

Le tensioni tangenziali di contatto nel proporzionamento di una trave di fondazione

E. BILOTTA *

SOMMARIO: Nel proporzionamento di una trave di fondazione viene in genere trascurato l'effetto dell'interazione tangenziale trave-terreno; al fine di esaminarne l'influenza, è stata effettuata un'analisi di cui vengono riportati qui i primi risultati. Il procedimento di calcolo impiegato è basato sul metodo di discretizzazione proposto da BARDEN [1962] per trave liscia e che qui viene esteso, con opportuna modifica, al caso di trave con perfetta aderenza o dotata d'attrito all'interfaccia e comunque caricata. Nell'ipotesi d'attrito all'interfaccia trave-terreno si suppone che le tensioni tangenziali di contatto siano legate agli scorrimenti relativi tramite la relazione iperbolica di KONDNER [KONDNER *et al.*, 1963]. Per il terreno di fondazione vengono fatte le due ipotesi: semispazio elastico omogeneo ed isotropo o strato di spessore limitato; in quest'ultimo caso per il calcolo degli spostamenti del terreno si ricorre al procedimento di STEINBRENNER [1934]. L'esposizione del metodo è completata da alcuni risultati esemplificativi che permettono di evidenziare il ruolo che i vari fattori giocano nel proporzionamento della trave con le diverse ipotesi assunte per l'interfaccia. Le distribuzioni delle pressioni di contatto, dei momenti e dei cedimenti differenziali massimi che si hanno nelle ipotesi di trave con perfetta aderenza o dotata di attrito vengono confrontate con quelle relative all'ipotesi di interfaccia liscia; da tale confronto emerge che le tensioni tangenziali di contatto provocano una riduzione dei momenti e dei cedimenti differenziali.

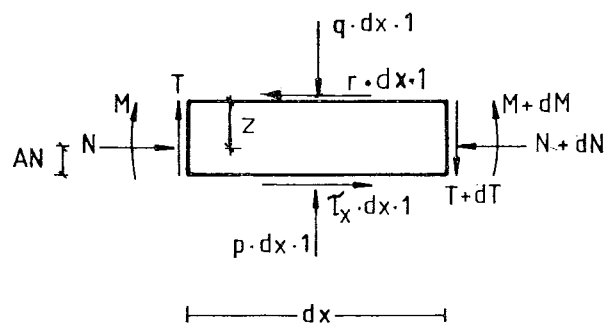
1. Introduzione

Nel 1947 Terzaghi faceva rilevare la mancanza di un'analisi che tenesse conto delle tensioni tangenziali di contatto nel proporzionamento di una trave di fondazione. A tutt'oggi il problema è stato parzialmente affrontato; le soluzioni disponibili si riferiscono solo a particolari condizioni di carico, di rigidezza della trave e di legame all'interfaccia trave-terreno: perfetta aderenza [MUSKHELISHVILI, 1963], comportamento rigido-plastico [SPENCE, 1963]. Si è pensato allora di affrontare il problema con un procedimento numerico del tutto generale ed applicabile ad un'analisi più completa sull'influenza che le tensioni tangenziali di contatto esercitano nel proporzionamento di una trave di fondazione; il procedimento viene esposto qui di seguito. A titolo esemplificativo sono stati riportati anche alcuni dei risultati ottenuti, per meglio evidenziare il ruolo che giocano i vari parametri nelle diverse condizioni assunte per l'interfaccia trave-terreno.

2. Procedimento di calcolo

Le forze in gioco su un elemento di trave di fondazione di lunghezza unitaria, assoggettata al generico carico esterno comunque distribuito, possono schematizzarsi come in fig. 1.

* Dott. Ing. Eduardo BILOTTA, Assistente Ordinario, Professore Incaricato Stabilizzato di *Geotecnica* presso l'Università della Calabria.



dove

$$dN = (\tau_x - r) \cdot dx$$

$$dT = -(q - p) \cdot dx$$

$$dM = (T - AN \cdot \tau_x - r \cdot z) \cdot dx$$

Fig. 1. - Forze in gioco su un elemento di volume della trave.

La presente analisi viene effettuata discretizzando la reale distribuzione continua delle interazioni normali e tangenziali con una distribuzione a scalini come, per esempio, quella indicata in fig. 2 per uno schema simmetrico di carichi verticali agenti su una trave di larghezza « B » e lunghezza « L »; risultati sufficientemente approssimati si ottengono con valore del

$$\text{fattore di discretizzazione } n = \frac{L}{l} = 10 \div 20.$$

I valori assunti dalle 2n interazioni incognite p_i e τ_i e dalle tre componenti dello spostamento rigido della trave, sono forniti dalla soluzione di un sistema di equazioni che esprimono le condizioni di equilibrio della trave ed

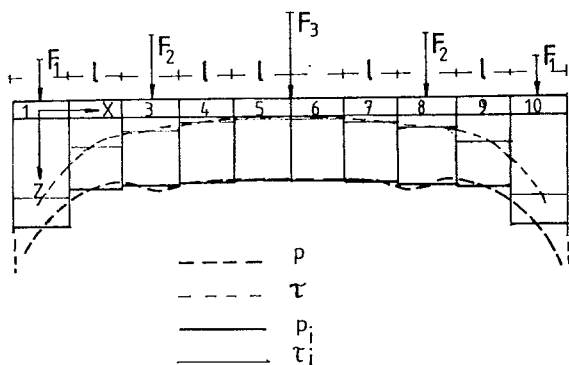


Fig. 2. - Discretizzazione delle tensioni di contatto.

il rispetto della congruenza verticale ed orizzontale all'interfaccia trave-terreno, in corrispondenza del baricentro delle aree d'impronta dei conci.

Per valutare gli spostamenti connessi alle deformazioni elastiche della trave, ci si riferisce ad una trave incernierata nel primo concio e semplicemente appoggiata nell'ultimo.

Gli spostamenti reali della trave, in corrispondenza del generico concio, possono poi ottenersi sommando agli spostamenti così calcolati, quelli rigidi connessi ai reali spostamenti del primo ed ultimo concio.

Lo spostamento verticale del generico concio è fornito da:

$$w_i = w_i^o + w_1 + \frac{w_n - w_1}{(L - l)} x_i = w_i^o + \left[1 - \frac{x_i}{(L - l)} \right] w_1 + \frac{x_i}{(L - l)} w_n \quad (1)$$

dove:

w_i^o = spostamento elastico verticale dell' i^{mo} concio della trave appoggiata;

w_1 e w_n = spostamenti verticali reali del primo ed n^{mo} concio rispettivamente;

x_i = ascissa del baricentro del concio i^{mo} con riferimento al sistema di coordinate indicato in fig. 2.

Lo spostamento orizzontale del baricentro dell'area d'impronta del generico concio è fornito da:

$$u_i = u_i^M + u_i^N + u_i \quad (2)$$

dove:

u_i^M = spostamento orizzontale all'intradosso della trave per la deformazione flessionale della stessa;

u_i^N = spostamento orizzontale del generico concio della trave incernierata nel primo concio per effetto della distribuzione di sforzi normali;

u_i = spostamento orizzontale reale del primo concio.

Gli spostamenti reali dei conci della trave quindi possono esprimersi tramite le $2n$ interazioni e i tre spostamenti rigidi incogniti u_1, w_1, w_n .

Gli spostamenti orizzontali e verticali del terreno dipendono dai valori assunti dalle $2n$ interazioni.

