* ($\varphi \neq 0$)

come si vede indipendenti da Γ ; da notare che q_y/c continua a dipendere da Γ , ma in questo caso linearmente.

I valori limite δ^* , i_q^* ed i_c^* sono dati in figg. 11 e 12 ed in tabb. I e II, mentre Δ , i_q ed i_c sono diagrammati nelle figg. 13, 14 e 15.

3.2. Mezzo di Tresca

Si vuole ora risolvere lo stesso problema del carico limite inclinato, per un mezzo di Tresca pesante ($\varphi = 0$, $c \neq 0$, $\gamma \neq 0$).

3.2.1. Caso $\gamma D = 0$

Usando gli invarianti di Riemann (15) è facile verificare che anche in questo caso ϑ e χ_r sono costanti nella zona di Cauchy, con $\vartheta_c = 0$ (caratteristiche rettilinee ed inclinate di $\mp \pi/4$ e $\chi_{rc} = 1/2$ (vedi fig. 16), mentre la tensione media p non è più costante, ma linearmente crescente con la profondità secondo la:

$$p_{cy} = p_{co} + \gamma y \quad (42)$$

TABELLA I
INCLINAZIONE LIMITE δ^* (φ IN GRADI, δ^* IN RADIANTI)

$\Gamma \backslash \varphi$	0	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0	.37	.55	.61	.67	.74	.80	.87	.94
1	.27	.45	.51	.58	.64	.71	.78	.86
5	.13	.34	.41	.49	.57	.65	.73	.81
∞	.00	.26	.35	.44	.52	.61	.70	.79

TABELLA II
COEFFICIENTI D'INCLINAZIONE LIMITE i_q^* , i_c^* (δ^* IN GRADI)

φ	0	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
i_q^*	1.00	.45	.33	.23	.15	.09	.05	.03
i_c^*	.50	.27	.20	.15	.10	.06	.04	.02

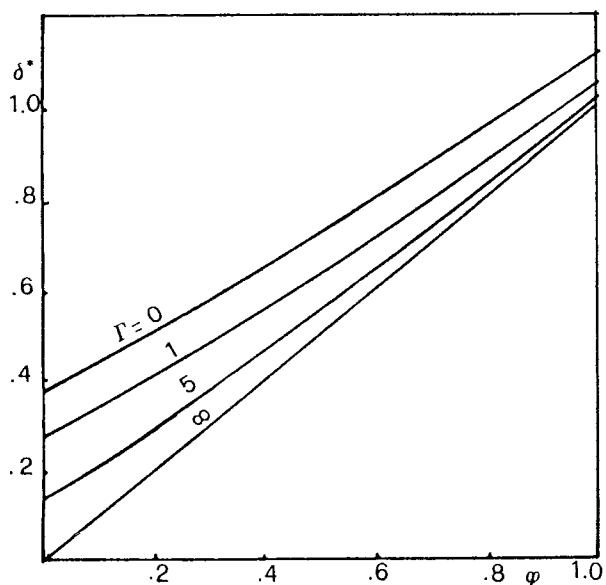


Fig. 11. - Inclinazione limite δ^* (δ^* e φ in radianti).

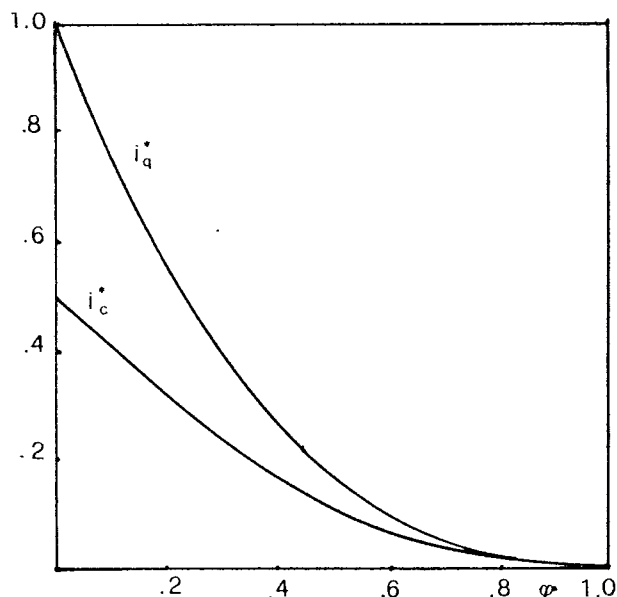


Fig. 12. - Coefficienti i_q^* ed i_c^* (φ in radianti).

Nella successiva zona di Riemann le spirali logaritmiche (caratteristiche β) degenerano in archi di cerchio; scrivendo la (15b) tra i punti I e T di una generica caratteristica β (v. fig. 17) si ricava l'espressione per la tensione media p_{0y} :

$$p_{0y} = p_{c0} + \gamma y + 2c\vartheta \quad (43)$$

Infine nella zona mista χ_γ e ϑ sono nuovamente costanti; utilizzando l'estensione al caso $\varphi = 0$ dell'angolo Δ mostrata in fig. 16, si vede che per ϑ_M vale ancora la (20), e quindi il carico limite (componente verticale) è dato da:

$$q_y = c [1 + \pi - (\Delta + \delta) + \cos(\Delta + \delta)] \quad (44)$$

indipendente dal peso proprio, come nel caso del carico verticale. Usando l'espressione simbolica:

$$q_y = N_c^0 i_c^0 c \quad (45)$$

con $N_c^0 = 2 + \pi$, si vede che i_c^0 ha l'espressione:

$$i_c^0 = \frac{1 + \pi - (\Delta + \delta) + \cos(\Delta + \delta)}{2 + \pi} \quad (46)$$

