

# Sul comportamento viscoplastico di mezzi bifase \*

A. CIVIDINI, G. GIODA \*\*

**SOMMARIO:** Viene discusso l'impiego del metodo degli elementi finiti per la soluzione di problemi di analisi delle tensioni in mezzi geotecnici bifase caratterizzati da comportamento viscoplastico della fase solida. Per la descrizione del comportamento viscoso si adotta un modello reologico di tipo deviatorico a parametri variabili, in grado di cogliere la parte reversibile del comportamento viscoso (viscosità primaria), la parte irreversibile (viscosità secondaria e terziaria) e l'effetto di dilatanza a quest'ultima frequentemente associato. Vengono richiamate le equazioni che governano il comportamento di mezzi bifase discretizzati tramite un reticolo di elementi finiti e si definiscono le equazioni costitutive del modello reologico. Si presentano infine i risultati ottenuti simulando numericamente l'apertura di una cavità cilindrica in un mezzo viscoplastico bifase.

## 1. Introduzione

Uno dei motivi che sovente rende il comportamento dei materiali geotecnici più complesso di quello degli altri materiali di interesse per l'ingegnere civile risiede nel fatto che i suoli e le rocce sono in genere materiali plurifase, costituiti cioè da una fase solida (scheletro), da una fase liquida ed eventualmente da una gassosa.

La soluzione dei problemi di analisi delle tensioni in cui il terreno venga considerato come materiale plurifase non è cosa semplice, soprattutto a causa della possibile disomogenea distribuzione delle fasi liquida e gassosa e per le complicazioni introdotte dalle leggi che governano il passaggio dalla fase liquida a quella gassosa, e viceversa, al variare degli sforzi e della temperatura. Fortunatamente, in molti casi di interesse pratico si può ritenere che il terreno sia saturo, ed è quindi possibile schematizzarlo come un continuo bifase costituito solamente dallo scheletro solido e dal liquido interstiziale.

Tuttavia, anche introducendo questa semplificazione, il comportamento del mezzo bifase risulta notevolmente più complesso di quello di mezzi monofase solidi, ed in genere è possibile ottenere soluzioni in forma chiusa (o mediante metodi tradizionali come quello di Ritz) solo per casi geometricamente semplici come quello della consolidazione monodimensionale. Si osserva però che, anche nel caso monodimensionale, la soluzione in forma chiusa in presenza di comportamento non lineare, o dipendente dal tempo, dello scheletro solido, di disomogeneità,

etc. diviene complessa [BURGHIGNOLI, 1979] e talvolta impossibile, a meno di non introdurre notevoli approssimazioni [OLSON e LADD, 1979].

Per la soluzione di problemi relativi a terreni bifase è quindi sovente necessario ricorrere a metodi numerici, tra i quali quello degli elementi finiti è forse il più comunemente adottato. Cause principali del successo di tale metodo sono la notevole flessibilità geometrica e la possibilità di tener conto del comportamento non lineare e dipendente dal tempo (viscoplastico) dello scheletro solido [SANDHU, 1972; ZIENKIEWICZ *et al.*, 1977] senza modificare le basi concettuali del metodo.

Nel presente articolo si discute un approccio numerico, basato sul metodo degli elementi finiti, per la soluzione di problemi di stress analysis relativi a mezzi bifase caratterizzati da comportamento viscoplastico dello scheletro solido. L'approccio, che prende spunto dai risultati ottenuti in un precedente studio [GIODA e CIVIDINI, 1979], consente di tener conto sia del comportamento non reversibile (elastoplastico) dello scheletro solido che del comportamento viscoso di tipo primario, secondario e terziario.

Nella prima parte dell'articolo si richiama brevemente la formulazione ad elementi finiti per mezzi bifase. Le equazioni che governano il problema vengono derivate sulla base del principio dei lavori virtuali, e non del principio di Galerkin comunemente adottato da altri autori. Ciò al fine di utilizzare uno strumento analitico familiare alla totalità degli Ingegneri e, quindi, di rendere più comprensibile la trattazione formale del problema.

Vengono quindi discusse le equazioni che governano il comportamento del modello reologico, ipotizzando che lo scheletro solido sia isotropo e che le deformazioni viscosse dovute alla parte volumetrica del tensore di sforzo efficace

\* Questo studio è parte di una ricerca finanziata dal C.N.R.

\*\* Dott. Ing. Annamaria CIVIDINI, tecnico laureato, Istituto di *Scienza e Tecnica delle Costruzioni*, Politecnico di Milano.

Dott. Ing. Giancarlo GIODA, assistente ordinario, incaricato di *Meccanica delle Rocce*, Politecnico di Milano.

siano trascurabili rispetto a quelle provocate dal deviatore degli sforzi.

Infine si presentano i risultati ottenuti da una semplice applicazione numerica.

Nel seguito lettere minuscole e maiuscole in corsivo rappresentano vettori colonna e matrici, rispettivamente; l'indice T indica vettori e matrici trasposte e un punto indica derivata rispetto al tempo.

## 2. Formulazione del problema bifase

In questo paragrafo vengono brevemente richiamate le equazioni che governano il comportamento di un sistema di elementi finiti di tipo congruente discretizzanti un mezzo bifase per il quale si assuma incompressibilità del fluido interstiziale e dei grani costituenti lo scheletro solido.

In base al principio degli sforzi efficaci, il vettore  $\sigma$  rappresentante lo stato di sforzo totale in un punto del mezzo bifase può essere espresso come segue:

$$\sigma(x) = \sigma'(x) + m p(x) \quad (1)$$

dove  $\sigma'$  è il vettore degli sforzi efficaci;  $p$  è la pressione del fluido interstiziale;  $m$  è un vettore i cui coefficienti sono pari ad 1, in corrispondenza degli sforzi normali, e nulli, in corrispondenza degli sforzi tangenziali;  $x$  rappresenta il vettore delle coordinate del punto.

Il legame tra sforzi efficaci e deformazioni  $\varepsilon$  è esprimibile tramite la seguente relazione

$$\sigma'(x) = D(x) \varepsilon(x) \quad (2)$$

in cui  $D$  è la matrice costitutiva che definisce il comportamento meccanico dello scheletro solido.

Le variabili libere per ogni elemento finito sono costituite dagli spostamenti nodali, raccolti nel vettore  $u$  di  $n_u$  componenti, e dalle pressioni libere, definite in  $n_p$  punti all'interno dell'elemento, raccolte nel vettore  $\pi$ . Si noti che nella maggioranza delle trattazioni le pressioni neutre libere, al pari degli spostamenti, vengono assunte come variabili nodali; questa ipotesi, però, può generare alcuni inconvenienti. Infatti, se le pressioni neutre venissero definite negli stessi nodi in cui vengono definiti gli spostamenti, l'andamento delle funzioni degli sforzi efficaci (legato dalla eq. (2) alle derivate degli spostamenti) risulterebbe di ordine inferiore a quello della funzione di pressione neutra. Tale differenza porterebbe alla formulazione di

elementi finiti inconsistenti [CHRISTIAN, 1977] che possono in alcuni casi fornire risultati affetti da sensibili errori. Onde evitare tale problema, di norma le pressioni neutre libere vengono definite in un numero di nodi inferiore a quello in cui si definiscono gli spostamenti.

In alternativa, la pressione neutra può essere vista come variabile di elemento (al pari delle deformazioni plastiche), assumendo come punti in cui vengono definite le pressioni neutre libere, ad esempio, i punti di Gauss adottati per l'integrazione approssimata della matrice di rigidità. Una discussione su questo tipo di scelta è stata presentata da CORRADI e GIODA, [1980].

Le distribuzioni delle deformazioni e della pressione neutra all'interno dell'elemento finito sono legate dalle seguenti relazioni ai vettori degli spostamenti e delle pressioni neutre libere:

$$\varepsilon(x) = B(x) u \quad (3)$$

$$p(x) = b(x)^T \pi \quad (4)$$

dove  $B$  è la matrice delle derivate delle funzioni di forma degli spostamenti e  $b$  è il vettore delle funzioni di forma della pressione neutra.

