

# Il metodo dei coefficienti di influenza per l'analisi di alcuni problemi di interazione tra il terreno e le strutture

A. BURGHIGNOLI \*

**SOMMARIO:** Nella pratica applicativa, i problemi di interazione terreno-struttura vengono spesso analizzati facendo uso, e talvolta abuso, del semplice modello di Winkler. L'impiego di tale modello è in alcuni casi solo giustificato dalla facilità del suo adattamento a quei metodi risolutivi che prevedano l'esistenza di vincoli cedevoli.

Con il proposito di offrire al progettista uno strumento operativo concettualmente più soddisfacente e più adatto a descrivere il reale comportamento del terreno, pur rimanendo nell'ambito di un semplice modello elastico lineare, in questa nota viene illustrato il metodo dei coefficienti di influenza e se ne mostra l'impiego per l'analisi di fondazioni dirette e profonde.

## 1. Introduzione

I problemi di interazione terreno-struttura si collocano, per così dire, in una posizione intermedia tra la cultura e le competenze tecniche dell'ingegneria strutturale e quelle dell'ingegneria geotecnica e, come per tutti i problemi di « interfaccia », le maggiori difficoltà nascono nel tentativo di contemperare le esigenze, i metodi di analisi e il linguaggio propri dell'una e dell'altra disciplina.

Tenuto conto che la variazione delle sollecitazioni nelle strutture per effetto dell'interazione ha in genere maggiore rilievo pratico rispetto al mutato regime delle deformazioni nel terreno, non c'è dubbio che tale problema assume particolare interesse se osservato dal lato del progettista strutturale.

Con il progredire delle tecniche numeriche e con l'ampia diffusione dei mezzi di calcolo automatico, nella progettazione delle strutture si è sviluppato l'impiego di metodi di calcolo, quale ad esempio quello degli elementi finiti, sempre più elaborati e raffinati. Purtroppo, però, i diversi programmi di calcolo delle strutture attualmente disponibili e di uso comune, in genere non si adattano immediatamente a rappresentare con sufficiente approssimazione il reale comportamento del terreno, così che i risultati ai quali si perviene sono spesso affetti da notevoli incertezze.

Una delle ipotesi tradizionalmente adottate nella progettazione strutturale per descrivere

la deformabilità del terreno di fondazione è quella introdotta da Winkler (1867) per cui, come è noto, si assimila il terreno stesso ad un insieme di infinite molle indipendenti. Sotto questa ipotesi il terreno non è in grado di trasmettere gli sforzi di taglio ed assume il comportamento di un liquido avente peso specifico pari al coefficiente di sottofondo  $K$  che, in tale modello, esprime la rigidità delle molle. Il vantaggio pratico nell'impiego del modello di Winkler risiede nella relativa semplicità dell'analisi e nella possibilità di utilizzare direttamente quei programmi di calcolo delle strutture che prevedono la presenza di vincoli cedevoli. Per contro, l'inadeguatezza del modello e i suoi limiti di approssimazione emergono immediatamente se si vuole descrivere anche il semplice comportamento di strutture di fondazione uniformemente caricate; inoltre, la scelta dei valori da attribuire al coefficiente di sottofondo è sempre largamente arbitraria. Ciò nonostante e per i motivi anzidetti, il modello di Winkler è ancora diffusamente impiegato nella progettazione delle strutture a contatto con il terreno.

Dall'insieme di queste osservazioni muove l'esigenza di equilibrare, soprattutto nell'ambito progettuale, l'analisi delle strutture e quella del terreno, sia individuando un modello che più correttamente possa descrivere il comportamento di quest'ultimo, sia ricercando una metodologia che consenta un passaggio razionale e congruente tra le « informazioni » di carattere strutturale e quelle più strettamente geotecniche.

Per quanto riguarda la deformabilità dei terreni, un orientamento recente è quello di riferirsi ad un modello di semispazio elastico iso-

\* Prof. Ing. Alberto BURGHIGNOLI, Associato di Meccanica delle Terre, Facoltà di Ingegneria, Roma.

tropo ma non omogeneo, il cui modulo cresce linearmente con la profondità [GIBSON, 1967, 1974; AWOJOBI, 1975; BENERJEE e DAVIES, 1978; POULOS, 1979]. A tale modello viene comunemente dato il nome di « suolo alla Gibson », per analogia al « suolo alla Boussinesq » con cui si intende un semispazio elastico, omogeneo e isotropo. Il vantaggio concettuale nell'impiego del « suolo alla Gibson » risiede fondamentalmente nella constatazione che la continuità del mezzo e la relazione lineare tra modulo di Young e profondità corrispondono al reale comportamento sia dei terreni coesivi che di quelli granulari, e sono congruenti con i più razionali modelli di comportamento meccanico dei terreni — Cam-Clay, ad esempio — attualmente disponibili [CALABRESI, 1978].

Un'analisi più semplificata, pur con una pratica coincidenza dei risultati, può ottenersi rimuovendo l'ipotesi di disomogeneità del terreno, ma riferendosi ad uno strato di spessore finito e limitato inferiormente da un basamento rigido [KÖNIG e SHERIF, 1975]. In questo caso, però, il modello perde generalmente l'analogia con il terreno reale e viene a mancare un criterio razionale per la scelta del modulo e dello spessore dello strato. È preferibile pertanto riferirsi al modello di Gibson, ricercando eventualmente delle procedure approssimate, ma sufficientemente precise, per superare le difficoltà matematiche connesse con l'analisi di un mezzo disomogeneo.

Per quanto riguarda gli aspetti metodologici, è opportuno e conveniente individuare degli approcci semplici e generali, da cui possano derivare le diverse soluzioni particolari. Tra questi, sembrano molto interessanti e promettenti i metodi cosiddetti misti, basati sull'impiego contemporaneo degli elementi finiti per discretizzare la struttura e di soluzioni ricavate analiticamente o numericamente per descrivere il comportamento del terreno.

All'illustrazione di questi metodi, in particolare quello dei coefficienti di influenza, viene dedicata la presente nota, limitando comunque l'interesse, per chiarezza di esposizione e semplicità di trattazione, all'esame dell'interazione tra il terreno e le strutture di fondazione, senza portare in conto l'influenza, pur ragguardevole, sia della sovrastruttura che della evoluzione delle fasi costruttive. Tali fattori, comunque, così come lo svilupparsi di deformazioni differite nel tempo nelle strutture e nel terreno, possono essere introdotti nell'analisi senza particolari difficoltà concettuali.