In definitiva, quindi, le incognite del problema sono $2N + 3$

$$p_1 \dots p_n, \tau_1 \dots \tau_n, w_1, w_n, u_1$$

ed altrettante sono le equazioni disponibili: n per la congruenza degli spostamenti verticali del terreno e della trave in corrispondenza dei singoli conci, n per la congruenza dei corrispondenti spostamenti orizzontali e 3 di equilibrio per la generica condizione di carico; abbiamo cioè il seguente sistema:

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{j=1}^m q_j$$

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = \sum_{j=1}^m r_j \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i x_i + \tau_i \cdot AN) = \sum_{j=1}^m (q_j \cdot x_j - r_j \cdot z)$$

$$\{w^b\} - \{w^s\} = \{0\}$$

$$\{u^b\} - \{u^s\} + \{\delta\} = \{0\}$$

dove si sono indicati con:

p_i = pressione di contatto relativa all'unità di superficie del concio i^{mo} ;

τ_i = tensione tangenziale di contatto relativa all'unità di superficie del concio i^{mo} ;

q_j = componente verticale della forza esterna unitaria equivalente $F_j/l \cdot B$ o $(\int_0^l q \cdot dx)/l$;

r_j = componente orizzontale della forza esterna unitaria equivalente;

$\{w^b\}$ = vettore degli spostamenti verticali della trave in corrispondenza dei baricentri degli n conci;

$\{w^s\}$ = vettore dei corrispondenti spostamenti verticali del terreno;

$\{u^b\}$ = vettore degli spostamenti orizzontali all'intradosso della trave sulla verticale baricentrica degli n conci;

$\{u^s\}$ = vettore dei corrispondenti spostamenti orizzontali del terreno;

$\{\delta\}$ = vettore degli spostamenti orizzontali relativi δ_i tra trave e terreno che si hanno in corrispondenza della verticale baricentrica degli n conci e che dipendono dalla particolare condizione di contatto assunta.

Se si suppone perfetta aderenza sarà ovunque $\delta_i = 0$ e quindi $\{\delta\} = \{0\}$.

Ponendo:

$$\{t\}^T = \{p_1, \dots, p_n, \tau_1, \dots, \tau_n\}$$

e

$$\{f\}^T = \{q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_m\}$$

possiamo esprimere in forma matriciale il vettore dei momenti $\{M\}$ nelle sezioni baricentriche degli n conci con:

$$\{M\} = B \cdot l^2 ([M] \{t\} + [M^f] \{f\})$$

dove gli elementi delle ultime n colonne della matrice $[M]$ dipendono dal rapporto AN/l mentre $[M^f]$ dipende dal particolare schema di carico; AN è la distanza dell'asse neutro dall'intradosso della trave.

Per gli spostamenti elastici verticali corrispondenti risulta:

$$\{W^o\} = (l^2/(4 \cdot E_b \cdot I)) [W^M] \{M\}$$

con $[W^M]$ che dipende solo dal fattore di discretizzazione « n » da cui del resto dipendono tutte le altre matrici, ed E_b ed I che rappresentano il modulo elastico ed il momento d'inerzia della trave.

Per la (1) si ha quindi la seguente espressione del vettore degli spostamenti verticali dei baricentri degli n conci:

$$\{W^b\} = (Bl^4/(4E_b \cdot I)) ([W^M] [M] \{t\} + [W^M] [M_f] \{f\}) + [W_1] \cdot w_1 + [W_n] \cdot w_n \quad (4)$$

dove $[W_1]$ e $[W_n]$ sono matrici diagonali i cui elementi non nulli sono forniti rispettivamente da $(1 - x_i/(L - l))$ e da $x_i/(L - l)$.

Lo spostamento elastico u_i^M della (2) è dato dal prodotto della rotazione ϕ_i della sezione baricentrica del concio i^mo , per la distanza « AN » dell'asse neutro dall'introdosso della trave: $u_i^M = \phi_i \cdot AN$.

Il vettore delle rotazioni $\{\phi\}$ delle sezioni baricentriche degli n conci può esprimersi con:

$$\{\phi\} = (l/(E_b \cdot I)) [\phi] \{M\}$$

La componente u_i^N delle (2) dipende invece dal vettore dello sforzo normale $\{N\}$ che può mettersi nella forma:

$$\{N\} = l \cdot B \cdot ([ST] \{\tau\} + [SR] \{r\})$$

dove $\{\tau\}$ ed $\{r\}$ rappresentano rispettivamente il vettore di componenti « τ_i » ed « r_i »; in assenza delle componenti di carico applicate nella direzione dell'asse della trave ($\{r\} = \{0\}$) lo sforzo normale nella generica sezione dipende solo da $\{\tau\}$.

La (2) può quindi esplicitarsi in forma matriciale come segue:

$$\begin{aligned} \{u^b\} &= \frac{AN}{1} \frac{Bl^4}{E_b \cdot I} ([\phi] [M] \{t\} + [\phi] [M^f] \{f\}) + \\ &+ \frac{Bl^2}{E_b \cdot A} [U_N^o] ([ST] \{\tau\} + [SR] \{r\}) + [I] \cdot u_i \end{aligned} \quad (5)$$

avendo indicato con $[I]$ la matrice unitaria di dimensione $(n \times n)$ e con A la sezione della trave.

Per il calcolo degli spostamenti del terreno sotto il concio i^{mo} per effetto delle p_k e τ_k si ricorre alle espressioni del Boussinesq e del Cerutti rispettivamente ⁽¹⁾ [POULOS e DAVIS, 1974].

Le suddette espressioni forniscono direttamente il valore degli spostamenti nell'ipotesi di terreno assimilabile al semispazio elastico; nel caso di strato di spessore limitato « H », perfettamente aderente al mezzo rigido sottostante, i suddetti valori sono stati stimati col procedimento approssimato di STEINBRENNER [1934] ⁽²⁾, utilizzando le precedenti espressioni.

Il vettore degli spostamenti verticali può mettersi nella forma:

$$\{w^s\} = [(1 - \nu^2)/\pi \cdot E_s] \cdot B \cdot [W^s] \{t\} \quad (6)$$

dove con E_s viene indicato il modulo elastico e con ν il coefficiente di Poisson del terreno.

Nel caso di semispazio, gli elementi delle ultime n colonne di $[W^s]$ dipendono da ν , mentre nel caso di strato di spessore H tutti gli elementi di $[W^s]$ dipendono da ν ed H/l ovvero, per ogni valore di L/B , da H/B ; in entrambi i casi gli elementi della diagonale principale della sottomatrice formata dalle prime n colonne di $[W^s]$ assumono valori che dipendono da L/B .

Analogamente il vettore degli spostamenti orizzontali per terreno omogeneo elastico isotropo può esprimersi con:

$$\{u^s\} = ((1 - \nu^2)/\pi E_s) \cdot B \cdot [U^s] \cdot \{t\} \quad (7)$$

⁽¹⁾ Gli spostamenti verticali ed orizzontali sotto il concio i^{mo} sono stati calcolati sostituendo alla distribuzione delle p_k e τ_k relative al concio k^{mo} , le forze $P_k = p_k \cdot l \cdot B$ e $T_k = \tau_k \cdot l \cdot B$, applicate nel baricentro dell'area d'impronta del concio stesso quando $k \neq i$, mentre vengono integrate le espressioni in p_i e τ_i rispetto all'area d'impronta « $B \cdot l$ » del concio, quando $k = i$; per il calcolo degli spostamenti orizzontali $u_{i,i}^s$ dovuti all'interazione τ_i in corrispondenza del concio i^{mo} ci si è avvalsi della espressione fornita da GIROUD [1969, a].

⁽²⁾ L'approssimazione connessa all'impiego di tale procedimento in luogo della teoria di BURMISTER [1943] è ampiamente analizzata da POULOS [1967]; per l'influenza del tipo di contatto, ruvido e liscio, all'interfaccia tra lo strato e il mezzo rigido sottostante, ci si può riferire all'analisi di YAMAGUCHI [YAMAGUCHI *et al.*, 1968]. Dai suddetti lavori può dedursi che per valori di H/B non piccoli e per $\nu \neq 0,5$, risultano trascurabili l'influenza del tipo di contatto dello strato col mezzo sottostante e le divergenze tra i risultati ottenibili col metodo di Steinbrenner e quelli forniti dalla teoria di Burmister.

dove tutti gli elementi della matrice $[U^s]$ dipendono dalla ν e, quando ci si riferisce ad uno strato di spessore limitato, anche dal valore di H/B ; in entrambi i casi gli elementi della diagonale principale della sottomatrice costituita dalle ultime n colonne di $[U^s]$ dipendono da L/B .