Applicando al generico elemento finito un arbitrario vettore di spostamenti nodali  $u^*$ , e la conseguente distribuzione di deformazioni  $\varepsilon^*$ , è possibile esprimere la seguente eguaglianza in base al principio dei lavori virtuali

$$u^{*T} f = \int_v \varepsilon^{*T}(x) \sigma(x) dv \quad (5)$$

Nell'eq. (5),  $v$  rappresenta il volume dell'elemento ed  $f$  il vettore delle forze nodali.

Sostituendo le eq. (1), (2), (3) e (4), e ricordando che l'eq. (5) è valida per ogni arbitrario vettore  $u^*$ , si ottiene la seguente relazione:

$$f = \int_v B(x)^T D(x) B(x) dv \cdot u + \int_v B(x)^T m b(x)^T dv \cdot \pi \quad (6a)$$

che può essere riscritta nella seguente forma compatta

$$f = S u + C \pi \quad (6b)$$

Nelle eq. (6),  $S$  rappresenta la matrice di rigidità dello scheletro solido dell'elemento finito e  $C$  è la matrice di accoppiamento tra il vettore delle pressioni neutre e quello degli spostamenti nodali.

Si noti che l'equazione matriciale (6b) è costituita da  $n_u$  equazioni scalari, ma contiene  $n_u + n_\pi$  incognite. Per la soluzione è quindi necessario aggiungere  $n_\pi$  ulteriori equazioni, che derivano da condizioni imposte sulla variazione di volume dell'elemento finito.

### 2.1. Condizioni non drenate

Se il problema è studiato in condizioni non drenate, assumendo incompressibilità del fluido interstiziale e dei grani dello scheletro, si dovrà imporre che il volume di ogni elemento finito si mantenga costante. Tale condizione equivale ad imporre che il lavoro compiuto su tutto l'elemento finito da una arbitraria variazione di pressione neutra  $p^*$  per la deformazione volumetrica reale  $\varepsilon_{vol}$  è nullo.

$$\int_v p^*(x) \varepsilon_{vol}(x) dv = 0 \quad (7a)$$

$$\varepsilon_{vol}(x) = m^T \varepsilon(x) \quad (7b)$$

Sostituendo l'eq. (7b) nella (7a), e tenendo conto delle eq. (3) e (4), si ottiene la seguente espressione

$$\pi^{*T} \int_v b(x) m^T B(x) dv \cdot u = 0 \quad (8a)$$

L'eq. (8a) è valida per ogni arbitrario vettore  $\pi^*$ , quindi può essere riscritta nella seguente forma

$$C^T u = 0 \quad (8b)$$

Accoppiando le eq. (6b) e (8b), scritte per l'intero reticolo di elementi finiti, si ottiene il sistema di equazioni lineari che definisce il comportamento del sistema di elementi finiti discretizzando il continuo bifase in condizioni non drenate:

$$\begin{bmatrix} S & C \\ C^T & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \pi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ o \end{Bmatrix} \quad (9)$$

### 2.2. Consolidazione

Dovendo tener conto del processo di consolidazione primaria del mezzo bifase, sempre assumendo incompressibilità del fluido e dei grani, si dovrà imporre che nell'unità di tempo la variazione di volume del generico elemento finito eguagli la variazione della quantità di fluido contenuta nell'elemento stesso. Tale condizione equivale ad imporre che il prodotto tra una arbitraria variazione della pressione neutra  $p^*$  (congruente con le condizioni di drenaggio al contorno) per la reale velocità di deformazione volumetrica  $\dot{\varepsilon}_{vol}$ , integrato sul volume dell'elemento, eguaglia l'integrale del prodotto tra  $p^*$  e la somma delle derivate spaziali del vettore flusso  $q$ . Omettendo per brevità la dipendenza dalle coordinate spaziali, si ha quindi

$$-\int_v p^* \dot{\varepsilon}_{vol} dv = \int_v p^* \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial i} dv \quad (i = x, y, z) \quad (10)$$

dove il vettore flusso, in base alla legge di Darcy, ha la seguente espressione

$$q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{K_x}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{K_y}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{K_z}{\gamma_w} \left[ \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma_w \right] \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Nella eq. (11),  $K_{x,y,z}$  sono i coefficienti di permeabilità nelle 3 direzioni cartesiane e  $\gamma_w$  è il peso di volume del fluido interstiziale che si assume agente in direzione  $z$ .

L'eq. (10) può essere riscritta nella seguente forma

$$-\int_v p^* \dot{\varepsilon}_{vol} dv = \int_v \sum_i \frac{\partial}{\partial i} (p^* q_i) dv - \int_v \sum_i \frac{\partial p^*}{\partial i} q_i dv \quad (i = x, y, z) \quad (12)$$

Applicando il teorema di Green al primo termine dell'eq. (12) è possibile sostituire l'integrale di volume con un integrale esteso alla superficie esterna  $s$  dell'elemento

$$\begin{aligned} & - \int_v p^* \dot{\epsilon}_{vol} dv = \\ & = \int_s p^* \sum_i q_i a_i dv - \int_v \sum_i \frac{\partial p^*}{\partial i} q_i dv \\ & \quad (i = x, y, z) \end{aligned} \quad (13)$$

Nell'eq. (13),  $a_{x,y,z}$  sono i coseni direttori della normale alla superficie  $s$ , quindi  $\sum_i q_i a_i$  rappresenta la componente del vettore flusso normale a tale superficie.

È facile mostrare che l'integrale di superficie dell'eq. (13) è nullo, quando vengano considerate particolari condizioni al contorno di drenaggio. Si assuma che la superficie  $s$  sia divisibile in una parte impermeabile  $s_i$  ed in una parte permeabile  $s_p$ , su cui la pressione neutra sia costante. La parte dell'integrale estesa ad  $s_i$  è nulla poiché è nullo il flusso nella direzione normale alla superficie impermeabile, mentre la parte estesa a  $s_p$  è nulla in quanto  $p^*$ , in virtù dell'ipotesi di congruenza con le condizioni al contorno, è nulla dove la pressione neutra ha valore costante.

L'eq. (13) è quindi riconducibile alla seguente forma

$$\begin{aligned} & - \int_v p^* \dot{\epsilon}_{vol} dv + \int_v \sum_i \frac{\partial p^*}{\partial i} q_i dv = 0 \\ & \quad (i = x, y, z) \end{aligned} \quad (14)$$

Tenendo conto dell'eq. (11), l'eq. (14) può essere così riscritta:

$$\begin{aligned} & - \int_v p^* \dot{\epsilon}_{vol} dx + \\ & \int_v \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial p^*}{\partial x} \\ \frac{\partial p^*}{\partial y} \\ \frac{\partial p^*}{\partial z} \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right\} K dv = \end{aligned}$$

$$= - \int_v K_z \frac{\partial p^*}{\partial z} dv \quad (15a)$$

dove  $K$  è la matrice delle permeabilità

$$K = \begin{bmatrix} \frac{K_x}{\gamma_w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_y}{\gamma_w} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_z}{\gamma_w} \end{bmatrix} \quad (15b)$$

Infine, sostituendo le eq. (3), (4) e (7b) nella (15a), e tenendo conto che la relazione (15a) è valida per ogni arbitraria distribuzione di pressione interstiziale, si ottiene la seguente equazione

$$\begin{aligned} & - \int_v b m^T B dv \cdot \dot{u} + \\ & \int_v \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial b}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial z} \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial b^T}{\partial x} \\ \frac{\partial b^T}{\partial y} \\ \frac{\partial b^T}{\partial z} \end{array} \right\} K dv \cdot \pi = \\ & = - \int_v K_z \frac{\partial b}{\partial z} dv \end{aligned} \quad (16a)$$

che può essere scritta nella seguente forma compatta

$$C^T \dot{u} + M \pi = f_w \quad (16b)$$

Scrivendo per l'intero reticolo di elementi finiti l'eq. (6b) derivata rispetto al tempo, e accoppiandola all'eq. (16b), si ottiene il sistema di equazioni che governa il processo di consolidazione del mezzo bifase.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} O & O \\ O & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \pi \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} S & C \\ C^T & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \dot{\pi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{f} \\ f_w \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Le eq. (9) e (17) possono essere adottate anche in presenza di comportamento elasto-plasto-viscoso dello scheletro solido. Sarà infatti sufficiente definire il vettore  $f$  delle forze nodali come segue

$$f = f^L + f^{ne} \quad (18)$$

dove  $f^L$  è il vettore dei carichi esterni e  $f^{ne}$  è il vettore delle forze nodali dovute alle distorsioni non elastiche  $\varepsilon^{ne}$ , cioè alle deformazioni plastiche e a quelle viscoso, definito dalla seguente relazione

$$f^{ne} = \int_v B^T D \varepsilon^{ne} dv \quad (19)$$

Varie procedure numeriche possono essere adottate per l'integrazione nel tempo delle eq. (9) e (17) governanti il comportamento del mezzo bifase. Tra queste, il metodo  $\beta$  di NEWMARK [1959] si mostra particolarmente conveniente in presenza di comportamento non lineare e dipendente dal tempo dello scheletro solido che, come verrà mostrato nel paragrafo successivo, sia governato da equazioni contenenti le derivate seconde rispetto al tempo degli sforzi e delle deformazioni. Le implicazioni numeriche derivanti dall'uso di tale metodo per la soluzione di problemi di viscosità e consolidazione sono state discusse da GIODA e CIVILINI [1979] e da GIODA [1981].