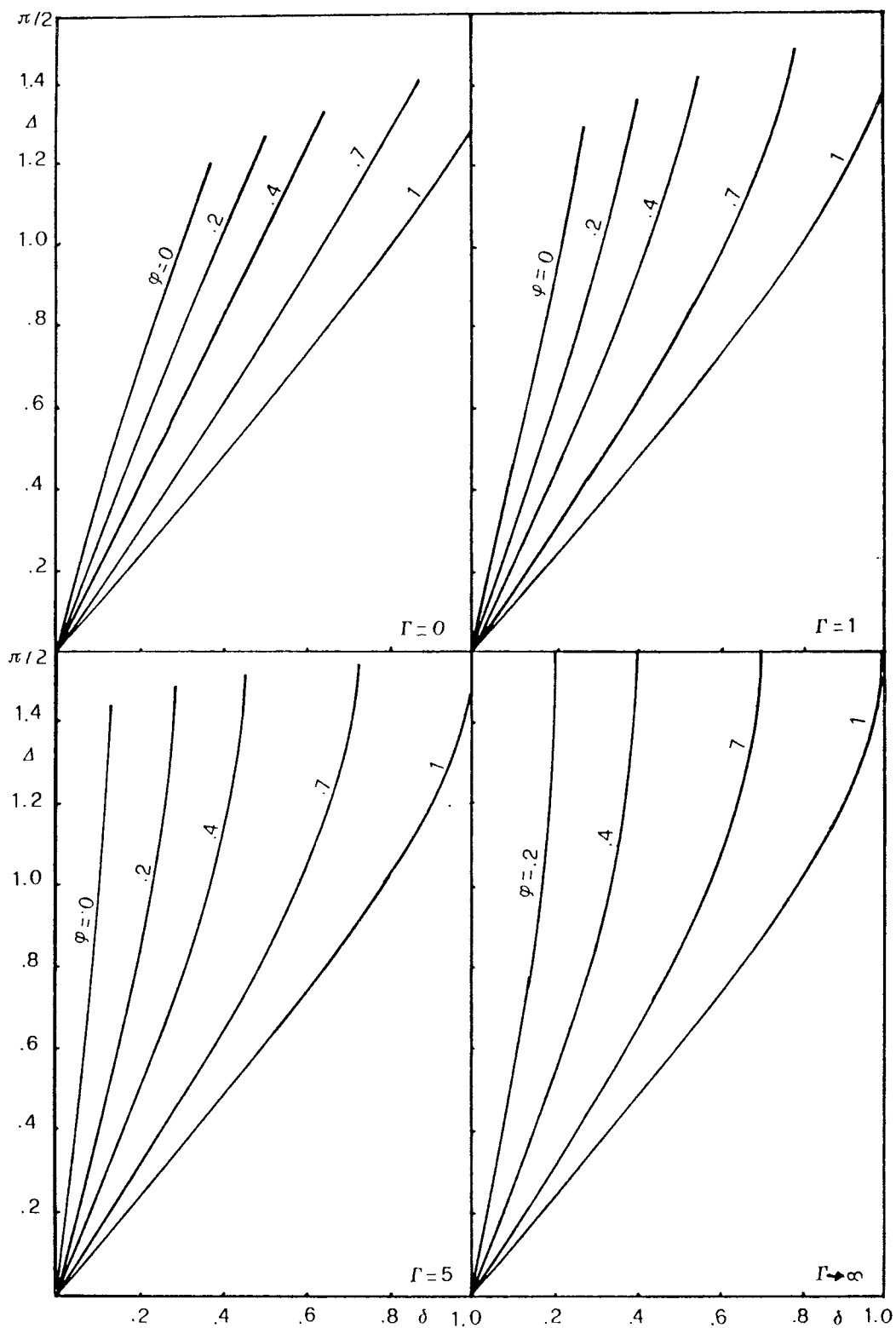


Fig. 13. - Angolo di Caquot Δ (Δ , φ e δ in radianti).

che d'altra parte è il limite della (29) per $\varphi \rightarrow 0$, come si può vedere applicando la regola di L'Hospital. Sembrerebbe tuttavia più logico (vedi anche BRINCH HANSEN [1970]), data la natura additiva della (44), utilizzare l'espres-

sione simbolica additiva $q_y = c(N_c^o + i_c^{oa})$; in tal caso si avrebbe:

$$i_c^{oa} = \cos(\Delta + \delta) - (\Delta + \delta) - 1 \quad (47)$$

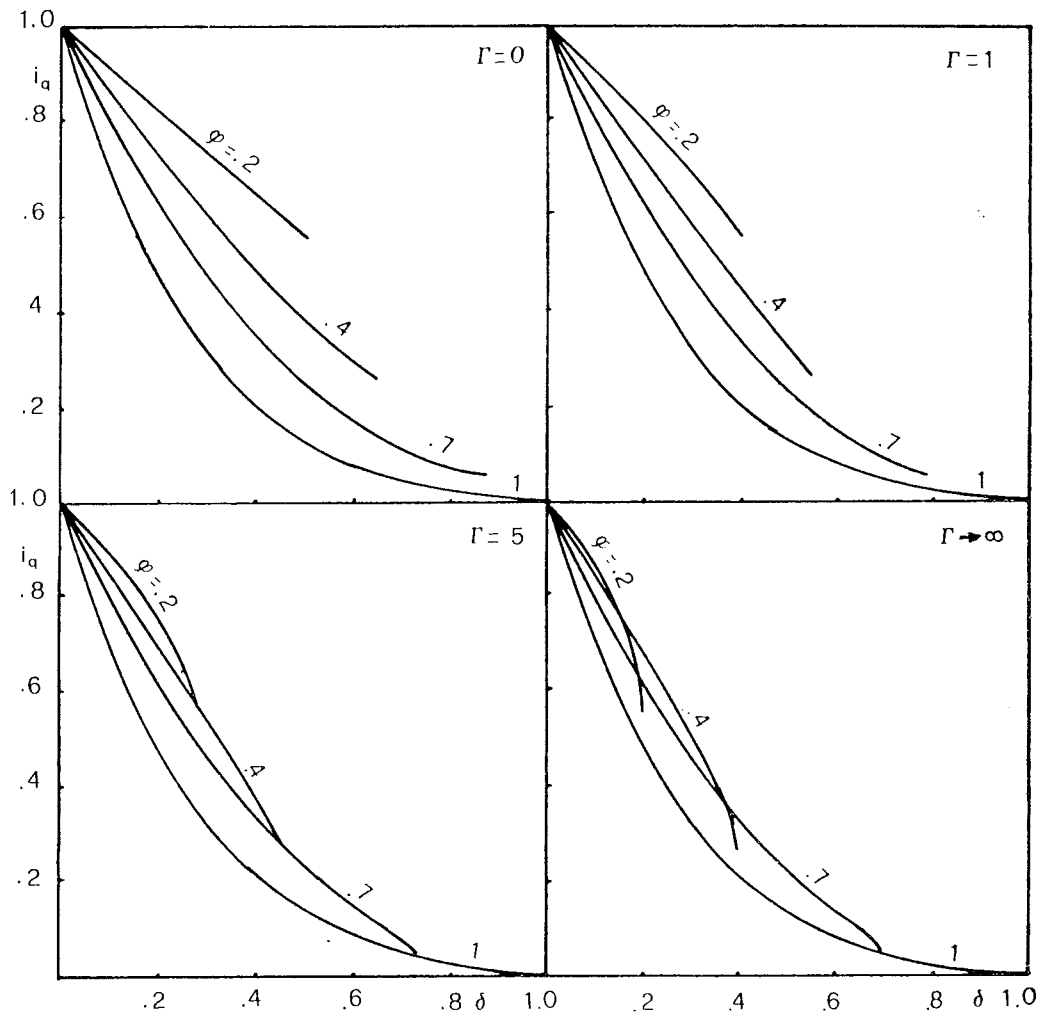


Fig. 14. - Coefficiente i_q (φ e δ in radianti).

3.2.2. Caso $\gamma D \neq 0$

Nel caso $\gamma D \neq 0$ le equazioni (42) e (43) valgono ancora, ma con $p_{co} = \gamma D + c$ (vedi fig. 18). Rispetto agli angoli δ e Δ mostrati in fig. 18 ϑ_M è ancora dato dalla (20), e quindi scrivendo il carico limite nella forma simbolica:

$$q_y = N_c^{\circ} i_c^{\circ} c + N_q^{\circ} i_q^{\circ} \gamma D \quad (48)$$

risulta $i_q^{\circ} = N_q^{\circ} = 1$ ed i_c° dato ancora dalla (46); ma anche in questo caso la coincidenza è solo formale.

3.2.3. Espressione generalizzata dell'angolo Δ di Caquot ($\varphi = 0$)

Applicando ancora il teorema dei seni al triangolo OMY di fig. 18 si ottiene:

$$\frac{\sin \Delta}{\sin \delta} = \frac{p_{MO}}{c} \quad (49)$$

che sostituendo l'espressione di p_{MO} :

$$p_{MO} = \gamma D + c(1 + \pi - \Delta - \delta) \quad (50)$$

dà la relazione cercata:

$$\frac{\sin \Delta}{\sin \delta} = \Gamma + 1 + \pi - (\Delta + \delta) \quad (51)$$

che si sarebbe potuta ottenere anche come limite della (36) per $\varphi \rightarrow 0$ (regola di L'Hospital). Come si vede Δ è in genere funzione di δ e Γ , mentre nel caso $\gamma D = 0$ dipende solo da δ .