Introducendo le (4), (5), (6) e (7) in (3) e ponendo ⁽³⁾:

$$\begin{aligned} \emptyset &= (L/n)^4 \cdot \pi E_s / (4 \cdot E_b \cdot I \cdot (1 - \nu^2)) \\ [W] &= \emptyset [W^M] [M] - [W^s] \\ [F^w] &= - \emptyset [W^M] [M^f] \end{aligned} \quad (8)$$

$$[U] = \emptyset \left[\frac{AN}{l} [\varphi] [M] + \right. \\ \left. - \frac{1}{P \cdot A} [U^0_N] [ST] \right] - [U^s]$$

$$[F^u] = - \emptyset \left[\frac{AN}{l} [\varphi] [M^f] + \frac{1}{P \cdot A} [U^0_N] [SR] \right]$$

dove le matrici $[ST]$ ed $[SR]$ diventano di dimensioni $(n \times 2n)$ ma con gli elementi delle prime n colonne uguali a zero, si ha il seguente sistema delle $(3 + 2n)$ equazioni nelle $(3 + 2n)$ incognite $w_i, w_n, u_i, p_i, \tau_i$:

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{j=1}^m q_j$$

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = \sum_{j=1}^m r_j$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i \cdot x_i + \tau_i \cdot AN) = \sum_{j=1}^m (q_j \cdot x_j - r_j \cdot z) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (\pi E_s / (1 - \nu^2) \cdot B) (w_i [W_i] + w_n [W_n]) + \\ + [W] \{t\} = [F^w] \{f\} \end{aligned} \quad (n \text{ equazioni di congr. vert.})$$

$$\begin{aligned} (\pi E_s / (1 - \nu^2) \cdot B) \cdot u_i [I] + [U] \{t\} + \\ + (\pi E_s / (1 - \nu^2) \cdot B) \{ \delta \} = [F^u] \{f\} \end{aligned} \quad (n \text{ equazioni di congr. orizz.})$$

⁽³⁾ Il parametro \emptyset messo in evidenza nel sistema di equazioni risolventi è lo stesso di quello impiegato da BARDEN [1962] per interfaccia liscia.

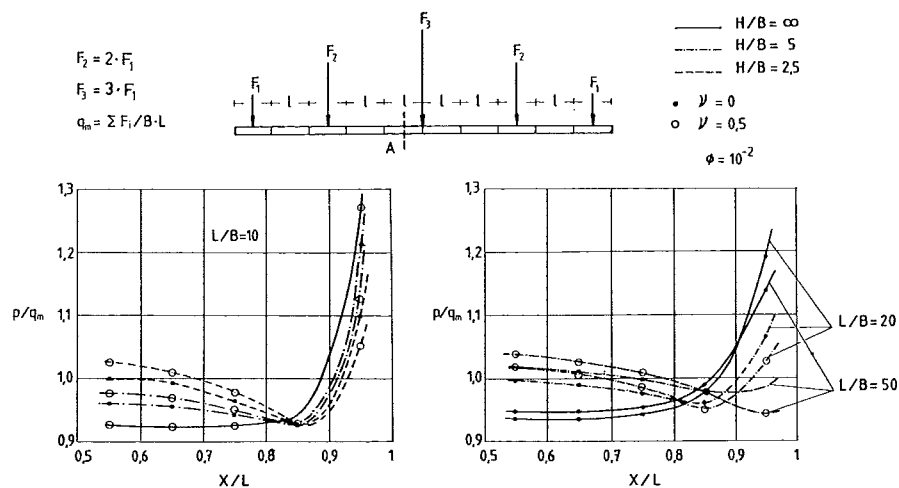


Fig. 3. - Distribuzione delle pressioni di contatto per diverse combinazioni di ν , H/B ed L/B (interfaccia liscia).

La distribuzione delle pressioni e delle tensioni tangenziali di contatto che soddisfano le (9) dipende quindi dalla distribuzione dei carichi esterni tramite la $[M^f]$, la $[SR]$ e le quantità che compaiono nelle tre equazioni di equilibrio, dai rapporti I/A , AN/l e $(\pi E_s / (1 - \nu^2) \cdot B)$, nonché dai parametri che intervengono nella definizione di ϕ , $[M]$, $[W^s]$ ed $[U^s]$ (4).

Qui di seguito vengono riportati alcuni risultati esemplificativi per trave assoggettata ai carichi esterni verticali di fig. 2; in tal caso il secondo membro della 2^a delle (9) è nullo, mentre nella 3^a equazione si elimina il contributo delle componenti τ_i e r_j e nell'espressione della $[F^u]$ si elimina il termine che contiene la $[SR]$.

Per un più immediato confronto tra i risultati ottenuti per trave con tensione tangenziale di contatto e quelli ottenuti con l'ipotesi d'interfaccia liscia, gli uni e gli altri vengono qui riportati.

3. Risultati

Interfaccia liscia

Nell'ipotesi dell'interfaccia liscia ed in assenza di forze orizzontali, il sistema (9) si riduce a quello di $n + 2$ equazioni, che si ottiene eliminando l'equazione di equilibrio orizzontale e le n equazioni di congruenza degli spostamenti orizzontali e che risulta lineare nelle $n + 2$ incognite « p_i », w_1 e w_n .

Per un assegnato schema di carico ($[M^f] =$

$= \text{cost}$), il comportamento della trave dipende dal valore di ϕ e dai parametri che intervengono in $[W^s]$, come può osservarsi dalle espressioni di $[W]$ ed $[F^w]$ riportate in (8) e che compaiono nel suddetto sistema risolvete (5).

Nel caso di strato di spessore illimitato, gli elementi della diagonale principale di $[W^s]$ dipendono da L/B , mentre nel caso di trave su strato di spessore limitato, oltre a tale dipendenza, c'è anche quella degli altri elementi di $[W^s]$ da ν ed H/B . L'influenza di tali parametri ϕ , L/B , ν ed H/B viene evidenziata da alcuni risultati esemplificativi riportati nelle figure 3 e 4.

In fig. 3 sono riportate in forma adimensionale le distribuzioni delle interazioni lungo l'asse di una trave con rigidezza caratterizzata dal valore di $\phi = 10^{-2}$, assoggettata allo schema di carichi concentrati (6) ivi indicati e per varie combinazioni degli altri parametri in gioco.

(4) Dal confronto dei risultati ottenuti, per i vari valori di ϕ e di I/A , trascurando o meno gli spostamenti elastici orizzontali all'introduzione della trave, è risultato trascurabile il relativo contributo sulla distribuzione delle interazioni; quando si trascurano gli spostamenti elastici orizzontali, le tensioni tangenziali di contatto risultano nulle per $\nu = 0.5$.

(5) Le equazioni di congruenza verticale possono scriversi uguagliando gli spostamenti del terreno e della trave rispetto alla fondamentale passante per le estremità della trave stessa; in questo caso non compaiono, tra le incognite, w_1 e w_n e più immediatamente si rileva come, per esempio, la soluzione del sistema nel caso di trave su semispazio elastico dipende solo da ϕ e da L/B [BARDEN, 1962].

(6) Nel seguito, per analizzare il ruolo che giocano i vari parametri sull'entità delle interazioni tangenziali e relative influenze nel proporzionamento di una trave di fondazione, continueremo a riferirci allo schema di forze concentrate riportate in fig. 3.

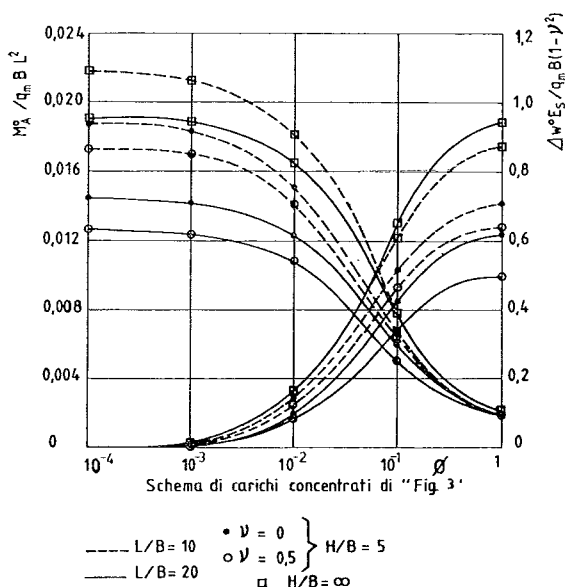


Fig. 4. - Momenti nella sezione « A » di fig. 3 e cedimenti differenziali massimi, al variare di \varnothing , e per diverse combinazioni di ν , H/B ed L/B (interfaccia liscia).