### 3. Comportamento viscoso

Da un esame della letteratura concernente la viscosità dei terreni argillosi, delle rocce tenere, etc. si osserva che due principali vie vengono usualmente seguite per definire le leggi che governano tale fenomeno [GHABOUSSI e GIODA, 1977].

La prima via, che conduce alla formulazione delle così dette leggi empiriche [SEMPLE *et al.*, 1973], consiste nel determinare una o più funzioni che interpolano al meglio i risultati ottenuti da una serie di prove sperimentali. Queste leggi di norma forniscono soddisfacenti risultati se applicate a situazioni simili (per quanto concerne le condizioni al contorno, la variazione dei carichi nel tempo, l'evoluzione delle deformazioni, etc.) a quelle delle prove da cui sono state derivate. D'altro canto, la loro estrapolazione a situazioni diverse da quelle delle prove sperimentali richiede l'introdu-

zione di ipotesi aggiuntive [KLEIN, 1979] che possono generare nei risultati del calcolo approssimazioni non controllabili a priori.

Una seconda procedura consiste nel definire un modello reologico, costituito da molle, smorzatori, elementi di attrito, etc., che presenti un comportamento dipendente dal tempo qualitativamente vicino a quello del materiale in esame. In questo caso solo i parametri del modello, e non la struttura della legge, vengono definiti sulla base dei risultati sperimentali e quindi la legge reologica può essere applicata a varie situazioni senza richiedere ipotesi aggiuntive. Per questa ragione le leggi reologiche appaiono più adatte di quelle empiriche per la soluzione di problemi di viscosità caratterizzati da complesse geometrie, condizioni al contorno, etc.

Un semplice modello reologico in grado di approssimare il comportamento viscoso di materiali geotecnici [GIODA, 1981] è mostrato in fig. 1. La prima parte del modello consente di cogliere il comportamento viscoso di tipo primario, mentre la seconda parte può approssimare sia i comportamenti di tipo secondario e terziario che l'effetto di dilatanza ad essi frequentemente associato.

La derivazione delle equazioni che governano il comportamento delle due parti del modello reologico (modello 1 e 2) è basata sulle seguenti ipotesi:

- 1) il mezzo geotecnico è isotropo, quindi le direzioni principali di deformazione e di sforzo coincidono ad ogni istante;
- 2) le deformazioni viscoso causate dalla parte volumetrica del tensore di sforzo efficace sono trascurabili rispetto a quelle prodotte dal deviatore degli sforzi;
- 3) i parametri del modello reologico sono funzione degli stati di deformazione viscoso e di sforzo efficace.

Come verrà mostrato in seguito, l'ultima ipotesi è necessaria per poter cogliere i comportamenti viscosi di tipo secondario e terziario.

Si indichino con  $\sigma'_{vol}$  e con  $\varepsilon_{vol}$  i vettori rappresentanti gli stati di sforzo efficace e di deformazione volumetrici in un elemento del mezzo geotecnico e si indichino con  $s$  ed  $e$  i vettori rappresentanti gli stati di sforzo e di deformazione deviatorici.

$$\sigma' = \sigma'_{vol} + s; \quad \varepsilon = \varepsilon_{vol} + e \quad (20a, b)$$

Poiché i parametri del modello reologico sono funzioni degli stati di sforzo e di deformazione (ipotesi 3), e questi a loro volta variano nel tempo, l'equazione costitutiva del modello 1 può essere scritta, tenendo conto delle ipotesi 1 e 2, nella seguente forma incrementale

$$\dot{s}(t) = \dot{e}^{cl}(t) G^{cl}(t) + e^{cl}(t) \dot{G}^{cl}(t) + \dot{e}^{c2}(t) \eta^{c2}(t) + e^{c2}(t) \dot{\eta}^{c2}(t) \quad (21)$$

Per quanto riguarda il modello 2, se la resistenza limite della componente frizionale è raggiunta o superata, la relazione costitutiva ha la seguente forma

$$\dot{s}(t) = \dot{s}_F(t) + \dot{e}^{c2}(t) \eta^{c2}(t) + e^{c2}(t) \dot{\eta}^{c2}(t) \quad (22)$$

in caso contrario

$$\dot{e}^{c2}(t) = \ddot{e}^{c2}(t) = 0 \quad (23a, b)$$

Nelle eq. (21), (22) e (23), in cui per brevità si è omessa la dipendenza delle variabili dalle coordinate spaziali, gli indici cl e c2 indicano i modelli 1 e 2, rispettivamente;  $t$  è il tempo;  $\eta$  è la viscosità;  $G$  è il modulo di deformabilità a taglio e  $\dot{s}_F$  è la derivata rispetto al tempo dello sforzo deviatorico gravante sulla componente frizionale del modello 2.

Assumendo che alle deformazioni viscosi del modello 1 non siano associati effetti di dilatanza, l'eq. (21) può risciversi come segue

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}^{cl}(t) &= \ddot{e}^{cl}(t) = \\ &= \{ \dot{s}(t) - e^{cl}(t) [G^{cl}(t) + \dot{\eta}^{cl}(t)] - e^{cl}(t) \dot{G}^{cl}(t) \} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\eta^{cl}(t)} \end{aligned} \quad (24a)$$

dove

$$\epsilon^{cl}(t) = e^{cl}(t); \dot{\epsilon}^{cl}(t) = \dot{e}^{cl}(t) \quad (24b, c)$$

Le eq. (24), che descrivono in termini incrementali il comportamento del modello 1, sono impiegabili per l'integrazione nel tempo del problema viscoso.

Al fine di ottenere per il modello 2 un'equazione costitutiva adottabile nella soluzione numerica occorre:

1) esplicitare l'espressione di  $\dot{s}_F$  che appare nell'eq. (22);

2) aggiungere alla deformazione deviatorica definita dall'eq. (22) la deformazione volumetrica prodotta dalla dilatanza dell'elemento di attrito.

È possibile mostrare [GIODA, 1981] che assumendo valido il postulato di stabilità di Drucker [DRUCKER, 1964] e assumendo il limite di rottura dell'elemento di attrito indipendente dall'evoluzione degli sforzi e delle deformazioni, l'eq. (22) è riconducibile alla seguente forma

$$\begin{aligned} \ddot{e}^{c2}(t) &= \frac{1}{\eta^{c2}(t)} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{n(t)^T \dot{\sigma}'(t)}{n(t)^T s(t)} s(t) - \dot{e}^{c2}(t) \dot{\eta}^{c2}(t) \right\} \end{aligned} \quad (25a)$$

e che la deformazione totale del modello 2 (comprendente la componente dovuta alla dilatanza) è governata dalla seguente relazione

$$\ddot{\epsilon}^{c2}(t) = \dot{\lambda}(t) \dot{n}(t) + \dot{\lambda}(t) n(t) \quad (25b)$$

dove

$$n(t) = \frac{\partial F}{\partial \sigma'_F(t)}; \dot{n}(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma'_F(t)^2} \dot{\sigma}'_F(t) \quad (25c, d)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{e}^{c2}(t)^T \dot{e}^{c2}(t)}{\dot{e}^{c2}(t)^T n(t)} \quad (25e)$$