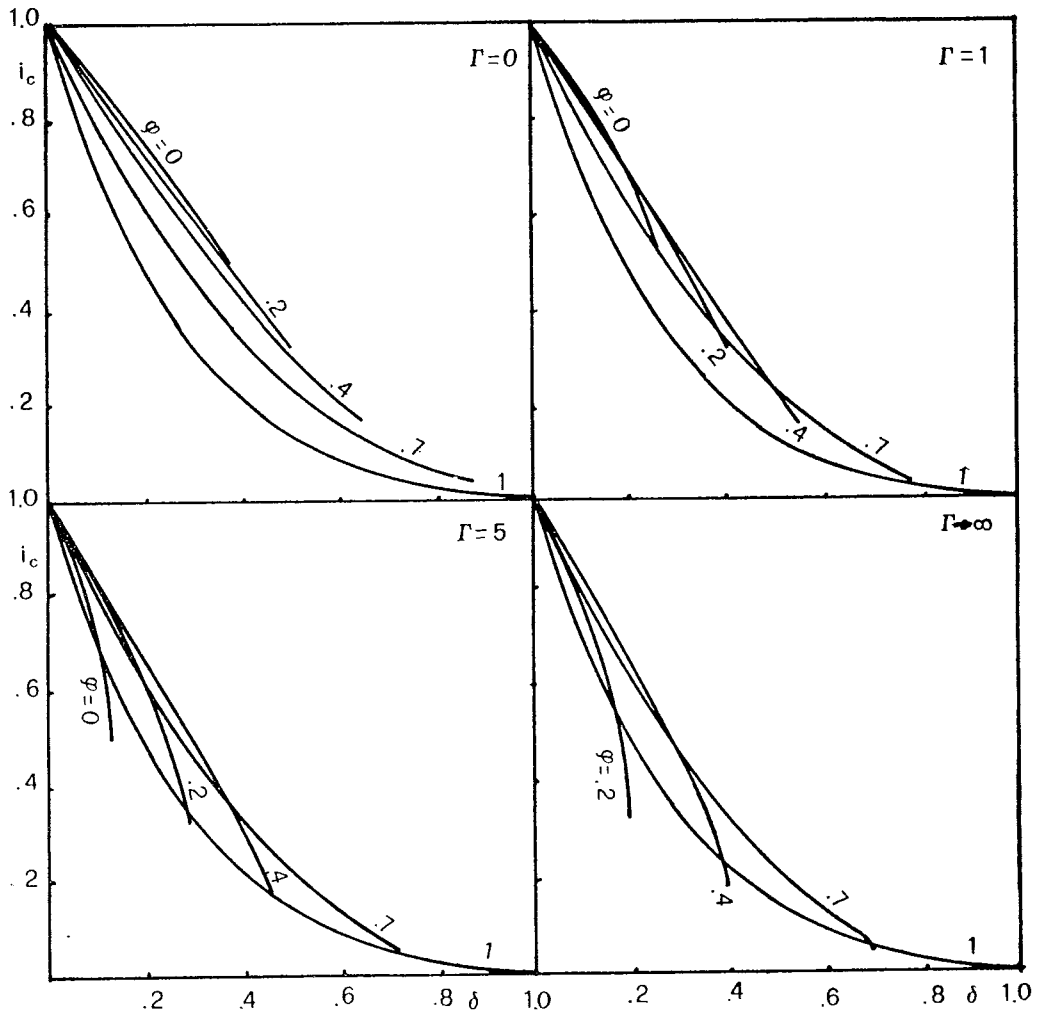


Fig. 15. - Coefficiente i_c (ϕ e δ in radianti).

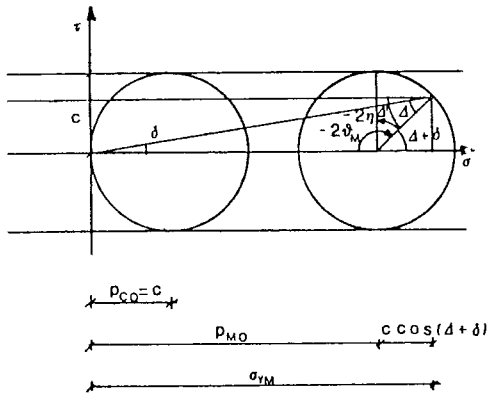


Fig. 16. - Cerchi di Mohr nella zona di Cauchy e nella zona mista per $y = 0$ ($\phi = 0$, $c \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\gamma D = 0$).

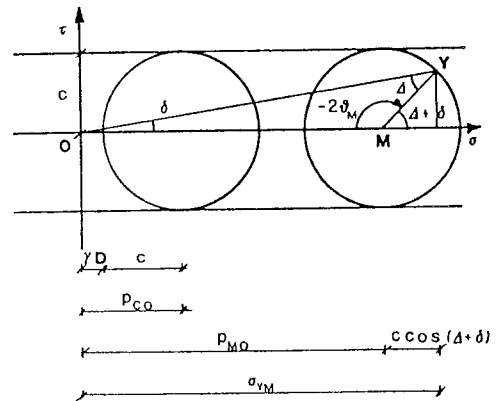


Fig. 18. - Cerchi di Mohr nella zona di Cauchy e nella zona mista per $y = 0$ ($\phi = 0$, $c \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\gamma D \neq 0$).

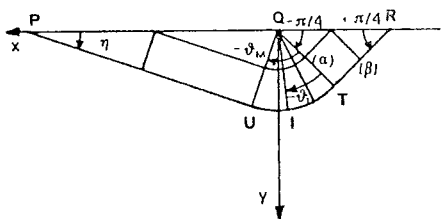


Fig. 17. - Reticolo di curve caratteristiche ($\phi = 0$).

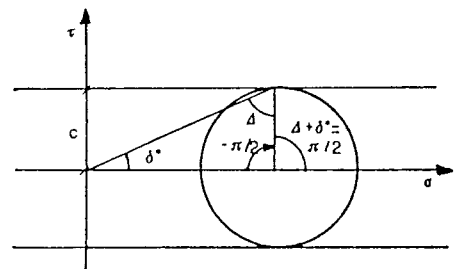


Fig. 19. - Cerchio di Mohr per l'inclinazione limite δ^* ($\phi = 0$).

3.2.4. Inclinazione limite δ^* ($\varphi = 0$)

L'inclinazione limite δ^* è attinta quando $\Delta + \delta^* = \pi/2$ (vedi fig. 19); in questo caso la (51), oppure direttamente la fig. 19 dà:

$$\cot\delta^* = \Gamma + 1 + \pi/2 \quad (52)$$

che è anche il limite della (39) per $\varphi \rightarrow 0$; il coefficiente i_c^{*0} assume il valore di $1/2$. I valori della (52) sono dati in tab. I e in fig. 11, mentre Δ e i_c^0 sono diagrammati nelle figg. 13 e 15.

4. Confronto col metodo di sovrapposizione

Come si vede dalle (36) e (51), i_c è funzione anche di $\gamma D(\Gamma)$ ed i_q di $c(\Gamma)$; ciò significa che nel caso del carico limite inclinato gli effetti di c e di γD non sono separabili, ovvero che essi non possono essere sovrapposti semplicemente. Seguendo allora LUNDGREN e MORTENSEN

$$\Gamma^* = \frac{1 - \sin\varphi}{(\cot\varphi - \cot\delta) \sin^2\varphi \exp[(\pi/2 - \varphi) \tan\varphi]} - \cot\varphi \quad (55)$$

il carico limite risulta definito solo per $\Gamma \leq \Gamma^*$, e quindi non esiste (come del resto è evidente) una condizione in cui è presente solo il termine $\gamma D(\Gamma \rightarrow \infty)$, ed a stretto rigore mancano le basi per costruire una formula di sovrapposi-

$$q_{ysup} = c \left\{ N_c \left[i_c(0) \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma^*} \right) + i_c(\Gamma^*) \frac{\Gamma}{\Gamma^*} \right] + N_q i_q(\Gamma^*) \Gamma \right\} \quad (57)$$

che rispetta tanto la (56) che la condizione $\Gamma = 0$.