## 2. Impostazione del problema dell'interazione

In generale, una costruzione può essere considerata come l'insieme di tre elementi — la sovrastruttura, la struttura di fondazione e il terreno — meccanicamente connessi tra loro e in grado di scambiarsi delle sollecitazioni nel rispetto delle condizioni di bilancio dinamico e di compatibilità. Tenuto conto della complessità geometrica della maggior parte dei problemi reali, una valutazione quantitativa del comportamento dei vari elementi richiede in genere un approccio numerico e, quindi, la necessità di una discretizzazione del continuo. In queste condizioni, e sotto l'ipotesi già discussa di comportamento elastico lineare delle diverse strutture, possono essere scritte le seguenti equazioni:

$$[K_s] \{\delta_s\} = \{Q\} + \{R_{sf}\} \quad (1)$$

$$[K_f] \{\delta_f\} = \{R_{fs}\} + \{R_{ft}\} \quad (2)$$

$$[K_t] \{\delta_t\} = \{R_{tf}\} \quad (3)$$

dove  $[K_s]$ ,  $[K_f]$  e  $[K_t]$  sono rispettivamente le matrici di rigidezza della sovrastruttura, della struttura di fondazione e del terreno, dove  $\{Q\}$  rappresenta il vettore delle sollecitazioni esterne ed  $\{R_{sf}\}$ ,  $\{R_{fs}\}$ ,  $\{R_{ft}\}$  e  $\{R_{tf}\}$  i vettori delle sollecitazioni di interazione tra le diverse strutture (fig. 1). Inoltre, i vettori  $\{\delta_s\}$ ,  $\{\delta_f\}$  e  $\{\delta_t\}$  contengono gli spostamenti generalizzati delle strutture.

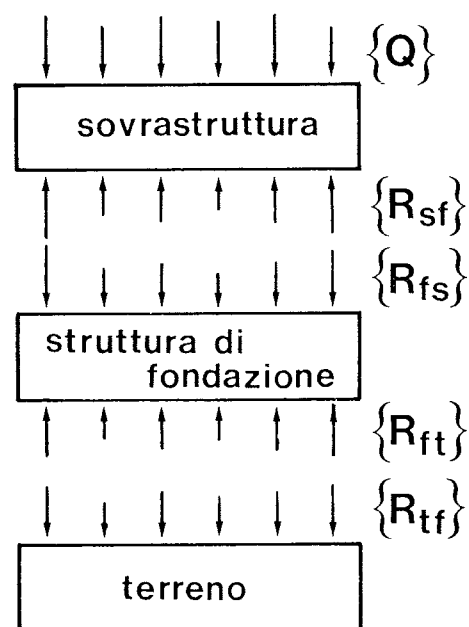


Fig. 1. - Schema del problema dell'interazione.

Le condizioni di bilancio dinamico e quelle di compatibilità conducono alle equazioni:

$$\{R_{sf}\} + \{R_{fs}\} = 0 \quad (4)$$

$$\{R_{ft}\} + \{R_{tf}\} = 0 \quad (5)$$

$$\{\delta_s\} - \{\delta_f\} = 0 \quad (6)$$

$$\{\delta_f\} - \{\delta_t\} = 0 \quad (7)$$

Combinando le (4), (5), (6) e (7) con le (1), (2) e (3) e ponendo

$$\{\delta\} = \{\delta_s\} = \{\delta_f\} = \{\delta_t\}$$

si ottiene l'equazione:

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{Q\} \quad (8)$$

con  $[K] = [K_s] + [K_f] + [K_t]$ , che permette di determinare il vettore degli spostamenti incogniti. Sostituendo infine la (8) nelle (1), (2) e (3) si ottengono le sollecitazioni agenti sulle diverse strutture.

Seguendo gli obbiettivi proposti nella introduzione della presente nota, l'attenzione sarà rivolta, nel seguito, alla modellazione numerica del comportamento meccanico del terreno e alla interazione tra questo e la struttura di fondazione. Non si terrà pertanto conto dell'influenza della sovrastruttura supponendo, per semplicità di trattazione, che le sollecitazioni agenti sulla struttura di fondazione siano note a priori. I risultati ai quali si perverrà saranno da considerarsi validi per quelle costruzioni in cui le sovrastrutture sono relativamente flessibili, oppure connesse isostaticamente con le strutture di fondazione. Negli altri casi — la maggior parte in pratica — la rigidità della sovrastruttura dovrà essere portato in conto. Anche se la definizione razionale di questo specifico aspetto del problema dell'interazione tra il terreno e le strutture esula dallo scopo di questo lavoro, la metodologia di analisi a cui ci si riferirà successivamente rimane di validità generale.

### 3. Modellazione del comportamento del terreno

La matrice di rigidità del terreno, che compare nella matrice globale  $[K]$  (eq. 8), può essere ricavata seguendo differenti metodi. Discretizzando la struttura di fondazione in elementi finiti, sembrerebbe spontaneo usare la stessa tecnica per il terreno. Così facendo, però, e tenuto conto dell'elevato volume di terreno da

considerare per ottenere risultati sufficientemente approssimati e dell'effettiva tridimensionalità della maggior parte dei problemi reali, si arriverebbe rapidamente ad un numero di incognite molto elevato e difficilmente trattabile anche da elaboratori di grandi dimensioni.

Il problema può essere impostato più semplicemente osservando che ai fini della valutazione dello stato di sollecitazione nella struttura di fondazione (e quindi nella sovrastruttura), il fattore proprio del comportamento del terreno che più ha influenza nella interazione è la distribuzione superficiale delle componenti di spostamento normali al piano di fondazione. Se allora è possibile ricavare analiticamente o numericamente una funzione che esprima gli spostamenti normali del piano di fondazione in funzione delle sollecitazioni trasmesse dalla struttura di fondazione, la costruzione della matrice di rigidità del terreno richiede uno sforzo molto modesto.

Per esemplificare tale modo di impostare il problema dell'interazione, si consideri una piastra appoggiata sul terreno e sollecitata da un sistema noto di forze esterne. Se la piastra è discretizzata in elementi finiti e si considerano i punti sulla superficie del terreno corrispondenti ai nodi della struttura, la distribuzione delle pressioni di contatto è approssimata da un insieme discreto di forze (incognite) applicate a tali punti. Supponendo che lungo la superficie di contatto tra piastra e terreno non ci sia trasmissione di tensioni orizzontali e sotto l'ipotesi di legame sforzi-deformazioni linearmente elastico, lo spostamento verticale del generico punto può essere espresso come combinazione lineare delle forze  $R_{if}$  provenienti da tutti gli  $n$  nodi della struttura. Si può porre, cioè

$$\delta_{zi} = \sum_{j=1}^n f_{ij} R_{if} \quad (i = 1, n) \quad (9)$$

dove  $f_{ij}$  è un coefficiente di influenza, dipendente dalla geometria del problema e da ulteriori ipotesi sulla deformabilità del terreno, che esprime lo spostamento verticale del generico punto  $i$  indotto dalla forza  $R_{if}$  posta in corrispondenza di qualsiasi altro punto  $j$ .