La figura evidenzia come una diminuzione di H/B e un aumento di L/B provocano un appiattimento della distribuzione delle interazioni, nel senso che aumenta il valore nella parte centrale e diminuisce verso l'estremità della trave; tale effetto nel caso di strato di spessore limitato è più sentito per $\nu = 0,5$ che per $\nu = 0$; potrebbe mostrarsi che tutto ciò è valido qualunque sia lo schema di carico.

La fig. 4 mostra, in forma sintetica, l'influenza dei vari parametri in gioco, sui valori dei momenti nella sezione « A » di fig. 3 e dei cedimenti differenziali massimi.

Perfetta aderenza

Nell'ipotesi di perfetta aderenza tra l'intradosso della trave ed il terreno, e quindi per $\{\delta\} = \{0\}$, le (9) costituiscono ancora un sistema lineare di immediata soluzione.

I fattori che influenzano la distribuzione delle interazioni incognite « p_i » e « τ_i » e quindi il comportamento della trave, sono essenzialmente la distribuzione dei carichi esterni e i parametri che entrano in gioco tramite le (8) in $[W]$, $[U]$, $[F^w]$ e $[F^u]$.

La $[W]$ dipende oltre che da \varnothing , AN/l tramite la $[M]$, dai valori assegnati ad L/B , ν ed H/B che intervengono nella definizione degli elementi di $[W^s]$.

La $[U]$ dipende soprattutto da $[U^s]$, dopo quanto si è detto circa l'influenza degli sposta-

menti orizzontali connessi alla deformabilità della trave, e quindi dipende anch'essa essenzialmente da L/B , ν ed H/B .

La $[F^w]$ dipende da \varnothing e dallo schema di carico applicato, mentre la $[F^u]$, ancora per quanto detto sugli spostamenti orizzontali connessi alla deformabilità della trave e per $\{r\} = \{0\}$, è di trascurabile influenza sulla soluzione del sistema.

Anche l'influenza di AN/l sulla $[M]$, gioca poco nella soluzione del sistema come si è potuto constatare facendo variare a parità di \varnothing , la forma della sezione della trave e quindi il valore di AN/l [BILOTTA, 1982].

In definitiva i fattori in gioco risultano essenzialmente \varnothing , L/B , ν ed H/B , la cui influenza è evidenziata dai diagrammi delle figg. 5 e 6, che si riferiscono al caso di trave a sezione rettangolare.

In fig. 5 sono riportate le distribuzioni delle interazioni normali e tangenziali che si hanno con varie combinazioni dei valori di \varnothing , L/B , ν ed H/B in una trave soggetta ai carichi di fig. 3.

Dal confronto di tali diagrammi con quelli disponibili in fig. 3 per interfaccia liscia si evince quanto segue.

Nei riguardi di « ν » si rileva che, nel caso di trave con perfetta aderenza al semispazio elastico:

— per $\nu = 0,5$ le interazioni normali sono pressoché coincidenti con quelle di interfaccia liscia e le interazioni tangenziali sono praticamente nulle (*);

— per $\nu = 0$ si verifica una sensibile variazione delle interazioni normali verso le estremità della trave, mentre insorgono sensibili interazioni tangenziali dirette dalle estremità verso il centro della trave.

Nel caso di trave su strato di spessore limitato, invece, si manifestano tensioni tangenziali di contatto e variazioni delle pressioni per qualunque valore di ν .

Nei riguardi di \varnothing si evince un appiattimento delle interazioni normali, similmente a quanto trovato per l'interfaccia liscia, e un contemporaneo aumento delle interazioni tangenziali, al crescere di \varnothing .

Al crescere di L/B , infine, si rileva che la distribuzione delle pressioni di contatto subisce, come per l'interfaccia liscia, un sensibile livellamento, mentre le tensioni tangenziali di contatto subiscono una leggera diminuzione solo per strato di spessore limitato ($H/B = 5$).

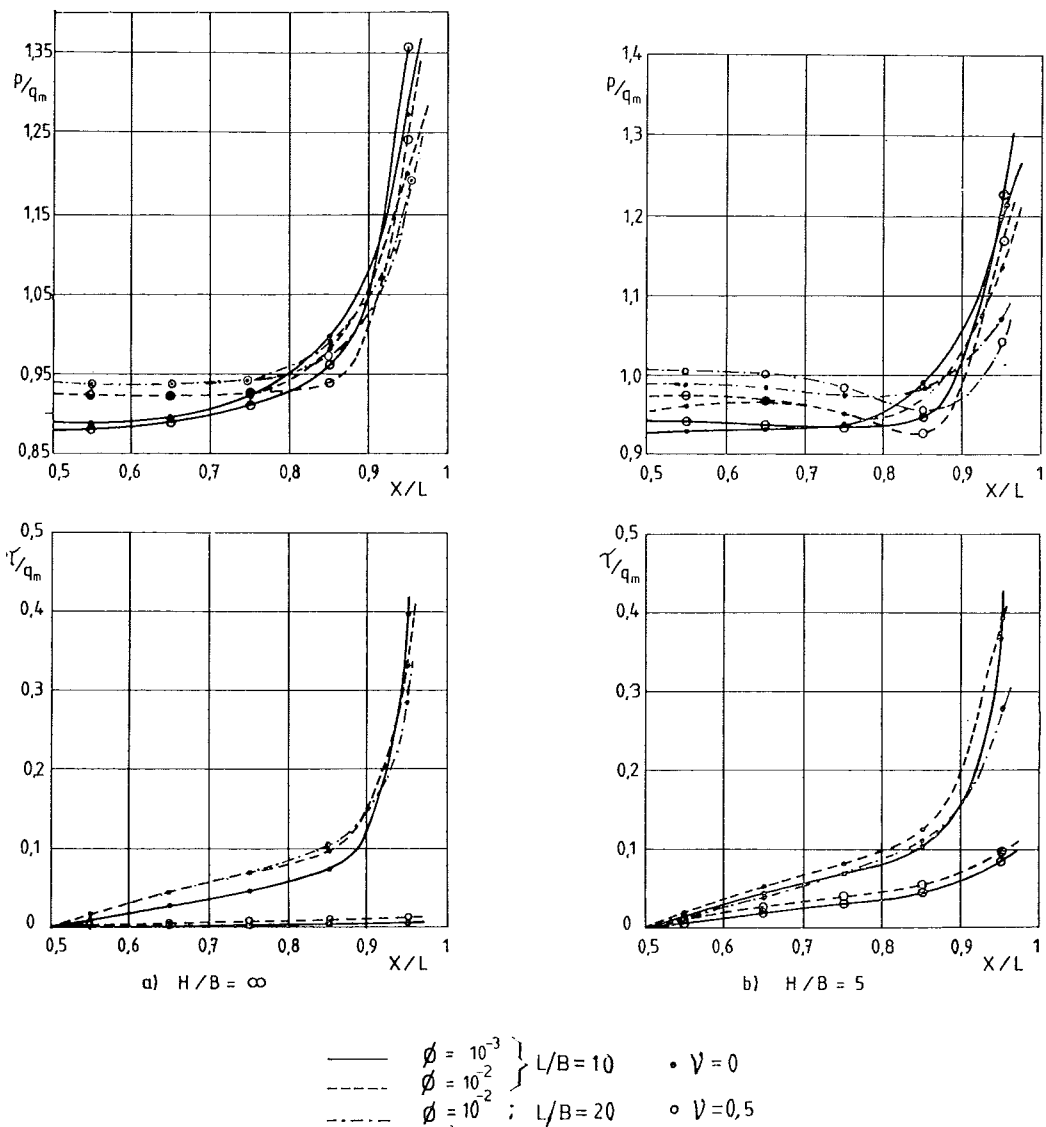


Fig. 5. - Distribuzione delle pressioni e tensioni tangenziali di contatto per varie combinazioni di ϕ , ν , H/B ed L/B (perfetta aderenza).