Il coefficiente μ definito mediante le (53), (54) e (57) è diagrammato in fig. 20 in funzione di Γ , φ e δ . Come si vede $\mu = 1$ praticamente sempre per $\delta < \varphi$; quando $\delta \rightarrow \varphi$ μ cresce rapidamente fino a raggiungere un max per $\delta = \varphi$ (tranne nel caso $\varphi = 0$), mentre per $\delta > \varphi$ μ_{max} è ancora maggiore di uno ma decrescente con δ , e tendente ad 1 per $\delta \rightarrow \delta^*$ (cioè $\Gamma^* \rightarrow 0$), con tutte le curve praticamente contenute da quella $\delta = \varphi$ (per $\varphi > .1$). Tuttavia questo andamento di μ_{max} quando $\delta > \varphi$ è

[1953] e SALENÇON *et al.* [1976], introduciamo il coefficiente μ :

$$\mu = \frac{N_c i_c(\Gamma) + N_q i_q(\Gamma) \Gamma}{q_{ysup}/c} \quad (53)$$

e cioè il rapporto tra l'effettivo carico limite e quello ottenuto col metodo di sovrapposizione q_{ysup} (nella (53) e nelle formule seguenti è evidenziata la sola dipendenza di i_c ed i_q da Γ ; si ricordi tuttavia che essi dipendono anche da φ e da δ).

Nel caso $\delta \leq \varphi$ possiamo definire:

$$q_{ysup} = c [N_c i_c(0) + N_q i_q(\infty) \Gamma] \quad (54)$$

Infatti quando $\Gamma = 0$ ($\gamma D = 0$), $q_{ysup} = N_c i_c(0)c$, mentre per $\Gamma \rightarrow \infty$ ($c \rightarrow 0$), $q_{ysup} = N_q i_q(\infty) \gamma D$; evidentemente μ assume il valore 1 per $\Gamma = 0$ e $\Gamma \rightarrow \infty$.

Nel caso $\delta > \varphi$ la definizione di q_{ysup} si presenta molto più difficile; infatti, detto Γ^* il valore di Γ per il quale l'inclinazione δ diventa quella limite δ^* , dato (vedi eq. (39)) dalla:

zione. Tuttavia se si considera che per $\Gamma = \Gamma^*$ risulta:

$$q_y(\Gamma^*) = c [N_c i_c(\Gamma^*) + N_q i_q(\Gamma^*) \Gamma^*] \quad (56)$$

si può ancora definire q_{ysup} per mezzo della:

in un certo senso forzato dalla definizione (57) di q_{ysup} , e dal fatto che la lunghezza del campo di Γ si riduce sempre più al crescere di δ .

5. Sul valore della soluzione ottenuta mediante le caratteristiche

Con la formulazione, all'inizio degli anni cinquanta, dei teoremi dell'analisi limite ad opera di DRUCKER *et al.* [1951a; 1951b] ed indipendentemente di HILL [1951], il metodo delle caratteristiche è stato riesaminato alla luce della