In forma matriciale il sistema di equazioni lineari (9) può scriversi

$$\{\delta_z\} = [F] \{R_{if}\} \quad (10)$$

dove  $[F]$  prende il nome di matrice di flessibilità del terreno di fondazione.

Invertendo la matrice  $[F]$  e tenendo conto delle condizioni di compatibilità, si ricava la matrice di rigidezza  $[K_c]$  del terreno ed il problema dell'interazione è completamente risolto.

I limiti di impiego della relazione (9) risiedono, oltre che nell'ipotesi di comportamento elastico lineare, anche nella impossibilità di modellare adeguatamente il comportamento di terreni stratificati con elevate variazioni delle caratteristiche di deformabilità. È possibile però, come si vedrà in seguito, trattare il caso di terreni disomogenei con modulo elastico crescente linearmente con la profondità.

La conseguenza immediata dell'impiego dei coefficienti di influenza è che il numero totale di incognite per ogni problema di interazione è determinato solo dalla discretizzazione della struttura di fondazione (e della sovrastruttura). Si ottiene in questo modo una notevole riduzione del numero delle variabili rispetto a quello ottenuto discretizzando il terreno di fondazione in elementi finiti, ancorché in condizioni di deformazione piana.

C'è però da osservare che mentre le matrici di rigidezza delle strutture discretizzate in elementi finiti sono simmetriche e bandate, quelle ottenute per il terreno con il metodo dei coefficienti di influenza sono sempre completamente popolate.

Se, ad esempio, si considera una piastra quadrata discretizzata con 25 elementi quadrilateri a 4 nodi, il numero totale delle incognite risulta pari a 108 (36 nodi e 3 gradi di libertà per ogni nodo). La matrice di rigidezza della piastra richiede pertanto un dimensionamento di  $108 \times 25$  variabili reali, essendo 25 la larghezza di banda in questo caso. La matrice di flessibilità calcolata solo in termini di spostamenti verticali ha dimensioni  $36 \times 36$  ma, dopo l'inversione, richiede l'inserimento di un certo numero di righe e colonne di zeri per renderla compatibile con quella della piastra. Si arriva in conclusione ad una matrice di rigidezza globale di dimensioni  $108 \times 108$ . In queste condizioni, se l'elaboratore impiegato rappresenta le variabili reali con due parole (come comunemente avviene con i computers a 16 bits per parola), l'occupazione di memoria per la sola matrice di rigidezza globale risulta di oltre 23 KW.

Per ovviare a questo inconveniente e rendere possibile l'uso dei piccoli calcolatori che tanta diffusione stanno avendo in questi ultimi tempi, è stata recentemente messa a punto una tecnica numerica che, trattando il problema

dell'interazione in modo iterativo, mantiene disaccoppiata la matrice di rigidezza della struttura di fondazione (più eventualmente quella della sovrastruttura) da quella del terreno [BURGHIGNOLI e PAOLIANI, 1982]. Inoltre, tale metodo non richiede l'inversione della matrice di flessibilità del terreno e risulta molto più rapido, durante l'esecuzione automatica, del metodo diretto che utilizza l'eq. (8).

In definitiva, tenuto conto delle effettive possibilità offerte dal metodo dei coefficienti di influenza, vale la pena di esaminare in un certo dettaglio le ipotesi fondamentali e i criteri generali per la costruzione delle matrici di flessibilità del terreno di fondazione.

#### 4. Matrici di flessibilità del terreno di fondazione

Per la costruzione delle matrici di flessibilità del terreno di fondazione è possibile servirsi delle numerose soluzioni già elaborate e pubblicate nella letteratura tecnica, che forniscono la distribuzione degli spostamenti di un mezzo continuo linearmente elastico sottoposto a diverse distribuzioni dei carichi esterni. Queste soluzioni, che verranno qui indicate come soluzioni elementari, possono essere impiegate come segue.

Si immagini di riportare sul terreno il reticolo con cui si è discretizzata la struttura di fondazione (fig. 2). Così facendo, ad ogni nodo della struttura di fondazione viene associato un punto appartenente alla superficie limite del terreno.

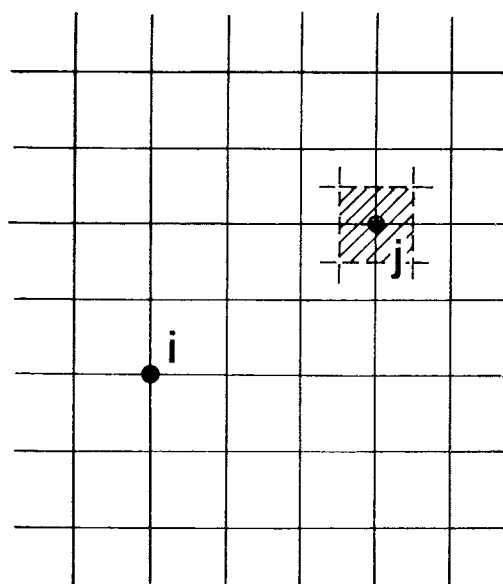


Fig. 2. - Definizione dell'area di influenza del generico nodo sulla superficie limite del terreno.

Si supponga che ad ogni nodo  $j$  della struttura di fondazione corrisponda un'area di influenza  $\Omega_j$  del terreno (superficie tratteggiata in fig. 2) su cui agisce una pressione  $p_j$ .

La (9) può essere riscritta nella forma:

$$\delta_{zi} = \sum_{j=1}^n \rho_j I_{ij} p_j \Omega_j \quad (11)$$

dove  $\rho_j$  è lo spostamento verticale del punto  $j$  prodotto da una sollecitazione unitaria  $p_j \Omega_j = 1$  posta nel punto stesso e  $I_{ij}$  un coefficiente di influenza che dà conto dello spostamento verticale del punto  $i$  per effetto della sollecitazione unitaria applicata al punto  $j$ . Ponendo  $F_{ij} = \rho_j I_{ij}$  e  $R_{fi} = p_j \Omega_j$ , la (11) risulta formalmente uguale alla (10).