L'influenza dei vari parametri in gioco sui valori massimi dei momenti e dei cedimenti differenziali appare in forma sintetica già dalla fig. 6. Dal confronto di questa con la fig. 4 può dedursi qualche indicazione immediata sull'effetto delle ipotesi di perfetta aderenza all'interfaccia e cioè:

— per $\nu = 0.5$ e per $H/B = \infty$ l'effetto è praticamente nullo;

— per $\nu \neq 0.5$ e per $H/B = \infty$ si ha sempre una riduzione dei valori dei momenti « M_A » e dei cedimenti differenziali « Δw » rispetto ai valori ottenuti con l'ipotesi d'interfaccia liscia, riduzione che cresce al diminuire di ν e di ϕ ;

— per $H/B = 5$ si hanno riduzioni di « M_A » e di « Δw » anche per $\nu = 0.5$ e comunque, per qualunque valore di ν , tali riduzioni sono sempre superiori a quelle che si hanno per trave su semispazio elastico.

Interfaccia dotata d'attrito

Se invece facciamo l'ipotesi più realistica che all'interfaccia insorga una distribuzione di tensioni tangenziali che è strettamente legata allo scorrimento relativo trave-terreno e alla natura dell'interfaccia, allora occorre introdurre nel precedente sistema un'opportuna relazione $\delta = f(\tau)$; nella presente analisi, si è fatto ricorso alla relazione iperbolica suggerita da KONDNER [KONDNER *et al.*, 1963], e già usata da altri A.A.

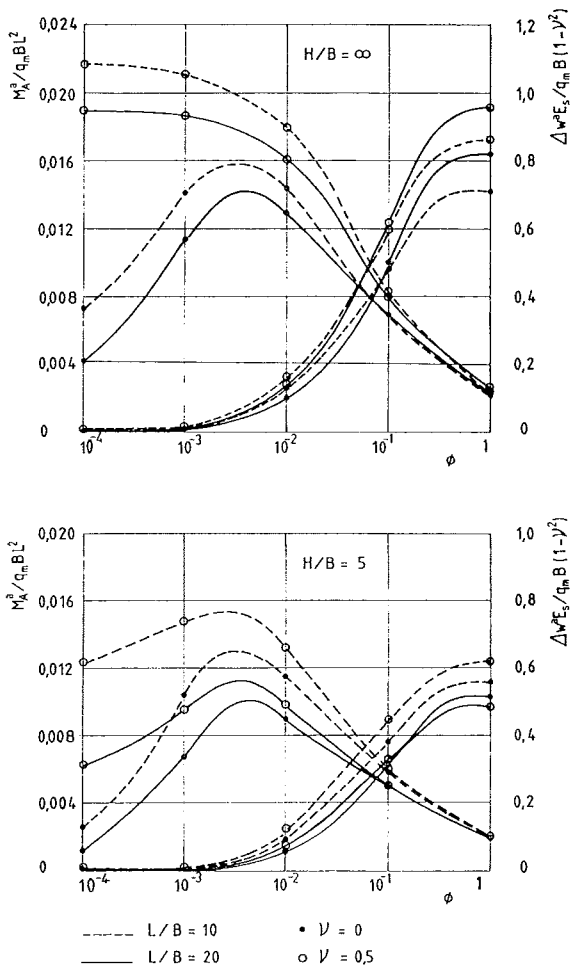


Fig. 6. - Momenti nella sezione « A » di fig. 3 e cedimenti differenziali massimi, al variare di ϕ e per diverse combinazioni di ν , H/B ed L/B (perfetta aderenza).

(es. CLOUGH e DUNCAN, 1971), che può mettersi nella forma:

$$\delta = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\tau}{1 - \tau/\tau_{lim}} \quad (10)$$

dove β è il gradiente iniziale della curva $\tau = f(\delta)$ e τ_{lim} il valore asintotico della resistenza superficiale del sistema trave-terreno (7).

Introducendo tale relazione nelle ultime n equazioni del sistema (9), questo non è più lineare nelle τ_i ; la soluzione deve perciò cercarsi con procedimento iterativo o con applicazione incrementale del carico.

Nella presente analisi si ricorre al procedimento d'applicazione incrementale del carico e quindi, ipotizzando una suddivisione del carico $l \cdot B \cdot \{f\}$ in un insieme di n_f incrementi $l \cdot B \cdot \{\Delta f\}$, si tratta di risolvere n_f volte il sistema di equazioni lineari ottenuto scrivendo la (9)

in forma incrementale ed introducendo per il generico concio i^{mo} la (10) nella forma:

$$\Delta \delta_i = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\Delta \tau_i}{(1 - \tau_i/\tau_{lim})^2} \quad (10')$$

ottenuta differenziando la (10) e passando dai differenziali agli incrementi; la τ_i di (10') è il valore noto della tensione tangenziale dell'interfaccia del concio i^{mo} prima dell'applicazione del successivo incremento di carico $l \cdot B \cdot \{\Delta f\}$.

Si devono cioè risolvere n sistemi del tipo (8):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta p_i &= \sum_{j=1}^m \Delta q_j \\ \sum_{i=1}^n \Delta \tau_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \Delta p_i \cdot x_i &= \sum_{j=1}^m \Delta q_j \cdot x_j \end{aligned} \quad (11)$$

$$(\pi E_s / (1 - \nu^2) \cdot B) (\Delta w_1 [W_1] + \Delta w_n [W_n]) + [W] \{\Delta t\} = [F^w] \{\Delta f\}$$

$$(\pi E_s / (1 - \nu^2) \cdot B) \cdot \Delta u_1 \cdot [I] + ([U] + [C]) \{\Delta t\} = [F^u] \{\Delta f\}$$

(7) I valori di β e τ_{lim} dipendono dalla natura dei materiali a contatto e dalla tensione normale effettiva. Per lo scopo della presente analisi, il valore di β viene ricavato, in prima approssimazione, introducendo nella relazione iperbolica (10) i valori che l'espressione mediamente fornisce per lo scorrimento a rottura δ_f e relativa tensione tangenziale τ_f . Così se mediamente si assume che $\delta_f = 5$ mm e $\tau_f = 0.9 \tau_{lim}$ e si esprime la τ_{lim} in t/mq, si ottiene per β l'espressione:

$$\beta = 1800 \tau_{lim} \text{ (t/m}^2\text{)}$$

I risultati riportati in questa nota si riferiscono al caso di trave in calcestruzzo, a cui si è assegnato un modulo elastico $E_s = 2.000.000$ t/mq, poggiata su terreno incoerente ($E_s = 3.000$ t/mq) per cui può porsi $\tau_{lim} = p' \tan \phi^*$, dove ϕ^* è l'angolo di attrito terreno-calcestruzzo.

(8) La (11) può scriversi più sinteticamente con:

$$[S] \{w_1, w_n, u_1, p_1 \dots p_n, \tau_1 \dots \tau_n\}^T = [F] \{\Delta f\}$$

Ovviamente nel programma di calcolo impiegato per la soluzione del problema è previsto un controllo sulle « τ_i » di modo che se in corrispondenza del generico incremento si verifica che nel concio « i » risulta $|\tau_i| > \tau_{lim}$,

— viene posto $|\tau_i| = \tau_{lim}$ e si elimina la corrispondente colonna di S incrementando il vettore termine noto del sistema col contributo fornito dalla $\tau_i = \tau_{lim}$;

— si riduce il sistema di equazioni eliminando la i^{ma} equazione di congruenza degli spostamenti orizzontali;

— si ricerca la nuova soluzione del sistema così corretto; tale soluzione rappresenta il reale contributo di $\{\Delta \tau\}$ dovuto al suddetto incremento purché risulti ovunque $|\tau_i| \leq \tau_{lim}$, altrimenti occorre reiterare la correzione del sistema.