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{\ddot{e}^{c2}(t)^T \ddot{e}^{c2}(t)}{\dot{e}^{c2}(t)^T n(t)} - \dot{\lambda}(t) \frac{\dot{e}^{c2}(t)^T \dot{n}(t)}{\dot{e}^{c2}(t)^T n(t)} \quad (25f)$$

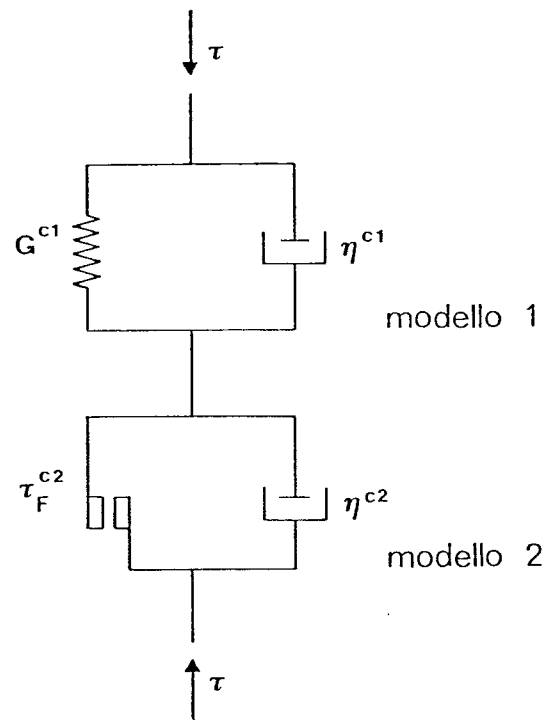


Fig. 1. - Modello reologico.

Nelle eq. (25),  $\dot{\sigma}'$  è la derivata rispetto al tempo del vettore di sforzo efficace;  $s$  è la parte deviatorica di  $\sigma'$ ;  $\sigma'_F$  è lo sforzo sopportato dalla componente frizionale del modello 2;  $F$  è la funzione rappresentante il criterio di rottura della componente frizionale;  $n$  è il vettore normale ad  $F$  nel punto  $\sigma'_F$ ;  $\dot{\lambda}$  e  $\ddot{\lambda}$  sono moltiplicatori plastici.

L'insieme delle eq. (24) e (25) descrive in modo completo il comportamento incrementale del modello reologico.

L'effetto delle deformazioni viscoplastiche  $\epsilon^{cl}$  e  $\epsilon^{c2}$  è introdotto nella soluzione del problema ad elementi finiti definendo il vettore delle distorsioni non elastiche  $\epsilon^{ne}$  (cfr. eq. 19) come segue

$$\epsilon^{ne} = \epsilon^{cl} + \epsilon^{c2} \quad (26)$$

Per quanto concerne la variazione dei parametri del modello reologico, in questa sede non si intende proporre delle leggi che rappresentino il comportamento quantitativo di uno specifico mezzo geotecnico, bensì si vuole mostrare che sulla base di leggi relativamente semplici è possibile approssimare, almeno da un punto di vista qualitativo, i comportamenti viscosi di tipo primario, secondario e terziario riscontrabili in molti suoli e rocce.

A tale scopo, una ragionevole approssimazione della viscosità primaria può essere ottenuta anche assumendo costanti i parametri  $G^{cl}$  e  $\eta^{cl}$  del modello 1. Al contrario, è necessario specificare una legge di variazione della viscosità  $\eta^{c2}$  del secondo modello per approssimare i comportamenti viscosi di tipo secondario e terziario [GIODA, 1981].

Il valore di  $\eta^{c2}$  è da specificarsi solamente quando la resistenza della componente frizionale è raggiunta o superata, cioè quando  $F \geq 0$ . In tal caso,  $\eta^{c2}$  può essere definita come il prodotto di un coefficiente di viscosità  $\eta^*$ , il cui valore diminuisce all'aumentare degli sforzi di taglio, e di un coefficiente adimensionale  $c_\eta$ , il cui valore diminuisce al crescere delle deformazioni deviatoriche di tipo viscoso. I coefficienti  $\eta^*$  e  $c_\eta$  rappresentano, rispettivamente l'influenza della viscosità secondaria e terziaria.

$$\eta^{c2}(t) = \eta^*(t) \cdot c_\eta(t) \quad (27)$$

Assumendo una relazione lineare tra il logaritmo del coefficiente  $\eta^*$  e l'invariante secondo  $J_v$  dello sforzo deviatorico eccedente la resistenza della componente frizionale (cfr. fig. 2a), può essere scritta la seguente relazione

$$\eta^*(t) = \eta^0 / \exp(A \sqrt{J_v}(t)) \quad (28)$$

dove  $\eta^0$  ed  $A$  sono coefficienti caratteristici del materiale.

Il coefficiente  $c_\eta$  dipende dal valore dell'invariante secondo  $L$  della deformazione deviatorica  $e^{c2}$  del modello 2, cioè da una misura delle deformazioni dovute alla viscosità primaria e secondaria.

Si definisca un valore limite  $L_1$  di  $L$  come segue (cfr. fig. 2b)

$$L_1(t) = B J_F(t) / J_v(t) \quad (29)$$

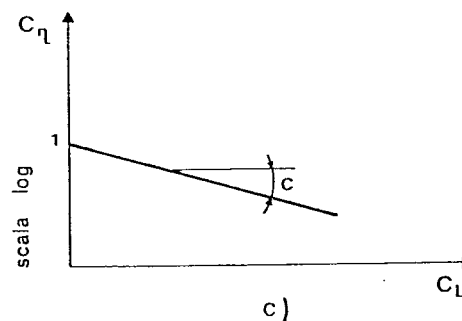
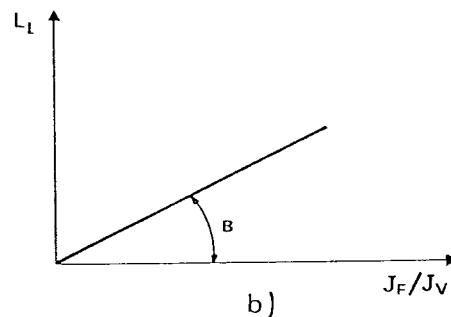
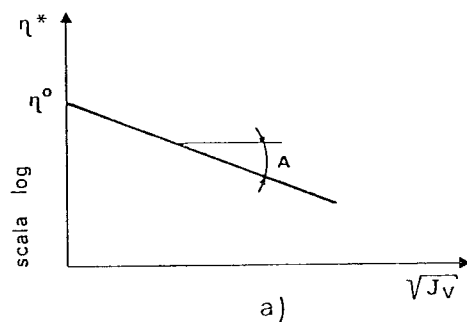


Fig. 2. - Rappresentazione qualitativa delle relazioni adottate nel calcolo della viscosità  $\eta^{c2}$  del modello 2.

dove  $J_F$  è l'invariante secondo dello sforzo gravante sulla componente frizionale e  $B$  è un coefficiente caratteristico del materiale.

Se  $L$  è minore o uguale ad  $L_1$ , si assume  $c_n = 1$ . In caso contrario, i vettori di sforzo deviatorico  $e_1^{c2}$ , associato ad  $L_1$ , e  $e_v^{c2}$ , eccedente  $e_1^{c2}$ , vengono definiti tramite le seguenti equazioni

$$e_1^{c2}(t) = e^{c2}(t) \sqrt{(L_1(t)/L(t))} \quad (30)$$

$$e_v^{c2}(t) = e^{c2}(t) - e_1^{c2}(t) \quad (31)$$

Si definisce quindi il coefficiente  $c_L$ , indice della deformazione deviatorica del modello 2 eccedente la deformazione limite  $e_1^{c2}$ , come radice quadrata del rapporto tra l'invariante secondo  $L_v$  del vettore  $e_v^{c2}$  e  $L_1$ .

$$c_L(t) = \sqrt{(L_v(t)/L_1(t))} \quad (32)$$

Assumendo una relazione lineare tra il logaritmo del coefficiente  $c_n$  ed il coefficiente  $c_L$  (cfr. fig. 2c), è possibile ottenere  $c_n$  tramite la seguente relazione

$$c_n(t) = 1/\exp(C \cdot c_L(t)) \quad (33)$$

dove  $C$  è un parametro caratteristico del materiale.