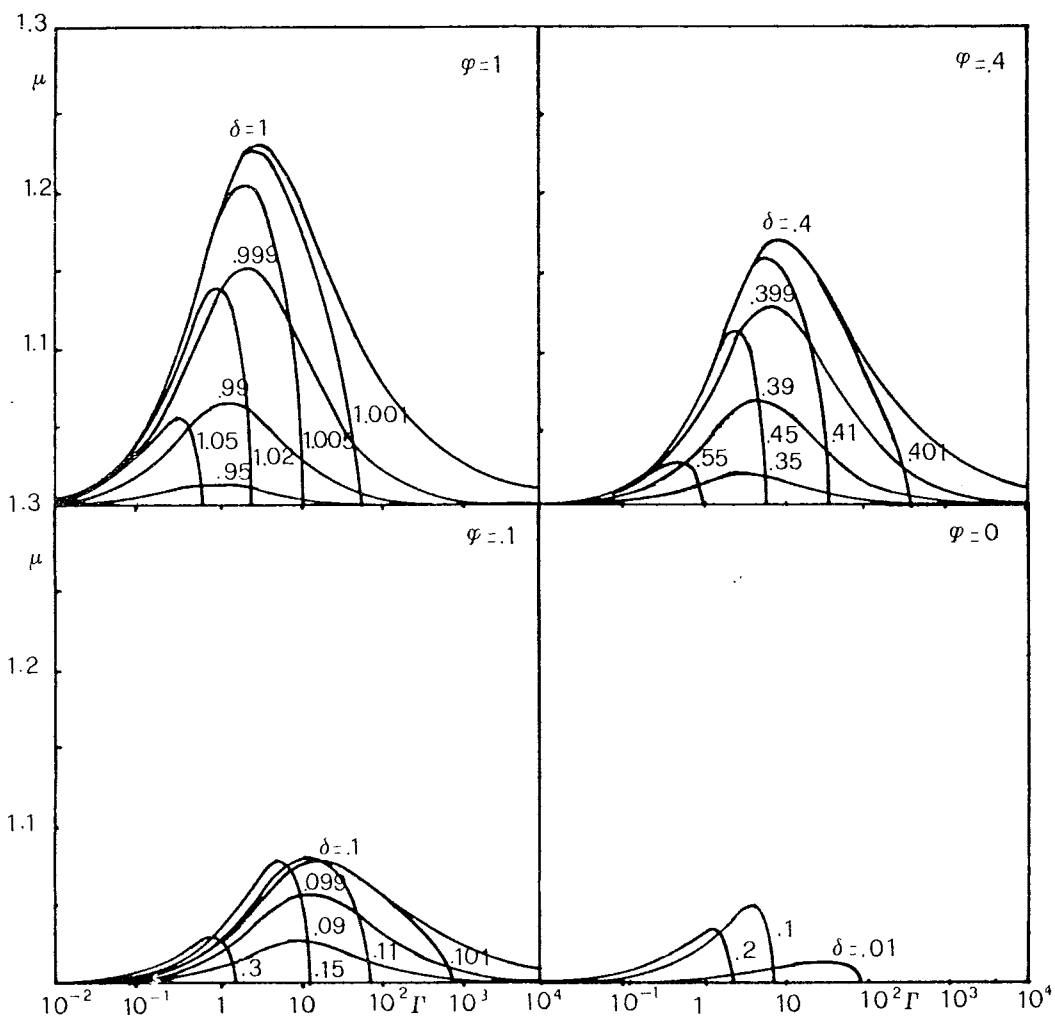


Fig. 20. - Coefficiente μ (δ e φ in radianti).

nuova teoria. Così tanto DRUCKER *et al* [1951a] che HILL [1951] hanno osservato che una soluzione ottenuta col metodo delle caratteristiche non soddisfa a priori ai requisiti né del teorema statico, né di quello cinematico; tuttavia se si riesce ad associare al campo tensionale ottenuto un meccanismo cinematicamente ammissibile, e ad estendere il campo tensionale nel dominio rigido in maniera staticamente ammissibile, i due teoremi risultano entrambi verificati, e la soluzione trovata è quella giusta e viene detta completa. Fra i due problemi il più complesso è quello dell'estensione statica: BISHOP [1953] e SHIELD [1954] hanno proposto due metodi per risolverlo, ed in tal modo è stato mostrato che le principali soluzioni ottenute col metodo delle caratteristiche sono completabili nel senso anzidetto, e dunque sono le corrette soluzioni dei rispettivi problemi.

Questo punto di vista, certamente corretto, ha tuttavia portato qualche Autore, a parere di chi scrive, ad oscurare in parte l'intrinseco

valore di una soluzione ottenuta applicando correttamente il metodo delle caratteristiche. Tale valore discende dall'appartenenza del metodo alla Fisica Matematica, e quindi dai teoremi di corretta posizione dei fondamentali problemi di valori iniziali ivi dimostrati.

In particolare si vuole qui fare osservare esplicitamente come il problema del carico limite di una fondazione superficiale nastriforme su uno dei mezzi considerati in questa nota, che potremmo sinteticamente chiamare problema di Prandtl, sia la successione dei tre problemi fondamentali delle equazioni iperboliche, per i quali esistono teoremi di corretta posizione nel senso di Hadamard, e pertanto sia esso stesso ben posto, che cioè la sua soluzione esiste, è *unica* e dipende con continuità dai dati iniziali. Infatti il problema complessivo è costituito (vedi fig. 21) da un problema di Cauchy, con dati iniziali lungo la curva non caratteristica AB; da un problema di Riemann degenerato, con dati iniziali lungo la caratteristica AC e la ca-

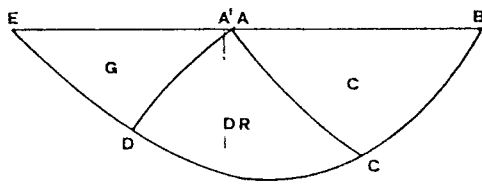


Fig. 21. - Regioni di Cauchy, di Riemann e di Goursat.

ratteristica (degenerata) AA' ; e da un problema di Goursat, con dati iniziali lungo la caratteristica $A'D$ e lungo la curva con caratteristica EA' . Per ciascuno di tali problemi è stato dimostrato, nella Fisica Matematica (vedi GARABEDIAN [1964]), un teorema di corretta posizione sotto certe condizioni di regolarità dei dati iniziali; e poiché la regolarità dei dati iniziali del problema di Cauchy è verificata dalle condizioni solitamente assegnate al di fuori della fondazione, e la regolarità delle successive condizioni iniziali discende dalla regolarità delle condizioni iniziali del problema di Cauchy, così resta dimostrato che anche il complessivo problema (di Prandtl) è ben posto.

Da notare che le considerazioni fatte in questa nota riguardano solo le tensioni, e che quindi anche l'unicità è relativa alle sole tensioni (nella zona plastica); d'altra parte la possibi-

lità di risolvere il problema per le sole tensioni esprime appunto il carattere di determinatezza statica del problema, come evidenziato da HENCKY [1923] e precisato da HILL [1950].

È opportuno a questo punto rilevare che per il problema del carico limite verticale di una fondazione nastriforme liscia su un mezzo $\varphi \neq 0$, $c \neq 0$, $\gamma = 0$ oppure $\varphi = 0$, $c \neq 0$, $\gamma \neq 0$, e nel contesto del metodo delle caratteristiche, sono state proposte tre soluzioni diverse, cioè che sembrerebbe violare il teorema precedente. Tali soluzioni, e cioè quella classica di Prandtl con un solo cuneo attivo, quella di Hill con due cunei attivi, e quella intermedia di Prager e Hodge, sono mostrate in fig. 22; da tale figura risulta allora chiaro che esse non sono diverse soluzioni di uno stesso problema, ma soluzioni (diverse solo in estensione) di *tre diversi* problemi iniziali. Precisamente, quella di Hill, del problema con linea iniziale AB ; quella di Prandtl, se la linea iniziale è AB'' ; quello di Prager e Hodge, per una qualsiasi posizione intermedia AB' della linea iniziale. È infine da notare che la regione comune ai tre problemi (cioè il dominio di Hill) è comunque nello stesso stato tensionale, e che anche il carico limite è lo stesso.