Nel caso, ad esempio, di terreno di fondazione assimilato ad un semispazio omogeneo e isotropo limitato da un piano orizzontale, per un corpo di carico rettangolare avente dimensioni  $a \cdot b$  che produce una pressione di contatto

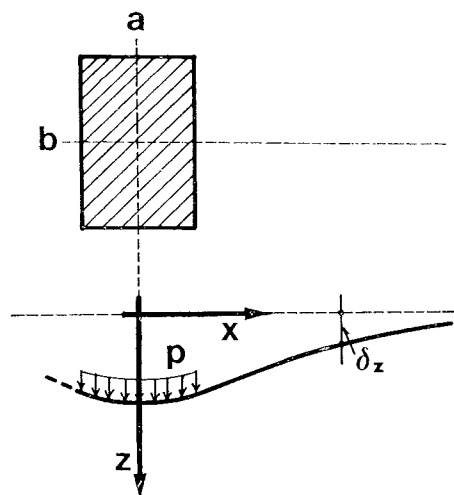


Fig. 3. - Spostamento verticale del piano limite di un semispazio elastico omogeneo e isotropo prodotto da un corpo di carico uniformemente distribuito su un'area rettangolare.

uniforme  $p$  (fig. 3), l'espressione dello spostamento verticale di ogni punto del piano limite risulta:

$$\delta_z = \rho I p \Omega \quad (12)$$

dove [LOVE, 1966]:

$$\rho = \frac{1 - \nu^2}{a\pi E} \left[ \frac{a}{b} \sinh^{-1} \frac{b}{a} + \sinh^{-1} \frac{a}{b} \right] \quad (13)$$

$$I = \frac{B \sinh^{-1} \frac{1}{B} + \sinh^{-1} B - C \sinh^{-1} \frac{1}{C} - \sinh^{-1} C}{\frac{a}{b} \sinh^{-1} \frac{b}{a} + \sinh^{-1} \frac{a}{b}} \quad (14)$$

avendo posto:  $B = (2x + 1) \frac{a}{b}$  e  $C = (2x - 1) \frac{a}{b}$ .

Se si abbandona l'ipotesi di omogeneità, assumendo una legge di variazione del modulo di elasticità trasversale del tipo [GIBSON, 1967]

$$G(z) = G(0) \left[ 1 + \frac{z}{\beta} \right], \quad (15)$$

allora il calcolo degli spostamenti superficiali presenta qualche difficoltà analitica. Nel caso di corpo di carico uniforme su un'area rettangolare, gli spostamenti verticali possono essere valutati in base ai diagrammi messi a punto da BROWN e GIBSON [1973], mentre per un corpo di carico uniforme su un'area circolare (fig. 4),

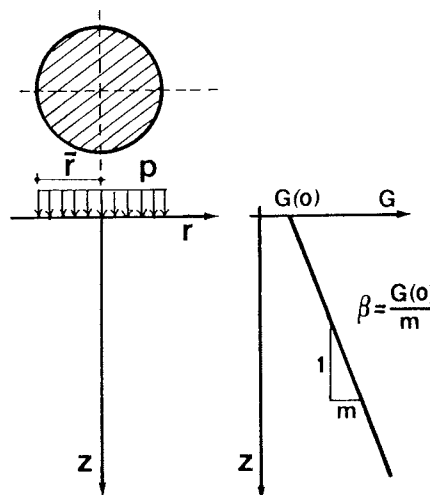


Fig. 4. - Corpo di carico circolare su un semispazio elastico disomogeneo.

gli stessi autori hanno ricavato la seguente espressione [BROWN e GIBSON, 1972]

$$\delta_z = \frac{pr}{2G(o)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_0(R\lambda) J_1(\lambda) L(\alpha, y) d\lambda \quad (16)$$

dove  $\bar{r}$  è il raggio del cerchio,  $R = r/\bar{r}$  è la variabile geometrica,  $y = \xi\beta$  e  $\lambda = r\xi$  sono funzioni della variabile di integrazione  $\xi$ ,  $J_0$  e  $J_1$  sono funzioni di Bessel di primo tipo e  $L(\alpha, y)$  è un'espressione algebrica di funzioni ipergeometriche confluenti. Le costanti elastiche del terreno sono rappresentate dal valore  $G(o)$  del modulo di elasticità trasversale in corrispondenza del piano limite e dei parametri  $\beta$  e  $\alpha =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu}}$$

Dalla (16) risultano immediatamente le espressioni

$$\rho = \frac{1}{2\pi r G(o)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda) L(\alpha, y) d\lambda \quad (17)$$

e

$$I = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_0(R\lambda) J_1(\lambda) L(\alpha, y) d\lambda}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda) L(\alpha, y) d\lambda} \quad (18)$$

I valori di  $\rho$  ed  $I$ , e quindi i termini dei coefficienti della matrice di flessibilità del terreno di fondazione possono essere ricavati dai diagrammi delle figure 5 e 6, in funzione del parametro  $\beta$  che esprime il grado di disomogeneità del materiale e del coefficiente di Poisson.

La forma circolare del corpo di carico nella soluzione di Brown e Gibson può apparire poco indicata per rappresentare l'area di influenza dei punti nodali che corrispondono ad una discretizzazione della struttura di fondazione in elementi finiti rettangolari. Peraltro, purché l'area di influenza sia rappresentata da un cer-

chio equivalente, il calcolo degli spostamenti può essere effettuato con sufficiente approssimazione.

Il metodo dei coefficienti d'influenza può essere impiegato anche nel caso di fondazioni su pali e l'analisi risulta particolarmente semplice se tali elementi siano considerati come facenti parte del terreno di fondazione. Si dovrà allora ricercare la matrice di flessibilità complessiva dell'insieme pali-terreno.

Per fare ciò è necessario ricavare la soluzione elementare che esprime la distribuzione degli spostamenti verticali della superficie del terreno, prodotti da sollecitazioni unitarie agenti su un palo singolo. Se si trascurano gli effetti dovuti alle forze normali all'asse del palo e ai momenti (come se il palo fosse vincolato alla struttura di fondazione con un appoggio scorrevole), gli spostamenti verticali della superficie limite sono prodotti della sole forze assiali.

Tali spostamenti possono essere calcolati, in campo elastico, integrando lungo il fusto e la base del palo l'espressione ricavata da MINDLIN [1936] relativa ad una forza verticale posta all'interno di un semispazio elastico, omogeneo e isotropo, limitato da un piano orizzontale [POULOS e DAVIS, 1968; BUTTERFIELD e BANERJEE, 1971]. Rimuovendo l'ipotesi di omogeneità, BANERJEE e DAVIES [1978] hanno esaminato il caso di semispazio costituito da due strati di diversa deformabilità e, per tener conto di una variazione lineare del modulo di Young con la profondità, hanno indicato un criterio per determinare dei valori equivalenti delle costanti elastiche, in relazione alla lunghezza del palo. A fianco di queste soluzioni di tipo integrale, si colloca il metodo degli elementi finiti, con il quale è possibile tener conto delle disuniformità sia a livello della geometria del problema, sia rispetto alle proprietà dei materiali. In ogni caso, comunque, è necessario il ricorso in misura più o meno importante a mezzi di calcolo automatici.