Introducendo il coefficiente  $c_n$  così calcolato nell'eq. (27), e tenendo conto dell'eq. (28), è possibile ottenere ad ogni istante il coefficiente  $\eta^{c2}$  in funzione degli stati di deformazione viscosa e di sforzo.

Per verificare che il modello reologico qui descritto sia in grado di approssimare i comportamenti viscosi di tipo primario, secondario e terziario tipici di molti suoli e rocce, si è eseguita la simulazione numerica di una serie di prove di compressione triassiale sotto carico costante nel tempo.

Nei calcoli, i cui risultati sono riportati in fig. 3a e 3b, si è considerato un ipotetico materiale caratterizzato dai seguenti parametri del modello reologico

$$G^{c1} = 20 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\eta^{c1} = 50 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2 \cdot \text{ora}$$

$$\eta^o = 700 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2 \cdot \text{ora}$$

$$A = 0.1 \text{ [kg/cm}^2\text{]}^{-1}; B = 4 \cdot 10^{-6}, C = 2.0$$

Per la parte frizionale del modello 2 si è adottato il criterio di rottura di Drucker-Prager [DRUCKER, PRAGER, 1952] definito dalla seguente equazione

$$F = \alpha I + J^{1/2} - k \quad (34)$$

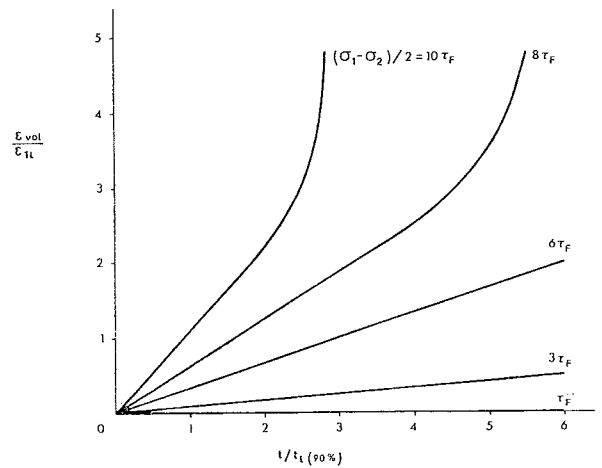
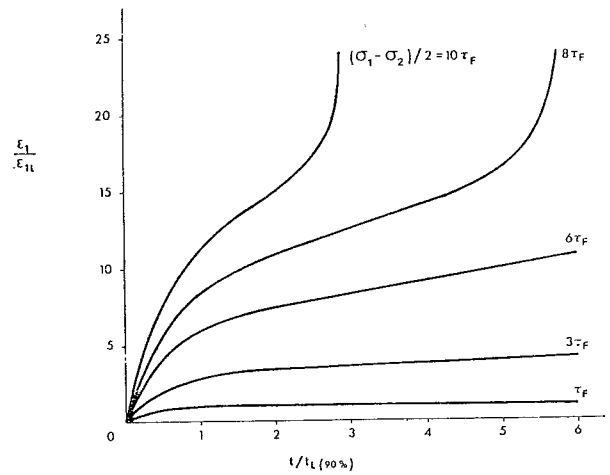


Fig. 3. - Simulazione numerica di prove triassiali con diversi stati di sforzo costanti nel tempo. a) curve deformazione assiale-tempo; b) curve deformazione volumetrica-tempo.

dove  $I$  è l'invariante primo dello stato di sforzo efficace e  $J$  è l'invariante secondo del deviatore degli sforzi. Per i coefficienti  $\alpha$  e  $k$  si sono assunti i seguenti valori:

$$\alpha = 0.07; k = 1.0 \text{ kg/cm}^2$$

Nelle figg. 3a e 3b sono mostrati, rispettivamente, gli andamenti della deformazione verticale  $\epsilon_1$  e della deformazione volumetrica nel tempo, per diversi valori del massimo sforzo di taglio  $\tau$  presente nel campione. In queste figure,  $\tau_F$  rappresenta il massimo sforzo di taglio sopportabile senza attivare la componente frizionale del modello reologico;  $\epsilon_{11}$  è la massima deformazione verticale raggiunta dal campione quando  $\tau = \tau_F$  e  $t_1(90\%)$  è il tempo necessario a raggiungere il 90% di  $\epsilon_{11}$  quando  $\tau = \tau_F$ .

I diagrammi della fig. 3 mostrano che per bassi valori dello sforzo di taglio il campione è soggetto solo a deformazioni viscosi di tipo



primario, non accompagnate da dilatanza. Al crescere dello sforzo di taglio massimo si manifestano deformazioni viscosse di tipo secondario, e quindi di tipo terziario, entrambe accompagnate da dilatanza. Si nota che la velocità di deformazione volumetrica associata al comportamento secondario è costante, mentre quella associata al comportamento terziario cresce nel tempo.

#### 4. Applicazione numerica

Per mettere in luce l'influenza della fase liquida sul comportamento di materiali bifase viscoplastici si è simulata l'apertura di una cavità cilindrica in un mezzo illimitato inizialmente soggetto ad uno stato di sforzo efficace uniforme. Sono state considerate le due situazioni estreme di permeabilità infinita (caso drenato) e di drenaggio impedito (caso non drenato).

Il problema è stato trattato assumendo condizioni di deformazione piana, nel piano normale all'asse della cavità, ed assialsimmetriche rispetto all'asse della cavità. Tali ipotesi rendono il problema monodimensionale per quanto riguarda gli spostamenti, infatti l'unica componente non nulla è quella nella direzione radiale  $r$ . Il campo di sforzo è definito completamente dalle componenti di sforzo normale in direzione radiale,  $\sigma_r$ , circonferenziale,  $\sigma_\theta$ , e parallela all'asse della cavità,  $\sigma_z$ ; mentre le uniche deformazioni non nulle sono quelle radiale,  $\epsilon_r$ , e circonferenziale,  $\epsilon_\theta$ .

La coordinata radiale è stata discretizzata tramite 47 elementi finiti monodimensionali a due nodi, all'interno dei quali si è assunta variazione lineare dello spostamento radiale e stato di deformazione costante. In ogni elemento la pressione neutra è costante, pari al valore calcolato nel centroide dell'elemento. Il rapporto tra lo spessore della zona discretizzata ed il raggio  $R$  della cavità è 4.7.

Sul contorno esterno del reticolo di elementi finiti è stata simulata una molla avente rigidità equivalente a quella del mezzo non discretizzato. Come conseguenza, nel calcolo viene tenuto conto il comportamento elastico del mezzo circostante la zona discretizzata, ma non il suo comportamento viscoso. Tuttavia tale approssimazione ha scarsa influenza sui risultati delle analisi a causa del considerevole spessore del reticolo di elementi finiti adottato.

Il comportamento viscoso del mezzo circostante la cavità è definito dai valori dei para-

metri indicati nel paragrafo 3, mentre il comportamento elastico è governato dai seguenti valori del modulo di elasticità  $E$  e del coefficiente di Poisson  $\nu$ .

$$E = 100 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2; \nu = 0.25$$

Sia per l'analisi drenata che per quella non drenata lo stato di sforzo iniziale è definito da una distribuzione uniforme di sforzi efficaci  $\sigma'_o = \sigma'_r = \sigma'_\theta = \sigma'_z = 40 \text{ kg/cm}^2$  e da una pressione normale pari a  $\sigma'_o$  applicata alla parete della cavità.

L'apertura della cavità è stata simulata riducendo, con velocità costante, la pressione sulla parete sino ad annullarla. Il tempo impiegato in tale operazione (tempo di scavo) è  $t_0 = 4$  ore. Dopo il completamento dell'apertura entrambe le analisi sono state proseguite sino a raggiungere  $t = 4t_0$ .