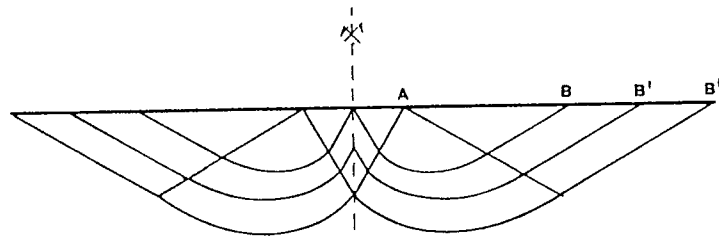


Fig. 22. - Soluzioni di Prandtl, di Hill e di Prager-Hodge (carico verticale).

TABELLA III
COEFFICIENTE D'INCLINAZIONE i_c PER $\Gamma = 0$ (φ e δ IN GRADI)

$\delta \backslash \varphi$	0	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
5°	.90	.88	.87	.86	.85	.84	.82	.80
10°	.79	.76	.74	.73	.71	.69	.66	.63
15°	.66	.63	.62	.60	.58	.55	.52	.49
20°	.53	.51	.50	.48	.46	.43	.40	.37
25°	—	.40	.39	.37	.35	.33	.30	.27
30°	—	.29	.29	.28	.26	.24	.22	.19
35°	—	—	—	.19	.18	.17	.15	.13
40°	—	—	—	—	.12	.11	.10	.09
45°	—	—	—	—	—	.07	.07	.06
50°	—	—	—	—	—	—	—	.03

6. Conclusioni

Si sono determinate in forma chiusa, utilizzando rigorosamente il metodo delle caratteristiche, le espressioni dei coefficienti d'inclinazione i_q , i_c , i_q^0 , i_c^0 ; si è verificata l'applicabilità della formula di sovrapposizione, e si è mostrato che il problema del carico limite della fondazione nastriforme è ben posto nel senso di Hadamard.

L'analisi svolta ha mostrato che per $\delta < \varphi$ la formula di sovrapposizione costituisce un'ottima approssimazione, dando luogo comunque, anche per $\delta \cong \varphi$, a risultati a vantaggio di sicurezza. Se ne consiglia dunque l'uso, data la sua maggiore semplicità, nella pratica tecnica; a tal fine viene fornito in tab. III il coefficiente $i_c(0)$.

APPENDICE 1

In Meccanica delle Terre è d'uso considerare le componenti normali di tensione positive se di compressione, e quindi di invertire anche la convenzione sulle componenti tangenziali, rispetto alla Meccanica del Continuo, considerando tutte le componenti di tensione positive quando agiscono nel senso negativo degli assi coordinati sugli elementi piani aventi normale uscente positiva. Al fine di evitare ogni diffe-

renza formale tra le equazioni della M.d.T. e quelle della M.d.C., si propone di considerare come normale sull'elemento piano quella entrante anziché quella uscente, conservando poi la normale definizione di componenti di tensione positive se concordi agli assi sulle facce di normale positiva (vedi fig. A1). Con questa con-

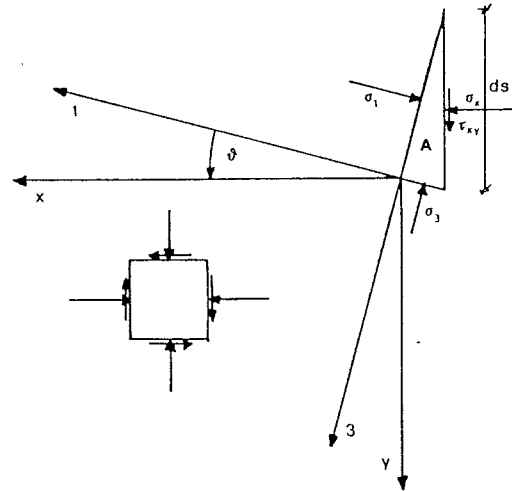


Fig. A1. - Convenzione dei segni per le tensioni.

venzione dei segni scriviamo le equazioni di equilibrio rispetto agli assi x ed y per l'elemento piano A di fig. A1, avente due lati paralleli alle direzioni principali 1 e 3, ed il terzo con normale entrante x:

$$-\sigma_1 ds \cos\vartheta \cos\vartheta - \sigma_3 ds \sin\vartheta \sin\vartheta + \sigma_x ds = 0 \quad (1a')$$

$$\sigma_1 ds \cos\vartheta \sin\vartheta - \sigma_3 ds \sin\vartheta \cos\vartheta + \tau_{xy} ds = 0 \quad (1b')$$

Dopo alcune manipolazioni trigonometriche le (1') danno le espressioni di Mohr nella forma usuale:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\vartheta \quad (2a')$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin(-2\vartheta) \quad (2b')$$

le componenti tangenziali deve essere riferita all'esterno dell'elemento; in tal modo τ risulta positiva se antioraria (ovvero se oraria rispetto all'interno).

Ruotando il sistema x, y di $\pi/2$ in senso antiorario si ottiene il sistema y, -x e quindi le:

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\vartheta \quad (3a')$$

$$\tau_{y-x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\vartheta \quad (3b')$$

Al fine di completare l'inversione nella convenzione dei segni, la convenzione di Mohr per

Il sistema (4) è quasi-lineare, cioè lineare nelle derivate di ordine max, in questo caso lineare nelle derivate. In Fisica Matematica è di grande interesse, per i sistemi di questo tipo, considerare le curve lungo cui le derivate delle funzioni incognite non sono univocamente definite dai valori delle funzioni lungo le curve, e cioè per cui il problema di Cauchy può avere più soluzioni [COURANT e HILBERT, 1962]. Questa condizione è equivalente a quella che il sistema delle quattro equazioni nelle incognite derivate (4) e (1''):

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad (1a'')$$

$$d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} dy \quad (1b'')$$

$$(a_1c_2 - a_2c_1) dy^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1) dx dy + (b_1d_2 - b_2d_1) dx^2 = 0 \quad (3'')$$

le cui radici danno le equazioni delle curve cercate, chiamate caratteristiche. Dopo alcune manipolazioni algebriche e trigonometriche dalle (3'') si ottengono le:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(-\vartheta \mp \varepsilon) \quad (4'')$$

dove $\varepsilon = \pi/4 - \varphi/2$. Come si vede le radici sono reali e distinte, e quindi il sistema (4) è iperbolico (vedi COURANT e HILBERT [1962]).