Recentemente, RANDOLPH e WROTH [1979] hanno proposto un approccio al problema che, seppure meno approssimato dei precedenti, ha il duplice vantaggio di condurre ad una espressione analitica dei cedimenti prodotti da un singolo palo e di tener conto della variazione lineare del modulo elastico con la profondità. Tale risultato è stato raggiunto esaminando il legame sforzi-deformazione separatamente per il fusto e la base del palo ed ammettendo una approssimazione per quanto riguarda la congruenza degli spostamenti. Con riferimento alla

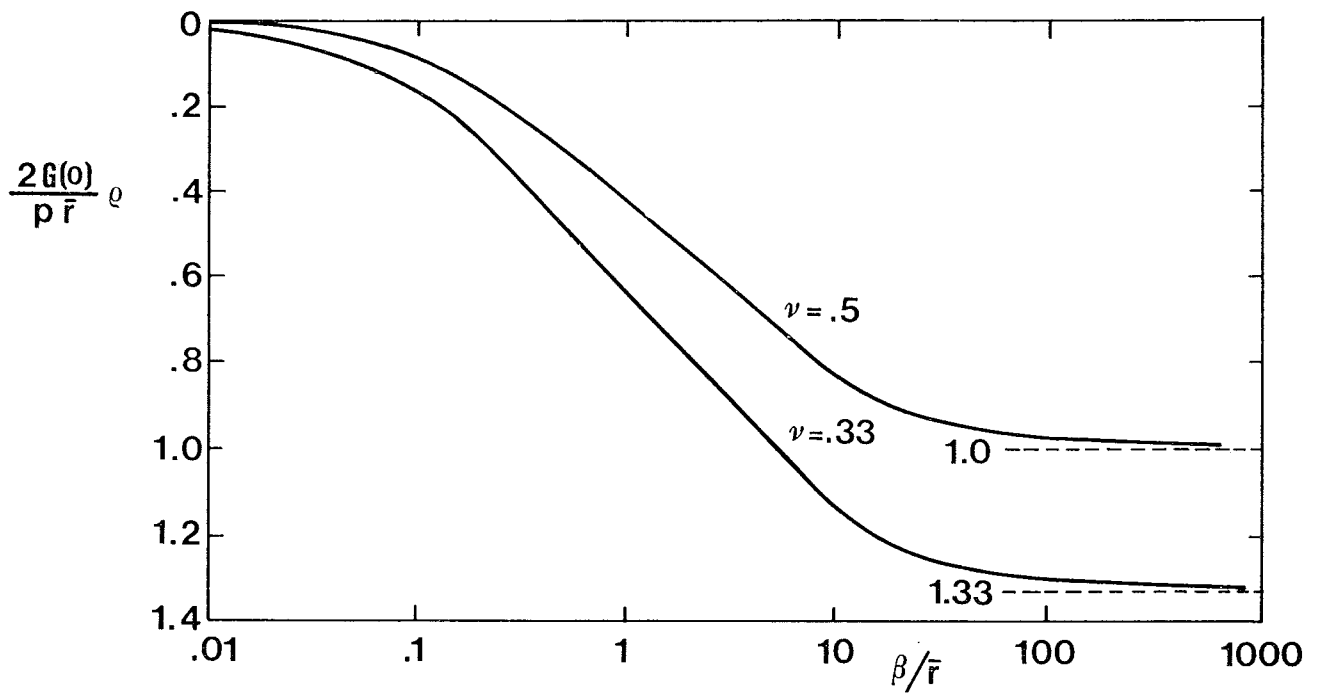


Fig. 5. - Corpo di carico circolare su un semispazio elastico disomogeneo. Spostamenti verticali in asse.