Mediante opportuno controllo sul segno della « p_i », il programma è altresì predisposto per essere impiegato sia nell'ipotesi di vincolo bilaterale che di vincolo unilaterale nei riguardi delle tensioni normali di contatto.

dove [C] è una matrice con tutti gli elementi nulli ad eccezione di quelli $c_{i,i}$ che devono moltiplicare le $\Delta\tau_i$ e che con riferimento al j^{mo} incremento di carico, assumono il valore:

$$c_{i,i}^j = (\pi E_s / (1 - \nu^2) \cdot B) / (\beta \cdot (1 - \tau_i^{j-1} / \tau_{i \text{ lim}}^{j-1})^2)$$

dove:

$$\tau_i^{j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} \Delta^k \tau_i;$$

$$\tau_{i \text{ lim}}^{j-1} = p_i^{j-1} \text{tg } \varphi^* = \text{tg } \varphi^* \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \Delta^k p_i;$$

Per l'ipotesi fatta circa il valore di $\beta = 1800 \cdot \tau_{i \text{ lim}}$ possiamo porre:

$$c_{i,i}^j = (\pi E_s / 1800 \cdot B (1 - \nu^2)) \text{tg } \varphi^*$$

$$\sum_{k=1}^{j-1} \Delta^k p_i / (\text{tg } \varphi^* \sum_{k=1}^{j-1} \Delta^k p_i - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta^k \tau_i)^2$$

ovvero:

$$c_{i,i} = Z(E_s, \nu, B) \cdot \chi_i^j (p_i^{(j-1)}, \tau_i^{(j-1)}, \varphi^*)$$

che per assegnate caratteristiche del terreno e della trave (E_s, ν, φ^* e B) dipende dal particolare schema di carico.

Rispetto all'ipotesi di perfetta aderenza possono quindi aversi variazioni nei risultati dipendenti dal nuovo ruolo che giocano i parametri E_s, ν e B , dal valore assunto per l'angolo d'attrito φ^* , nonché dall'entità e distribuzione del carico applicato da cui dipendono le χ_i .

L'influenza dello schema di carico può evincersi dall'analisi di alcuni risultati riportati nelle figg. 7 e 8. Nella fig. 7 sono riportati i valori della sollecitazione flessionale nella sezione « A » della trave al crescere del carico e con riferimento agli schemi di singole forze concentrate ivi indicate; nella fig. 8 sono riportati i diagrammi analoghi ottenuti sovrapponendo gli effetti delle singole forze componenti già riportate in fig. 7.

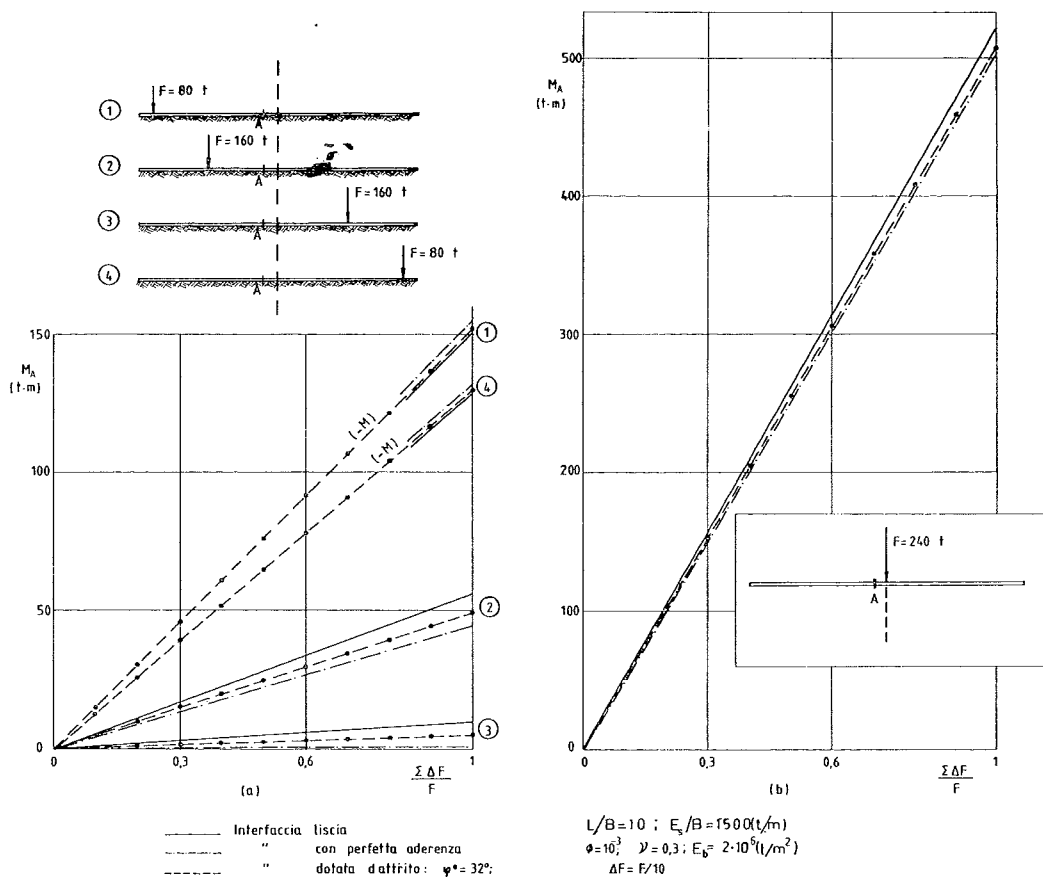


Fig. 7. - Relazione momenti-carichi, per le singole forze concentrate sulla trave di fig. 3, nelle varie ipotesi per l'interfaccia.

Dall'andamento dei diagrammi della fig. 7 può rilevarsi che:

— per carichi costituiti da singole forze concentrate, il momento al centro della trave risulta molto vicino a quello relativo all'ipotesi

d'interfaccia liscia per il carico applicato verso un'estremità della trave (v. fig. 7a), mentre per carichi centrali si avvicina a quello di perfetta aderenza (v. fig. 7b); l'andamento non si discosta sensibilmente dalla linearità.

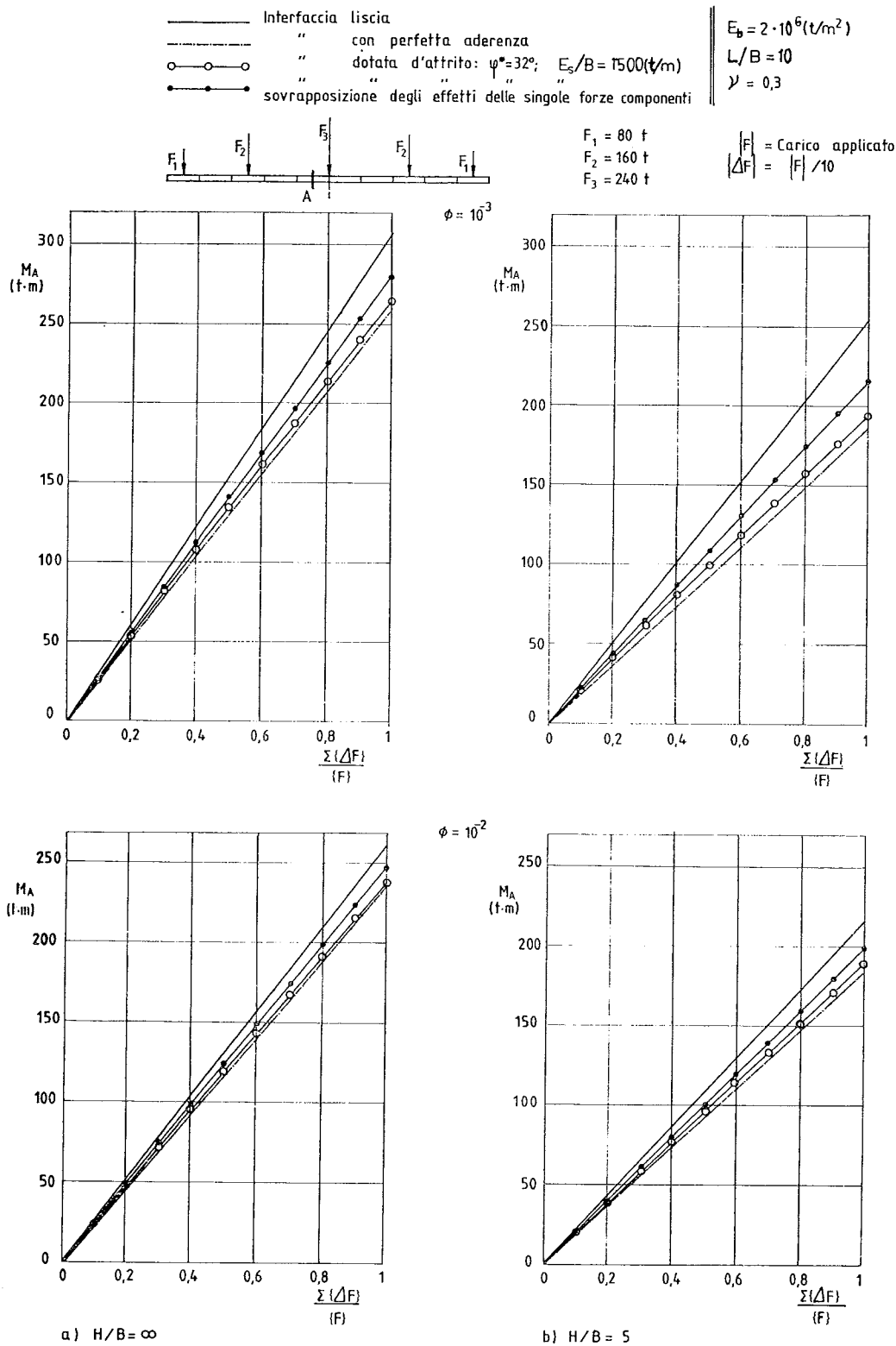


Fig. 8. - Relazione momenti-carichi, per lo schema di carico di fig. 3, nelle varie ipotesi per l'interfaccia della trave.