I risultati delle due analisi sono riassunti nei diagrammi delle figure 4-10. In fig. 4 l'evoluzio-

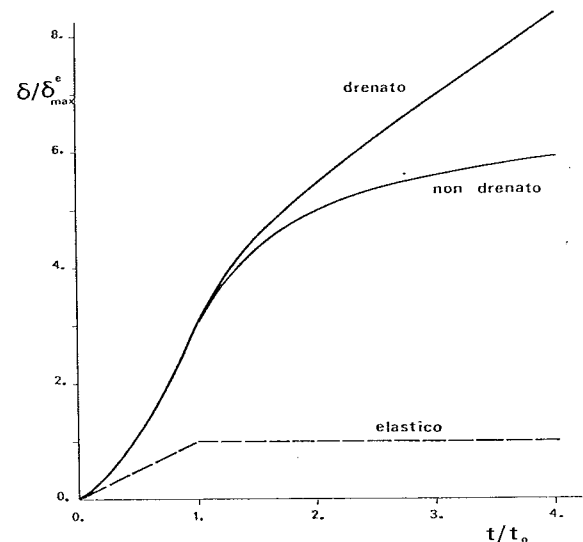


Fig. 4. - Andamento dello spostamento  $\delta$  della parete della cavità nel tempo, per i casi drenato, non drenato ed elastico lineare ( $\delta_{\max}^e =$  massimo spostamento elastico;  $t_0 =$  tempo di apertura della cavità).

ne degli spostamenti  $\delta$  della parete della cavità ottenuti dalle analisi viscoplastiche (curve a tratto pieno) viene paragonata con quella ottenuta dal calcolo elastico lineare (curva tratteggiata). Al fine di presentare i risultati in forma adimensionale, lo spostamento  $\delta$  è diviso per il massimo spostamento  $\delta_{\max}^e$  ottenuto dal calcolo elastico ed il tempo  $t$  è diviso per il tempo di scavo  $t_0$ .

Si osserva che durante la fase di scavo la differenza tra gli spostamenti dei casi drenato e

non drenato è trascurabile. Questo è dovuto al fatto che per bassi valori degli sforzi di taglio si hanno essenzialmente deformazioni viscosi di tipo primario non accompagnate da effetti di dilatanza e quindi la differenza tra comportamento monofase e bifase non drenato non viene evidenziata. Successivamente, si manifestano deformazioni viscosi di tipo secondario e terziario accompagnate da dilatanza. Tale effetto può liberamente svilupparsi nel caso drenato, con conseguente rapido aumento degli spostamenti. In condizioni non drenate, invece, l'aumento di volume è impedito e come conseguenza lo spostamento cresce meno rapidamente e tende a stabilizzarsi.

In fig. 5 è mostrato, a diversi tempi, l'andamento della funzione di plasticità  $F$  nella zona

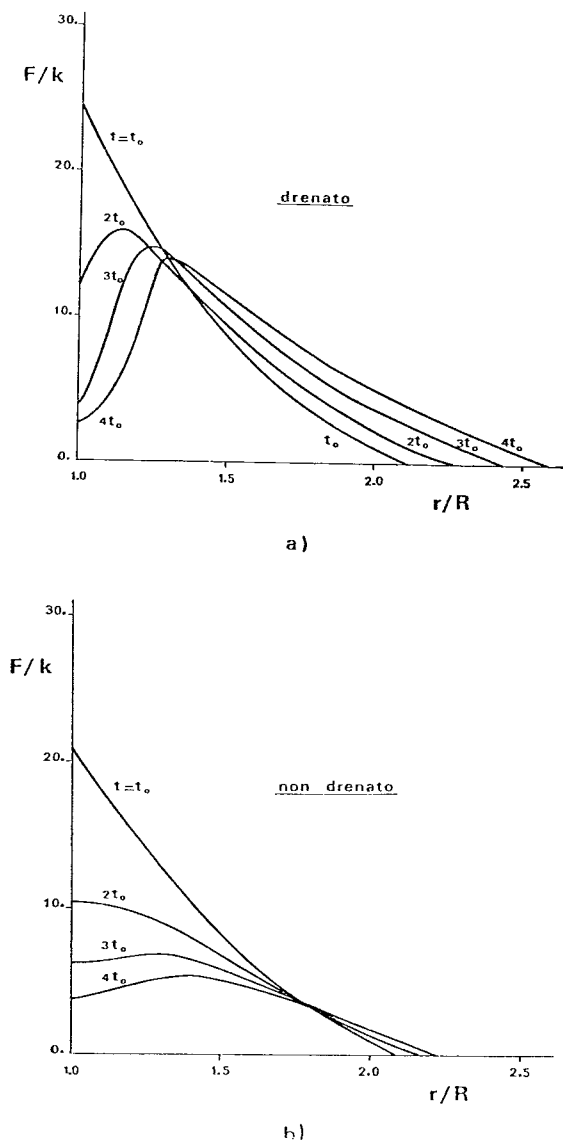


Fig. 5. - Andamento del rapporto tra funzione di plasticità  $F$  e coefficiente  $k$  lungo la coordinata radiale  $r$  a diversi tempi. a) caso drenato; b) caso non drenato. ( $R$  = raggio della cavità;  $t_0$  = tempo di apertura della cavità).

in cui la componente frizionale del modello 2 è attivata, cioè nella zona in cui  $F \geq 0$ . L'evoluzione delle distribuzioni di sforzo lungo la coordinata radiale è riportata nelle figg. 6 e 7, mentre l'evoluzione delle deformazioni è presentata nelle figg. 8 e 9.

Dall'esame di questi diagrammi si nota che nel caso drenato il picco di sforzo provocato dall'apertura della cavità in corrispondenza della parete della cavità stessa tende a ridursi leggermente nel tempo spostandosi lungo la coordinata radiale (cfr. figg. 5a e 6). Contemporaneamente si ha una sensibile estensione

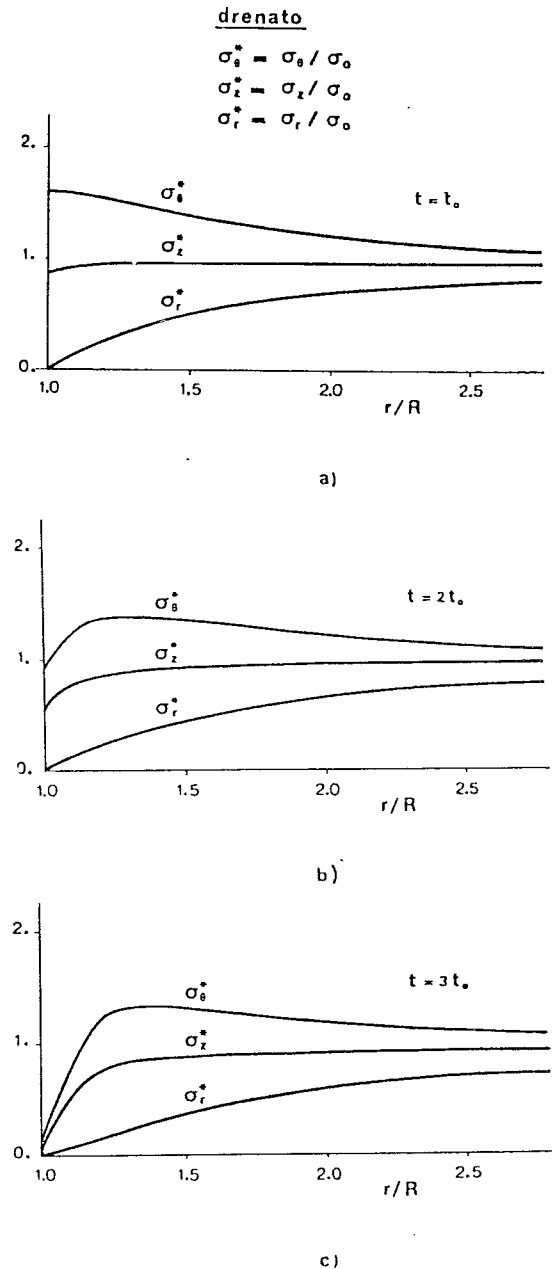


Fig. 6. - Evoluzione nel tempo degli sforzi nel mezzo circostante la cavità per il caso drenato. ( $\sigma_0$  = sforzo isotropo preesistente all'apertura della cavità; restante notazione come in fig. 5).