BIBLIOGRAFIA

BISHOP J. F. W. (1953) - *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*. J. Mech. Phys. Solids, 2, 43-53.
 BOOKER J. R., DAVIS E. H. (1972) - *A general treatment of plastic anisotropy under conditions of plane strain*. J. Mech. Phys. Solids, 20, 239-250.
 BRINCH HANSEN J. (1970) - *A revised and extended formula for bearing capacity*. Danish Geot. Inst. Bull., 28.
 CAQUOT A. (1934) - *Équilibre des massifs a frottement interne*. Gauthier-Villars.
 COURANT R., HILBERT D. (1962) - *Methods of Mathematical Physics*, vol. II, Interscience.
 DRUCKER D. C., GREENBERG H. J., LEE E. H., PRAGER W. (1951 a) - *On plastic-rigid solutions and limit design theorems for elastic-plastic bodies*. Proc. 1st U.S. Nat. Cong. App. Mech., 533-538.
 DRUCKER D. C., PRAGER W., GREENBERG H. J. (1951b) - *Extended limit design theorems for continuous media*. Quart. Appl. Math., IX, 381-389.

non ha un'unica soluzione. Scrivendo tale sistema nella forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_x & d_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_x & d_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma \\ dp \\ d\vartheta \end{Bmatrix} \quad (2'')$$

dove $a_1, b_1, \dots, c_2, d_2$ sono i coefficienti delle derivate nelle (4), possiamo esprimere la condizione in parola mediante quella di annullamento del determinante del sistema (2''), e cioè mediante l'equazione caratteristica:

GARABEDIAN P. R. (1964) - *Partial differential equations*. Wiley
 HENCKY H. (1923) - *Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern*. Zeits. Ang. Math. Mech., 3, 241-251.
 HILL R. (1948) - *A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity*. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, 18-28.
 HILL R. (1950) - *The mathematical theory of plasticity*, Oxford Univ. Press.
 HILL R. (1951) - *On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point*. Phil. Mag., 42, 868-875.
 KEZDI A. (1961) - *The effect of inclined loads on the stability of a foundation*. Proc. 5th ICSMFE vol. I, 699-703.
 LUNDGREN H., MORTENSEN K. (1953) - *Determination by the theory of plasticity of the bearing capacity of continuous footings on sand*. Proc. 3rd ICSMFE vol. I, 409-412.
 PRANDTL L. (1920) - *Über die Härte plastischer Körper*. Nachr. Ges. Wiss. Gött. math. phys. Kl., 74-85.
 SALENÇON J. (1977) - *Applications of the theory of plasticity in soil mechanics*, Wiley.
 SALENÇON J., FLORENTIN P., GABRIEL Y. (1976) - *Capacité portante globale d'une fondation sur un sol non homogène*. Géotechnique, 26, 351-370.
 SHIELD R. T. (1954) - *Plastic potential theory and Prandtl bearing capacity solution*. J. Appl. Mech., 21, 193-194.
 SOKOLOVSKII V. V. (1965) - *Statics of granular media*. Pergamon Press.

SUMMARY

Inclined bearing capacity of shallow foundations by means of characteristics

The plastic equilibrium problem of a Mohr-Coulomb medium in plane strain is statically determined. Furthermore, as the two characteristic curves (5) of the governing

equations (4) are real and distinct, the problem is of the hyperbolic type, and can be studied by means of the method of characteristics.

The problem of the bearing capacity of shallow foundations can be solved in closed form (by means of characteristics) for several boundary conditions, if the medium is a weightless Coulomb material ($\varphi \neq 0$, $c \neq 0$, $\gamma = 0$) or a weighting Tresca one ($\varphi = 0$, $c \neq 0$, $\gamma \neq 0$). In the present paper such a closed form solution is obtained for both media, in the case of inclined load, using Riemann invariants [(9) for the $\varphi \neq 0$, $c \neq 0$, $\gamma = 0$ medium, and (15) for the $\varphi = 0$, $c \neq 0$, $\gamma \neq 0$ one], and Hencky's first theorem (10) with its corollary.

The inclination factors i_q and i_c are first determined for the Coulomb medium; their expressions (24) and (29) are given in function of the Caquot Δ angle, and the generalized expression (36) for this angle is determined. The limit inclination δ^* is also obtained [eq. (39)], and its numerical values are given in tab. I and in fig. 11. Finally, equations (36), (24) and (29) are plotted in fig. 13, 14 and 15.

The same problem is subsequently solved for the Tresca medium, and the coefficient i_c is obtained [eq. (46)], together with the expression (51) for Δ (in the case $\varphi = 0$) and the limit inclination δ^* [eq. (52)]; eqs. (51) and (46) are plotted in fig. 13 and 15.

As the effects of c and γD are not separable for the case of inclined loading, a comparison has been made between the correct ultimate load and the one obtained by means of superposition, introducing the coefficient μ (53) (see LUNDGREN e MORTENSEN [1953]). It is then shown (see fig. 20) that superposition yields a very good approximation whenever $\delta < \varphi$, and even for $\delta \geq \varphi$ such an approximation is on the safe side. The simpler superposition formula can be thus used confidentially in design; for this purpose the relative coefficient i_c is given in tab. III.

Finally, the value of the obtained solution is considered from a Mathematical-Physical viewpoint, showing that the Prandtl (i.e. ultimate load) problem is well posed in the Hadamard sense, and hence the stress field obtained is unique.