Dall'andamento dei diagrammi della fig. 8 si evince che:

— la somma degli effetti delle singole forze componenti fornisce un valore del momento massimo sempre superiore a quello che complessivamente compete allo schema totale di carico; il momento somma assume un valore intermedio, tra quello relativo all'interfaccia liscia e quello relativo alla perfetta aderenza;

— per lo schema considerato, al crescere del carico, il momento in mezzeria tende ad assumere un andamento pressoché parallelo e prossimo a quello relativo alla perfetta aderenza.

È appena il caso di rilevare come in ogni caso l'effetto delle tensioni tangenziali di contatto, con una riduzione della sollecitazione flessionale della trave, è maggiore per lo schema di carico con più forze (fig. 8) che non nel caso di singola forza (fig. 7).

Per quanto poi riguarda l'influenza di φ^* , va

rilevato come un suo aumento oltre che elevare i valori limiti delle tensioni tangenziali di contatto, provoca una riduzione delle $c_{i,i}$, come si evince dalle espressioni delle χ_i e quindi, per la (11), un aumento delle « $\Delta\tau_i$ » che a loro volta inducono una riduzione nella sollecitazione flessionale della trave e nei cedimenti differenziali massimi, come appare da alcuni risultati riportati in fig. 9.

Per evidenziare poi come i parametri E_s , ν e B , per la loro presenza in « Z » nell'ipotesi d'interfaccia dotata d'attrito, giocano un ruolo diverso che nel caso di perfetta aderenza, in fig. 10 sono stati confrontati, come esempio, alcuni dei risultati ottenuti per $B = 1\text{m}$ e $B = 2\text{m}$ ed a parità di valori degli altri parametri in gioco. Dal confronto si evince come per $\nu \neq 0.5$ e per qualunque spessore dello strato, la soluzione dipende dal particolare valore di B (o degli altri parametri che compaiono in Z) nell'ipotesi d'interfaccia dotata d'attrito, mentre è indipendente da esso nel caso della per-

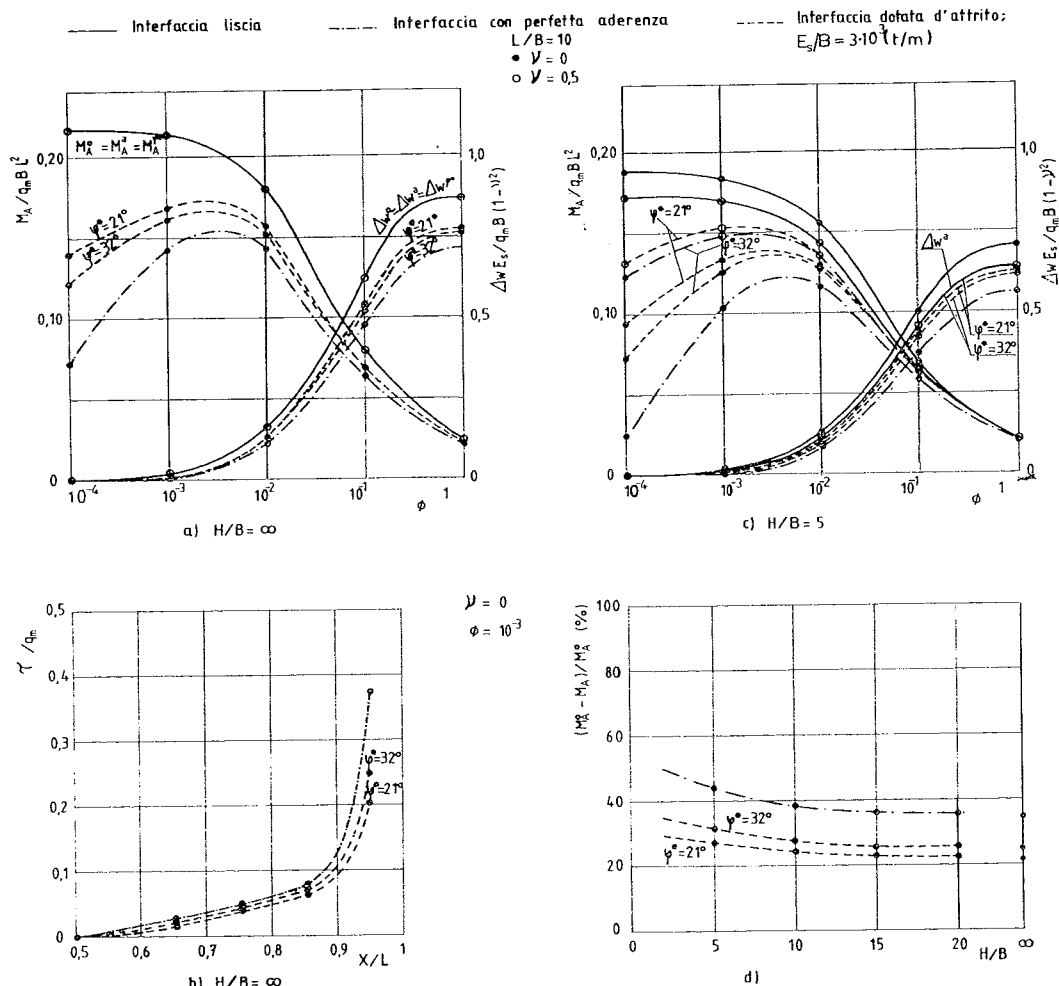


Fig. 9. - Influenza dell'angolo d'attrito superficiale « φ^* » sui valori del momento nella sezione « A » e del cedimento differenziale massimo per la trave di fig. 3.

fetta aderenza dove i suddetti parametri intervengono solo globalmente tramite il particolare valore di ϕ .

4. Conclusioni

Nell'esposizione del procedimento di calcolo impiegato per il proporzionamento di una trave di fondazione con tensioni tangenziali di contatto, si è cercato di evidenziare i parametri in gioco ed il ruolo da essi ricoperto a seconda del tipo di contatto ipotizzato per l'interfaccia trave-terreno, riportando anche qualche risultato esemplificativo.

Qui di seguito si richiamano solo alcune considerazioni emerse nel corso dell'analisi fin qui svolta e si rinvia ad una nota successiva per una più ampia esposizione dei risultati ed un commento più completo sull'influenza delle tensioni tangenziali di contatto.

Nell'ipotesi di *perfetta aderenza*, essendo valido il principio della sovrapposizione degli effetti, è teoricamente lecito ricorrere all'impiego di coefficienti d'influenza per enti viaggianti, per la stima di tensioni e deformazioni connesse al generico concio; tale ipotesi però, è poco cautelativa come risulta dal confronto dei ri-

sultati così ottenuti con quelli relativi all'ipotesi più realistica di un'interfaccia dotata d'attrito.

Dai risultati fin qui riportati per l'ipotesi di perfetta aderenza appare comunque già evidente che:

— sia nel caso di trave su semispazio elastico che nel caso di trave su strato di spessore limitato, le interazioni tangenziali che insorgono con un leggero appiattimento della distribuzione di quelle normali, crescono al crescere di ϕ ed al diminuire di ν ; per $\nu = 0.5$ tale effetto si annulla per il caso di semispazio elastico mentre è ancora sensibile quando ci si riferisce ad uno strato di spessore limitato;

— i valori massimi dei momenti e dei cedimenti differenziali, possono subire sensibili riduzioni rispetto ai valori che si hanno nell'ipotesi d'interfaccia liscia. Tali riduzioni crescono al diminuire di ϕ , di ν ed H/B (fig. 6).