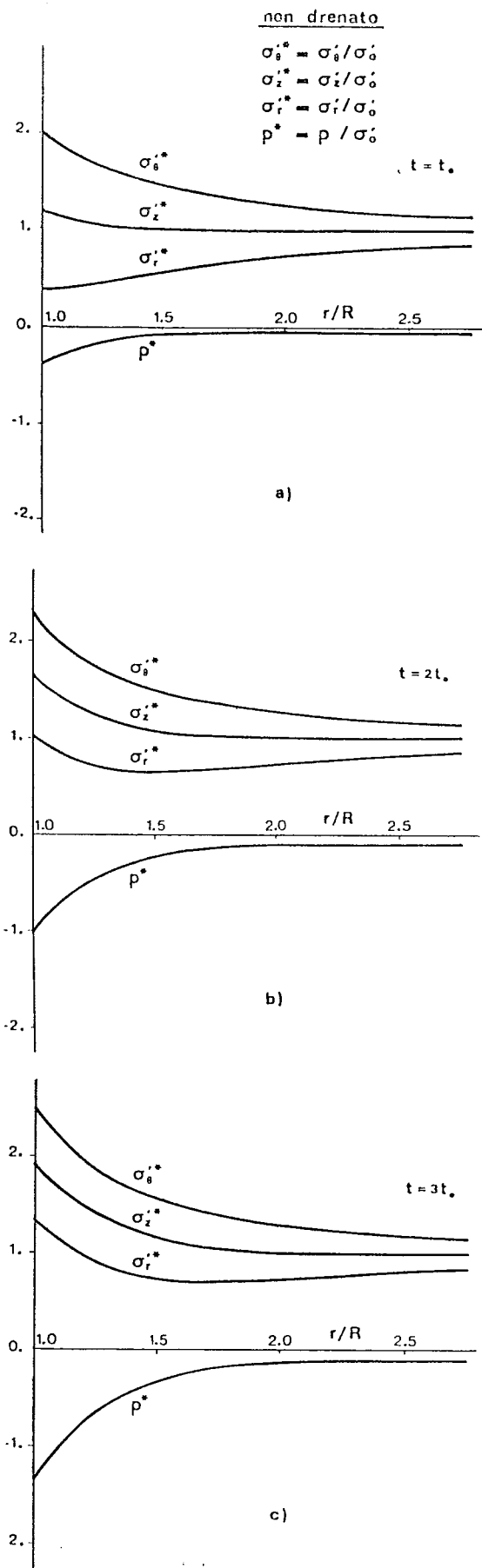


Fig. 7. - Evoluzione nel tempo degli sforzi efficaci e della sovrappressione neutra  $p$  nel mezzo circostante la cavità per il caso non drenato. (Notazione come in fig. 6).

della zona plastica, che produce il rapido incremento dello spostamento mostrato in fig. 4. Si nota anche che (fig. 8) la deformazione radiale ha modulo maggiore di quello della deformazione circonferenziale, e che la differenza aumenta nel tempo. Tale effetto è provocato dalla dilatanza associata alla viscosità secondaria e terziaria.

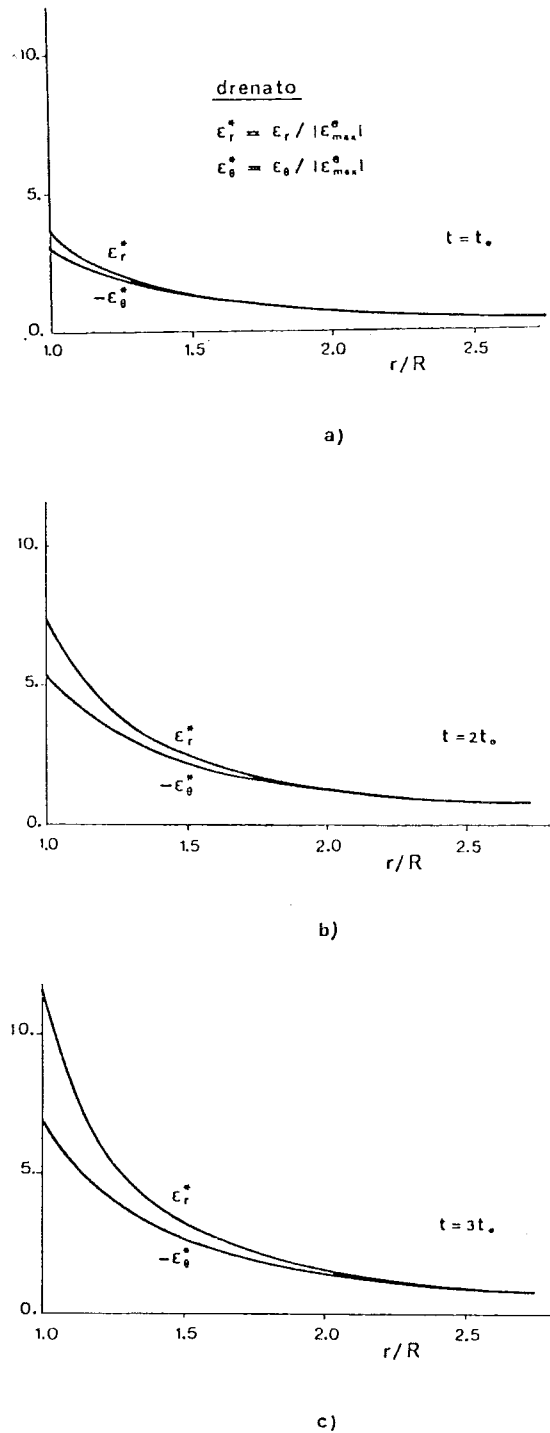


Fig. 8. - Evoluzione nel tempo delle deformazioni nel mezzo circostante la cavità per il caso drenato. ( $|\epsilon_{max}^e|$  = modulo della massima deformazione per il caso elastico; restante notazione come in fig. 5).

Per il caso non drenato si ottiene un comportamento sensibilmente diverso da quello del caso drenato. Il picco nel diagramma della funzione  $F$  (fig. 5b) decresce rapidamente nel tempo; in aggiunta, l'espansione della zona plastica è modesta e si arresta poco dopo l'apertura della cavità. La riduzione del picco della funzione  $F$  è legata all'evoluzione degli sforzi riportata in fig. 7. Infatti, benché il valore delle componenti di sforzo efficace tenda a crescere, la loro differenza si riduce nel tempo. Contemporaneamente, assumendo che non si sviluppino fenomeni di cavitazione, si ha un sensibile incremento (negativo) della pressione neutra  $p$ . Tali effetti sono causati dall'impedito aumento di volume, derivante dall'ipotesi di condizioni non drenate, in presenza di comportamento dilatante dello scheletro solido. L'assenza di variazione di volume è evidenziata anche dai diagrammi di fig. 9, da cui si nota che la somma delle deformazioni radiale e circonferenziale è nulla ad ogni istante in ogni punto del mezzo circostante l'apertura.

Si può quindi osservare che nel caso drenato la rapida espansione della zona plastica, ed il conseguente aumento degli spostamenti, porta verso una situazione di instabilità dell'apertura che è invece evitata nel caso non drenato.

Infine, la variazione della viscosità  $\eta^{c2}$  del modello 2 nel tempo è mostrata nei diagrammi di fig. 10, che si riferiscono a punti situati a diversa distanza dalla parete della cavità. Si nota che la diminuzione di  $\eta^{c2}$  è più accentuata nel caso drenato che in quello non drenato e che, ovviamente, è maggiore in prossimità della cavità dove gli sforzi e le deformazioni deviatoriche hanno maggior valore.

Nei diagrammi di fig. 10, il tratto iniziale orizzontale corrisponde a situazioni in cui il limite di resistenza della componente frizionale non è ancora stato raggiunto; in tale tratto  $\eta^{c2}$  ha valore pari ad  $\eta^0$  (cfr. eq. 28).

## 5. Conclusioni

È stato discusso l'impiego del metodo degli elementi finiti per la soluzione di problemi di stress analysis riguardanti mezzi geotecnici bifase caratterizzati da comportamento viscoplastico dello scheletro solido.