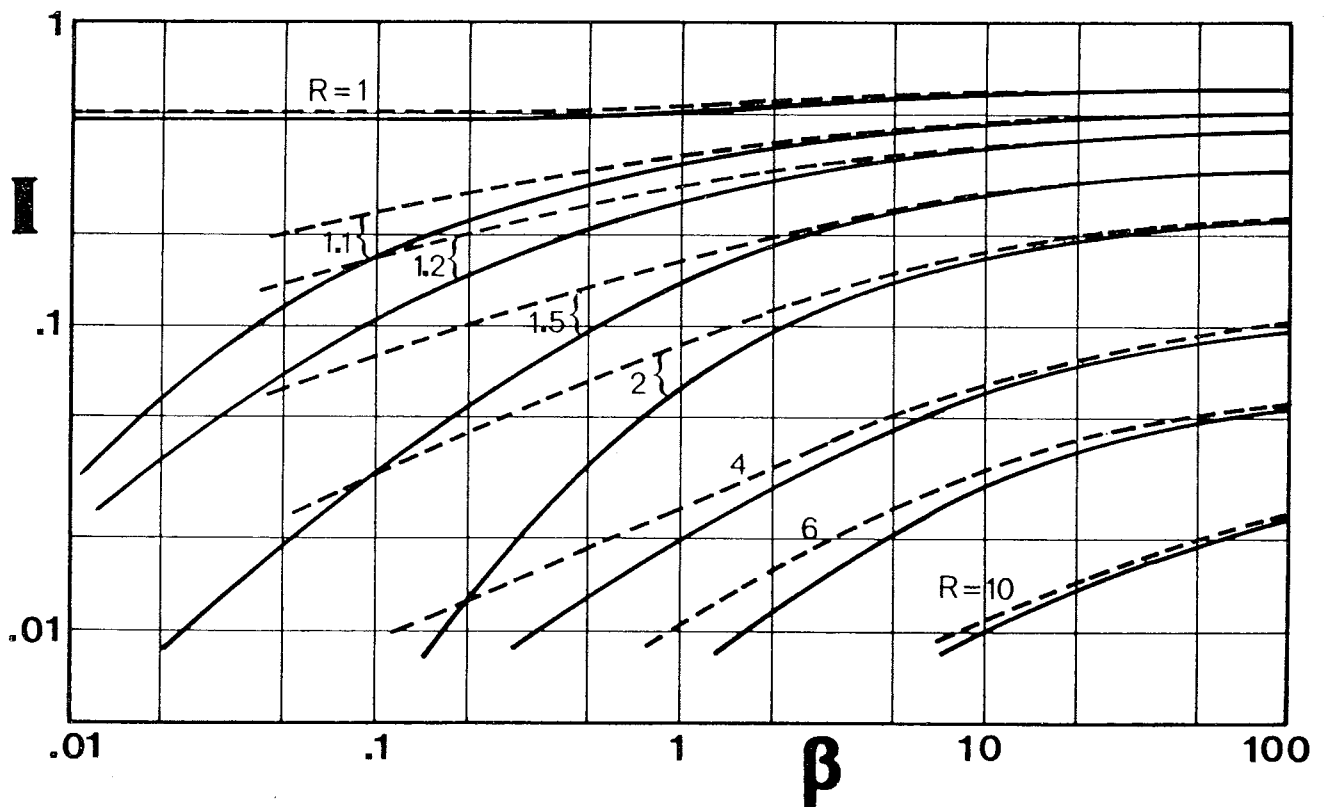


Fig. 6. - Corpo di carico circolare su un semispazio elastico disomogeneo. Coefficienti di influenza,  $I$ , per il calcolo degli spostamenti verticali del piano limite.

fig. 7 e sotto l'ipotesi di indeformabilità del palo, l'espressione dello spostamento verticale del piano limite è analoga alla (12) e cioè del tipo

$$\delta_z = \rho I P \quad (19)$$

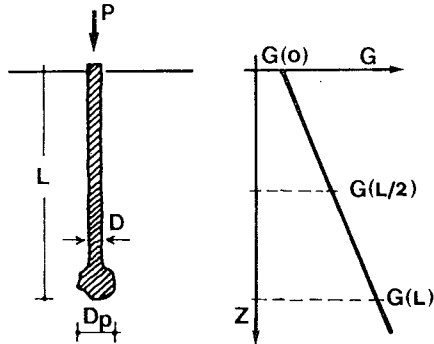


Fig. 7. - Palo in un mezzo elastico disomogeneo.

dove  $\rho$  è lo spostamento verticale del palo prodotto da una forza unitaria,  $P$  è il carico appli-

$$\alpha = \frac{\text{incremento di spostamento verticale dovuto al palo vicino}}{\text{spostamento verticale dovuto al proprio carico}}$$

Nella fig. 8 sono riportati alcuni valori di  $I$  ricavati con le (21) e, per confronto, quelli ot-

tato ed  $I$  il coefficiente di influenza. Nella (19)  $\rho$  ed  $I$  hanno le seguenti espressioni:

$$\rho = \frac{\psi (1 - \nu) \ln (2r_m/D)}{DG(L) 2 \ln (2r_m/D) + 0.8\pi\psi r_m/D} \quad (20)$$

$$I = \frac{\ln (r_m/D) - \ln (r/D)}{\ln (2r_m/D)} \quad (r \leq r_m) \quad (21a)$$

$$I = 0 \quad (r > r_m) \quad (21b)$$

Le grandezze che compaiono nelle (21) sono definite come segue:

$$r_m = 2.5 \lambda (1 - \nu) L$$

$$\lambda = G(L/2)/G(L) \quad (\text{grado di omogeneità})$$

$$\psi = D/D_p \quad (\text{fattore di forma del palo})$$

Per il teorema di reciprocità di Maxwell, il coefficiente di influenza  $I$  coincide con il fattore di interazione  $\alpha$  fra due pali uguali, definito dal rapporto [POULOS, 1972]:

tenuti per altra via da BANERJEE [1978] e POULOS [1979].

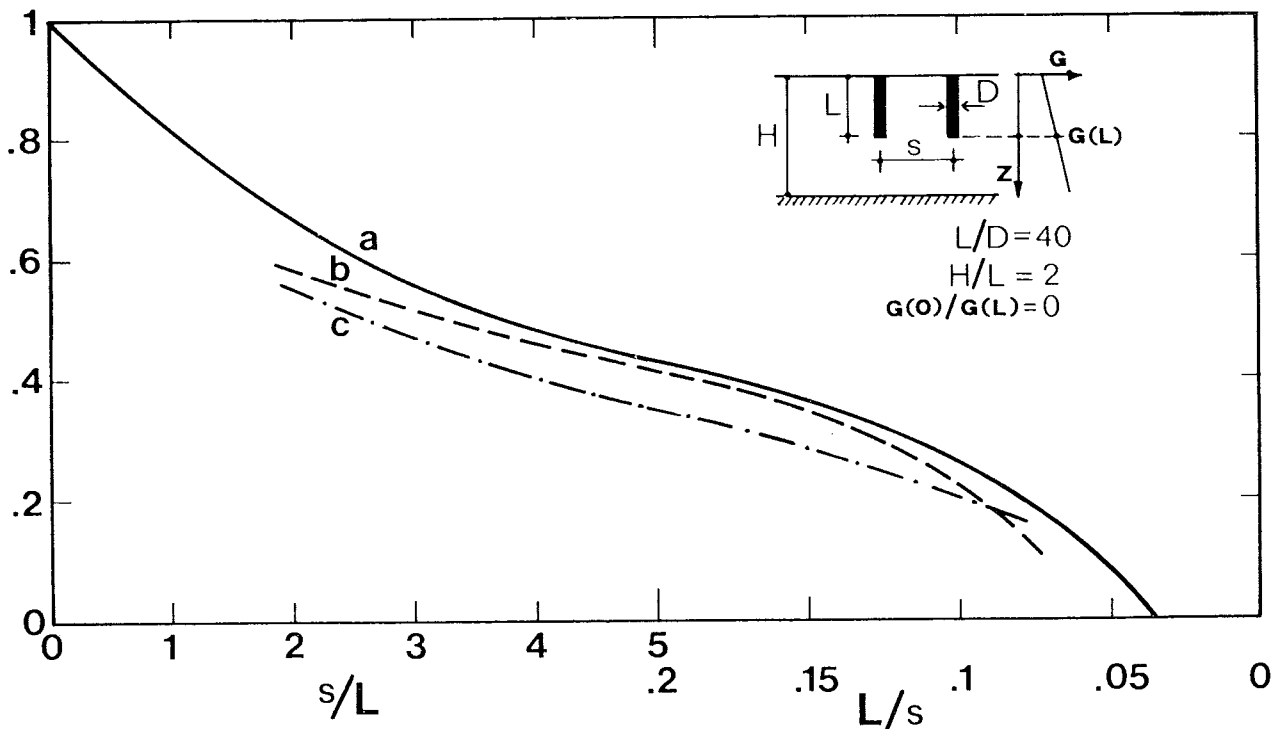


Fig. 8. - Strato elastico disomogeneo e di limitato spessore. Coefficienti di influenza,  $I$ , per il calcolo degli spostamenti verticali di gruppi di pali. a) RANDOLPH e WROTH (1979); b) BANERJEE (1978); c) POULOS (1979).