Nell'ipotesi di *interfaccia dotata d'attrito* la soluzione dipende anche dai valori assunti da Z e da χ^2 che controllano le differenze tra i risultati ottenuti nella presente ipotesi e quelli relativi alla perfetta aderenza.

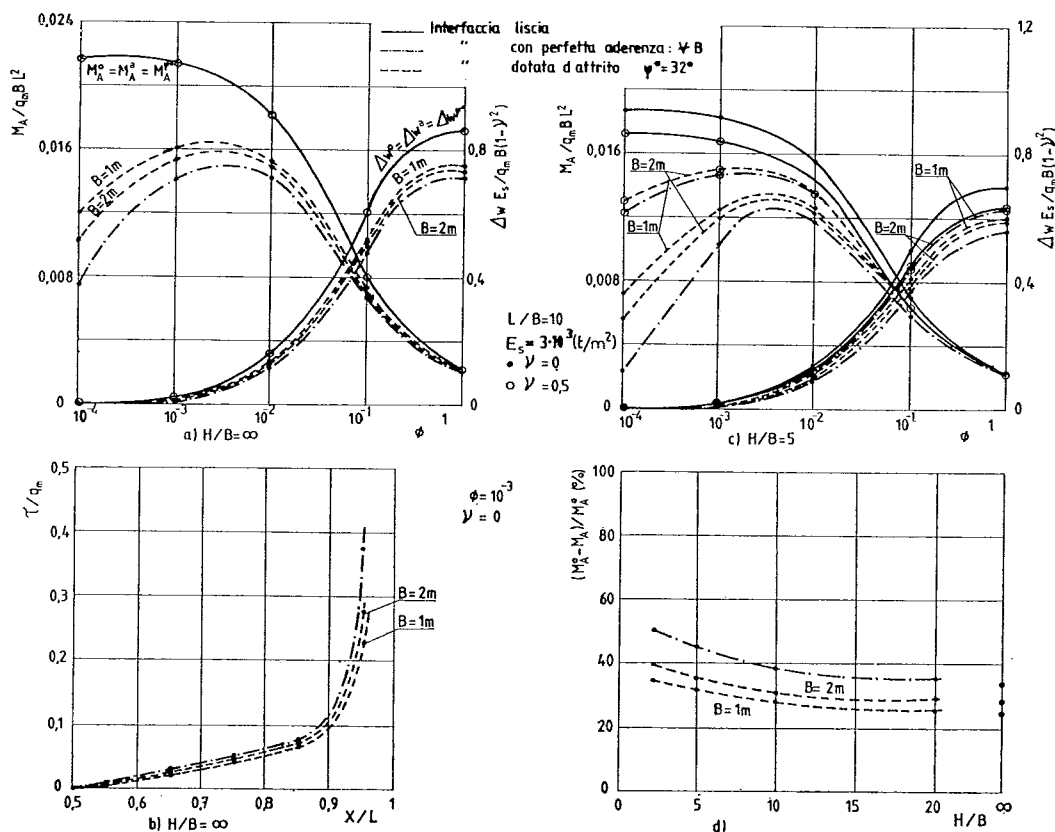


Fig. 10. - Influenza della larghezza « B » della trave di fig. 3, sui valori del momento nella sezione « A » e del cedimento differenziale massimo

La dipendenza di χ_i dallo schema di carico è notevole per cui l'impiego di coefficienti d'influenza per entità viaggianti, porta a sovrastimare il momento massimo relativo al generico schema di carico e quindi può essere più economico il diretto impiego di un programma di calcolo (fig. 10).

I risultati esaminati comunque già evidenziano che, a parità di valori assunti da \varnothing , ν , H/B e L/B , le riduzioni dei momenti e dei cedimenti differenziali massimi crescono, tendendo verso i valori della perfetta aderenza, se i parametri in gioco variano in modo da ridurre i valori di Z (es. aumento di B) o quelli delle χ_i (es. aumento di φ^*) (figg. 7-10).

RINGRAZIAMENTI

L'autore esprime la propria gratitudine al Prof. ing. Carlo Viggiani per i preziosi suggerimenti e l'incoraggiamento ricevuto nella preparazione del lavoro.

BIBLIOGRAFIA

- BARDEN L. (1962) - *Distribution of contact pressure under foundation*. Géotechnique, vol. 12, n. 3, pp. 181-198.
- BILOTTA E. (1982) - *Trave di fondazione con tensioni tangenziali di contatto: influenza dei vari parametri*. In corso di stampa sulla Rivista Italiana di Geotecnica.
- BURMISTER D. M. (1943) - *The theory of stresses and displacements in layered systems*. Proc. Highway Res. Bd., 23-126.
- CLOUGH G. W., DUNCAN J. M. (1971) - *Finite element analysis of retaining wall behaviour*. Journal Soil Mech. Found. Divn. Proc. ASCE, vol. 97, SM 12.
- KONDNER R. L., ZELASKO J. (1963) - *A hyperbolic stress-strain formulation for sands*. Proc. second Pan-Am. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., vol. 1, Brasil.
- MUSKHELISHVILI N. I. (1963) - *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. 4th ed., Noordhoff, Groningen, da HOOPER J. A. - *Developments in Soil Mechanics* 1 C. R. Scott.
- POTYONDY J. G. (1961) - *Skin friction between various soils and construction materials*. Géotechnique, vol. 12, n. 4, pp. 339-354.
- POULOS H. G. (1967) - *Stresses and displacements in an elastic*

- layer underlain by a rough rigid base*. Géotechnique, 17, pp. 37-410.
- POULOS H. G., DAVIS E. H. (1974) - *Elastic solutions for soil and rock mechanics*. John Wiley, New York.
- SPENCE D. A. (1973) - *An eigenvalue for elastic contact with finite friction*. Proc. Camb. Phil. Soc., 73, 29-268, da HOOPER J. A. - *Developments in Soil Mechanics* 1. C. R. Scott.
- STEINBRENNER W. (1934) - *Tafeln für Setzungsberechnung*. Die Strass, vol. 1, 121-124.
- TERZAGHI K. (1967) - *Theoretical soil mechanics*. Wiley, New York, p. 390.
- YAMAGUCHI H., KIMURA T., KONNO H. (1968) - *On the contact distribution between rigid and elastic solid underlain by a rigid boundary*. Soil and Foundations, vol. VIII, n. 3, 460-462.

SUMMARY

Contact shearing stress in a foundation beam

In the analysis of a foundation beam, the contact shearing stress is generally neglected; a procedure to account for it is herein reported.

A discretization method similar to BARDEN'S [1962] has been developed, imposing compatibility of both vertical and horizontal displacements of the beam and the soil. Full adherence between beam and soil may be assumed (rough beam), or, alternatively, a relative tangential displacement with a hyperbolic law is allowed (frictional contact).

The subsoil is modelled as an elastic half space or a finite elastic layer resting on a rigid base.

Soil displacements are evaluated by means of Boussinesq's and Cerutti's formulas; for the case of finite layer, Steinbrenner's approximation is used.

Consideration of overall equilibrium and of compatibility of beam and soil displacements yields eq. (9). In the case of vertical and symmetrical loading (fig. 2) $(2+2n)$ unknown displacements and stresses w_i, w_n, p_i, τ_i ($i=1, n$) are to be determined.

For the rough beam $\{\delta\} = 0$ the $(2+2n)$ linear equations are immediately solved.

For the frictional contact, a relationship $\delta = f(\tau)$ is to be assumed; the hyperbolic Kondner's expression [KONDNER et al., 1963] has been used and the non linear resulting system is resolved by an incremental method.

Some sample results point out the rôle of the various factors in the behaviour of the beam.

The distribution of contact pressures, of maximum bending moments and of differential settlement in both the hypothesis of rough beam and frictional contact, are compared with those relative to a smooth interface: such a comparison shows that the consideration of interface shearing stresses brings to a slight reduction in both the bending moments and the differential settlement.