Dopo aver brevemente richiamato le equazioni governanti il comportamento del mezzo bifase discretizzato in elementi finiti, si sono derivate le equazioni costitutive di un modello reologico non lineare in grado di approssimare

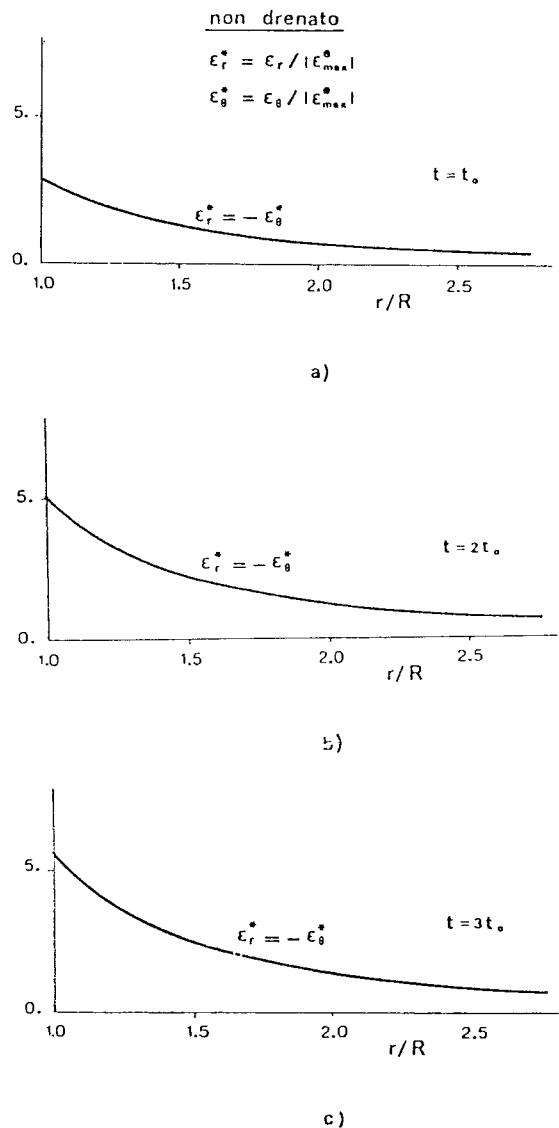


Fig. 9. - Evoluzione nel tempo delle deformazioni nel mezzo circostante la cavità per il caso non drenato. (Notazione come in fig. 8).

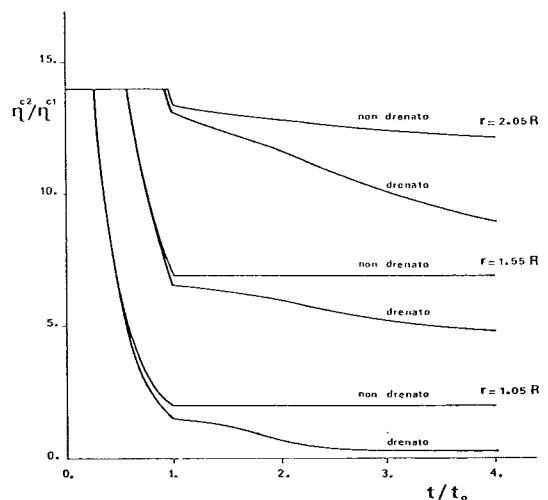


Fig. 10. - Andamento del rapporto tra le viscosità  $\eta^{c2}$  ed  $\eta^{c1}$  nel tempo, per i casi drenato e non drenato. (Notazione come in fig. 5).

sia la viscosità primaria, che quelle secondaria e terziaria tipiche di molti suoli e rocce.

Per evidenziare l'influenza del comportamento bifase in presenza di legame sforzi efficaci-deformazioni-tempo di tipo viscoplastico, si è simulata numericamente l'apertura di una cavità cilindrica in un mezzo illimitato soggetto ad uno stato di sforzo iniziale uniforme. Sono stati considerati due casi estremi: caso di permeabilità infinita (caso drenato) e caso non drenato.

I risultati delle analisi mostrano che per bassi valori degli sforzi, e quindi in presenza di comportamento viscoso essenzialmente di tipo primario, il comportamento del mezzo monofase (caso drenato) non si discosta eccessivamente da quelle del mezzo bifase non drenato. Al crescere degli sforzi e delle deformazioni si manifesta la viscosità di tipo secondario e terziario accompagnata da dilatanza. Tale effetto può liberamente manifestarsi nel caso drenato, con conseguente sviluppo della zona plastica e con sensibile incremento degli spostamenti. Al contrario, nel caso non drenato la variazione di volume è impedita e quindi si osserva una notevole diminuzione della sovrappressione neutra. Il vincolo imposto sulla variazione di volume agisce come un vincolo statico distribuito sull'intero mezzo geotecnico. Come conseguenza la zona plastica si espande meno che nel caso drenato e gli spostamenti tendono a stabilizzarsi rapidamente.

#### BIBLIOGRAFIA

- BURGHIGNOLI A. (1979) - *Consolidazione monodirezionale e creep delle argille*. Rivista Italiana di Geotecnica, AGI, Anno XIII, N. 3, pp. 204-213.
- CHRISTIAN J. T. (1977) - *Two and three dimensional consolidation*. In « Numerical methods in geotechnical engineering » (C.S. Desai and J. T. Christian editors), Mc Graw Hill, New York, pp. 399-426.
- CORRADI L., GIODA G. (1980) - *On the finite element modeling of elastic-plastic behaviour with reference to geotechnical problems*. Proc. 1st Int. Conf. Numer. Methods in Non-linear Problems, Swansea.
- DRUCKER D. C. (1964) - *On the postulate of stability of materials in mechanics of continua*. J. Mécanique, Vol. 3, pp. 235-249.
- DRUCKER D. C., PRAGER W. (1952) - *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*. Quarterly of Appl. Mathematics, Vol. 10, pp. 157-165.
- GHABOUSSI J., GIODA G. (1977) - *On the time-dependent effects in advancing tunnels*. Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 1, pp. 249-269.

- GIODA G., CIVIDINI A. (1979) - *A numerical study of non linear consolidation taking into account creep effects*. Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Methods Geomech., Aachen, pp. 149-167.
- GIODA G. (1981) - *A finite element solution of non-linear creep problems in rocks*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 18, pp. 35-46.
- KLEIN J. (1979) - *The application of finite elements to creep problems in ground freezing*. Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Methods Geomech., Aachen, pp. 493-502.
- NEWMARK N. M. (1959) - *A method for computation for structural dynamics*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 85, EM3, pp. 67-94.
- OLSON R. E., LADD C. C. (1979) - *One-dimensional consolidation problems*. J. Geotech. Eng. Div., ASCE, Vol. 105, GT1, pp. 11-30.
- SANDHU R. S. (1972) - *Finite element analysis of consolidation and creep*. Symp. Appl. Finite Elem. Meth. Geotech. Eng., Vicksburg, pp. 697-739.
- SEMPLE R. M., HENDRON A. J., MESRI G. (1973) - *The effects of time-dependent properties of altered rock on tunnel support requirements*. Report UILU-ENG-73-2023, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- ZIENKIEWICZ O. C., HUMPHESON C., LEWIS R. L. (1977) - *A unified approach to soil mechanics problems (including plasticity and viscoplasticity)*. In « Finite Element in Geomechanics » (G. Gudehus editor), J. Wiley & Sons, London, pp. 151-178.

#### SUMMARY

##### Viscoplastic behaviour of two-phase media

The use of the finite element method is discussed, with reference to stress analysis problems involving two-phase media characterized by viscoplastic behaviour of the solid phase. The equations governing the two-phase medium behaviour are recalled considering undrained cases (eq. 9) and consolidation processes (eq. 17). In order to approximate the time dependent behaviour of the soil skeleton, a deviatoric visco-plastic rheological model is adopted (fig. 1) whose viscosity  $\eta^2$  is function of the stress and strain levels. The model allows one to take into account, in addition to primary creep, secondary and tertiary viscous behaviours, and the associated dilatancy effects frequently observed in geotechnical media. The constitutive equations of the creep model are derived (eqs. 24 and 25) and a simple law is proposed (eqs. 27-33; fig. 2) for the variation of  $\eta^2$  with stresses and strains.

As an application, the excavation of a cylindrical hole in a medium initially subjected to a uniform stress distribution is simulated numerically. Both drained and undrained cases are considered. The results of analyses, summarized in figs. 4-10, emphasize the difference between one-phase (drained) and two-phase (undrained) cases in the presence of visco-plastic behaviour of the solid phase. It is observed that, for the drained case, after the excavation completion an unstable situation is approached because of the rapid spreading of the plastic zone and the related increase of displacements (cfr. figs. 4 and 5). On the contrary, the constraint on the volume change introduced in the undrained analysis reduces the size of the plastic zone and a stable situation is reached shortly after the end of excavation.