Nel caso di un gruppo di pali, tutti della stessa lunghezza, il cedimento del generico palo dovuto al proprio carico e agli spostamenti verticali indotti dagli  $n$  pali circostanti è dato dalla espressione

$$\delta_{zi} = \rho \sum_{j=1}^n I_{ij} P_j \quad (22a)$$

ovvero, in notazione matriciale,

$$\{\delta\} = [F] \{P\} \quad (22b)$$

essendo  $[F] = \rho [I]$  la matrice di flessibilità del complesso pali-terreno.

Espressioni formalmente analoghe alle (22) possono essere ricavate nel caso di fondazioni costituite da più gruppi di pali. L'analisi risulta particolarmente semplice se ciascun gruppo è costituito da pali che si trovano nelle stesse condizioni geometriche e di carico (cioè pali di ugual lunghezza ed ugualmente caricati, disposti a gruppi di due o di tre ai vertici di triangoli equilateri). Riferendosi, ad esempio, a due gruppi di tre pali ciascuno (fig. 9), il cedimento del palo  $i$ -esimo del primo gruppo può essere espresso nella forma:

$$\delta_{ii} = \rho_1 \sum_{j=1}^3 I_{ij} P_{1j} - \rho_2 \sum_{j=1}^3 I_{ij} P_{2j} \quad (23)$$

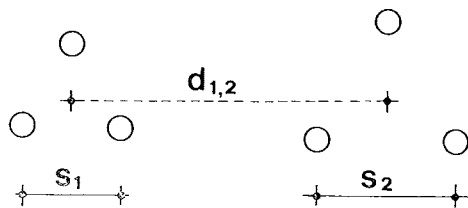


Fig. 9. - Schema geometrico di gruppi di pali.

Per le ipotesi introdotte, il cedimento del singolo gruppo coincide con quello di qualsiasi palo del gruppo stesso. Pertanto la (23) può essere scritta come segue:

$$\delta_{g1} = \rho_1 [1 + 2I(s_1)] \cdot p_1 + 3\rho_2 I(d_{1,2}) p_2 \quad (24)$$

avendo indicato con  $\delta_{g1}$  il cedimento del primo gruppo.

Indicando, inoltre, con  $N = 3P$  il carico agente su ciascun gruppo di pali, la (24) diviene

$$\delta_{g1} = \rho_1 \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} I(s_1) \right] N_1 + \rho_2 I(d_{1,2}) N_2 \quad (25)$$

Estendendo l'analisi da due a più gruppi di pali il cedimento del generico gruppo è dato dalla seguente espressione:

$$\delta_{gi} = \sum_{j=1}^{n_g} \rho_j I_{ij} N_j \quad (26a)$$

dove  $n_g$  è il numero totale dei gruppi di pali e dove si deve intendere:

$$I_{ij} = I(d_{i,j}) \quad \text{per } j \neq i$$

$$I_{ij} = \frac{1}{n_i} + \left[ 1 - \frac{1}{n_i} \right] I(s_i) \quad \text{per } j = i$$

In notazione matriciale la (26a) assume la forma

$$\{\delta_g\} = [F_g] \{N\} \quad (26b)$$

avendo posto, analogamente alla (22b)  $[F_g] = [\rho I]$ .

## 5. Conclusioni

Nella progettazione delle costruzioni a contatto con il terreno — la totalità nel campo dell'ingegneria civile — si è raggiunta, allo stato attuale, una notevole capacità di analisi delle strutture, assistiti in questo dalla disponibilità di mezzi di calcolo automatico moderni e veloci e dallo sviluppo di programmi ben documentati e collaudati. Questi ultimi, in particolare, sono normalmente basati sulla discretizzazione di elementi finiti dei diversi elementi strutturali e prevedono l'impiego di leggi costitutive di varia complessità.

Le difficoltà di impiego di questi programmi per l'analisi dei problemi di interazione risiedono essenzialmente nella mancanza di un'adeguata « interfaccia » con il terreno che viene spesso considerato come un vincolo fisso o, al più, un appoggio cedevole. A ciò è dovuto l'uso, e spesso l'abuso, del modello di Winkler che permette di ricondurre il problema dell'interazione ad un sistema di molle dislocate lungo la porzione di costruzione a contatto con il terreno. Come è noto, il modello di Winkler si rivela in molti casi del tutto inefficiente a rappresentare il reale comportamento del complesso terreno-struttura e, anche a livello concettuale, pone seri problemi di adattamento dei parametri che lo caratterizzano con la natura fisica del mezzo a cui si riferisce.

In questo contesto, gli obiettivi che la ricerca applicata ha perseguito negli ultimi anni sono stati da un lato la sostituzione del modello di mezzo discontinuo (tale è quello di Winkler) per descrivere il comportamento del terreno con modelli continui (variamente diversificati tra loro in relazione alle ipotesi sulla linearità, omogeneità e isotropia del mezzo), dall'altro la messa a punto di tecniche risolutive che evitassero, quando possibile, la discretizzazione geometrica del terreno di fondazione, allo scopo di non aumentare pesantemente il numero di gradi di libertà.

All'illustrazione di tali tecniche si è rivolta la presente nota cercando di evidenziare come problemi di interazione anche geometricamente complessi possano essere risolti con sufficiente approssimazione e senza l'ausilio di mezzi di calcolo particolarmente capaci, pur impiegando per il terreno un modello di mezzo continuo non omogeneo (ancorché sotto l'ipotesi di elasticità lineare).

Il metodo dei coefficienti di influenza, descritto in un certo dettaglio con riferimento alle fondazioni dirette e profonde, si presta agevolmente a trattare problemi diversi come quelli delle opere sotterranee e delle strutture di sostegno, ha il vantaggio di impiegare una serie di soluzioni elementari già disponibili e di permettere un'analisi comparativa di diverse soluzioni progettuali dello stesso problema senza richiedere oneri di calcolo eccessivi.

#### BIBLIOGRAFIA

- AWOJOBI A. O. (1975) - *The settlement of a foundation on second kind*. Géotechnique 25, n° 2, 221-228.
- BANERJEE P. K. (1978) - *Analysis of axially and laterally loaded pile groups*. Developments in Soil Mechanics, C. R. Scott, ed., Applied Science Publ., U. K.
- BANERJEE P. K. e DAVIES T. G. (1978) - *The behaviour of axially loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils*. Géotechnique 28, n° 3, 309-326.
- BURGHIGNOLI A. e PAOLIANI P. (1982) - *An iterative method for soil-structure interaction analysis*. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton (Canada), 893-898.
- BUTTERFIELD R. e BANERJEE P. K. (1971a) - *Analysis of axially loaded piles and pile group*. Géotechnique 21, n° 1, 43-60.
- CALABRESI G. (1978) - *Comportamento dei terreni e metodi di analisi della interazione terreno-strutture*. XIII Congresso Nazionale di Geotecnica, Merano, v. III, 27-43.
- GIBSON R. E. (1967) - *Some results concerning displacement and stresses in a non-homogeneous elastic half-space*. Géotechnique, n° 1, 58-67.
- GIBSON R. E. (1974) - *The analytical method in soil mechanics*. Géotechnique 24, n° 2, 115-140.
- KÖNIG G. e SHERIF G. - *Platten und Balken auf nachgiebigen Baugrund*. Berlin, Springer, 1975.

- LOVE A. E. H. (1966) - *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. London, Cambridge University Press.
- MINDLIN R. A. (1936) - *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid*. J. Physics 77, May.
- POULOS H. G. (1972) - *Load-settlement prediction for piles and piers*, ASCE, SM 9, 879-897.
- POULOS H. G. (1979) - *Settlement of single piles in non-homogeneous soil*. ASCE, GT5, 627-642.
- POULOS H. G. e DAVIS E. H. (1968) - *The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers*. Géotechnique 18, n° 3, 351-371.
- RANDOLPH M. F. e WROTH C. P. (1979) - *An analysis of the vertical deformation of pile groups*. CUED/D-SOIL/TR 59.

#### SUMMARY

##### The influence factors method in the soil-structure interaction analysis

The Influence Factors Method (IFM) is a very useful tool for solving practical problems of soil-structure interaction. This method is based on a standard discretization of the structure, i.e. in finite elements, and on the superimposition of some elemental solutions, i.e. a point load over or in an elastic half-space, which can be arranged in order to obtain the stiffness matrix of the soil. Although the method is restricted to the hypothesis of linear behaviour of both the soil and the structure, it seems to be rather attractive for the possibility of analysing geometrically complex problems with moderate computational efforts. In practice, the influence of the soil deformability on the structure behaviour is often accounted for by the simple but crude Winkler model. Respect to this, the IFM method has a certain appeal since it assumes the soil to be a continuous medium with mechanical parameters having a precise physical meaning. The main feature of this method will be shown in the following, with reference to shallow and deep foundations.

Under the previous assumptions, Eq.s (1) to (7) define completely any linear problem of soil-structure interaction. In these Eq.s  $[K_s]$ ,  $[K_f]$ ,  $[K_i]$  are the stiffness matrices of the structure, the foundation and the soil, respectively;  $\{Q\}$  is the vector of the external loads;  $\{R_{sf}\}$ ,  $\{R_{fs}\}$ ,  $\{R_{fi}\}$ ,  $\{R_{if}\}$  are the vectors of the interaction forces (see fig. 1);  $\{\delta_f\}$  and  $\{\delta_i\}$  are the vectors containing the displacements.

By combining Eq.s (1) to (7), the final equation results

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{Q\} \quad (8)$$

where  $[K] = [K_s] + [K_f] + [K_i]$  and  $\{\delta\} = \{\delta_s\} = \{\delta_f\} = \{\delta_i\}$ . In the following, attention will be focused on the evaluation of the soil stiffness matrix  $[K_i]$  or, which is the same, of its flexibility matrix  $[F] = [K_i]^{-1}$ .

Taking into account that the behaviour of the structure is mainly influenced by the normal components of the surface soil displacements, the soil flexibility matrix for shallow foundations can be easily obtained from elemental solutions for distributions of loads or pressures acting normally to the limiting plane of an elastic half-space.

In this way, the relation between the soil surface displacements and the interaction forces can be written in the form (see fig. 2):

$$\delta_{zi} = \sum_{j=1}^n \rho_j I_{ij} \bar{\rho}_j \quad (11)$$

where  $\rho_j$  is the normal displacement of the point j due to the unit load  $\bar{\rho}_j \Omega_j = 1$  on the same point and  $I_{ij}$  is an influence factor accounting for the normal displacement of

the point  $i$  due to a unit load in  $j$ . In matrix form, Eq. 11 becomes

$$\{\delta_i\} = [F] \{R_{if}\} \quad (10)$$

The flexibility matrix  $[F]$  can be inverted and added to the stiffness matrices  $[K_s]$  and  $[K_f]$ , after a suitable insertion of some rows and columns of zeroes for compatibility. The solution of the system of linear equations (8) with the prescribed boundary conditions and its back-substitution into Eq.s (1), (2) and (3) completely defines the interaction problem.

In order to reduce the computer memory occupation and to use the micro and personal computers as well, various alternative procedures have been proposed. Among these, an iterative method has been developed [BURGHIGNOLI and PAOLIANI, 1982] by which the stiffness matrix of the soil is uncoupled from the structure and the inversion of the soil flexibility matrix is avoided.

Many elementar solutions can be found in the literature for the evaluation of the flexibility matrix of the soil. For an uniform pressure acting on a rectangular area over a homogeneous and isotropic half-space (fig. 3) the vertical displacement of the limiting plane is given by the relations (13) and (14) [LOVE, 1966].

With reference to an elastic half-space whose modulus increases linearly with depth, BROWN and GIBSON [1972, 1973] proposed solutions for an uniform pressure on rectangular and circular areas. The expressions (17) and (18), corresponding to the latter case, are plotted in fig. 5 and 6.

The IFM can be used in the analysis of soil-structure interaction problems even in the case of deep foundations.

By using some elementar solutions for evaluating the vertical displacements of a single pile and of the surrounding soil, an approximate flexibility matrix for piles and soil as a whole can be easily found. Several solutions are available at the moment [POULOS and DAVIS, 1968; BUTTERFIELD and BANERJEE, 1971; BANERJEE and DAVIES, 1978]. Recently, RANDOLPH and WROTH [1979] proposed an approximate close-form solution which allows for soil modulus increasing linearly with depth (see fig. 7). By the relevant expressions (20) and (21) the interaction factor  $\alpha$ , as defined by POULOS [1972], has been evaluated and compared with other available solutions (fig. 8).

A simplified procedure for the analysis of groups of equal and simmetrically disposed piles (fig. 9) has been proposed as well. The vertical displacement of the generic group is given by the relation (26), which can be immediately used for a numerical analysis.