Effetti della viscosità del conglomerato in travi di fondazione in c.a. su mezzo elastico

G. F. GATTI, I. IORI *

SOMMARIO: Nella presente nota viene studiato l'effetto della viscosità in travi di fondazione di calcestruzzo poggianti su mezzo elastico; precisamente su semispazio elastico e su strato elastico di spessore limitato
Il problema viene affrontato con il metodo delle differenze finite, risolvendo per iterazione il sistema algebrico lineare ottenuto.
In particolare si è studiato il caso di travi di diversa rigidità relativa, su semispazio elastico, soggette ad un forza concentrata.
I risultati, adimensionalizzati onde consentire un generale utilizzo, sono riportati in grafici di agevole impiego.
Si è infine considerata l'influenza dello spessore del mezzo elastico sottostante la trave. I calcoli sono stati svolti secondo ipotesi semplificative utilizzando la soluzione del semispazio elastico. I risultati ottenuti sono comparabili almeno per valori non trascurabili dello spessore deformabile, con quelli derivati dalla trattazione di strato elastico su base rigida.

1. Premessa

Nella valutazione dei fenomeni di interazione trave di fondazione-terreno esplica un ruolo non trascurabile la viscosità del conglomerato della trave [CHAMECKI, 1978; KROLL, 1971; CESTELLI GUIDI, 1980].

Lo studio di tali effetti viscosi può essere condotto trattando il materiale come elastico con modulo opportunamente « modificato »; oppure, meglio, considerando il materiale come elasto-viscoso definito mediante un modello reologico che ne descriva il comportamento differito nel tempo [GATTI, IORI, 1980].

Peraltro, se da un lato non è trascurabile la viscosità del conglomerato, dall'altro è determinante la modalità con cui viene schematizzato il terreno: nella nota presente, il terreno viene assimilato ad un mezzo elastico indefinito (alla Boussinesq) con viscosità trascurabile (1).

Per il conglomerato della trave di fondazione, considerato come elasto-viscoso, si è ritenuta applicabile la teoria lineare e quindi la sovrapponibilità degli effetti. I carichi applicati, supposti noti, siano costanti nel tempo o, se variabili, tali da non produrre effetti dinamici.

2. Soluzione del problema

Si consideri una trave continua lunga L soggetta ad m carichi concentrati noti $P_j = P_j(x_j, t)$, $(j = 1, ..., m)$, variabili nel tempo come sopra detto.

La trave, costituita da conglomerato definito da un unico nucleo viscoso $\Phi(t, \tau)$, abbia asse rettilineo e sezione costante con rigidità flessionale EJ.

Con riferimento ad un sistema di assi x, y (fig. 1), l'equazione della deformata y (x, t) al

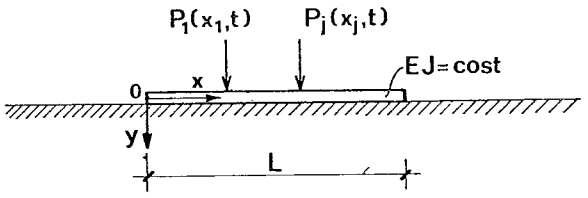

Fig. 1. - Schema statico della trave considerata.

tempo t si scrive con le usuali convenzioni di segno e col significato usuale dei simboli:

$$-EJ\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = M(x,t) + \int_{t_o}^{t} M(x,\tau)\,\Phi(t,\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

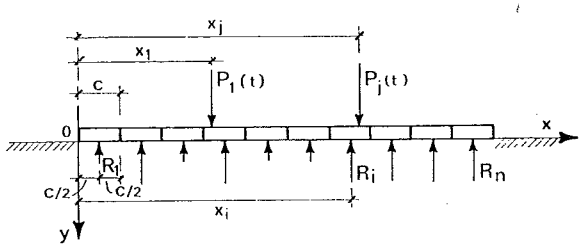

Fig. 2. - Schematizzazione della trave per la soluzione alle differenze finite.

* Prof. Ing. Gianfelice GATTI, Professore Straordinario di *Meccanica delle terre e fondazioni* presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Cagliari.

Dott. Ing. Ivo IORI, Tecnico laureato di ruolo presso l'Istituto di *Scienza e Tecnica delle Costruzioni* del Politecnico di Milano.

(1) In maniera approssimata, si è anche indagato sulla influenza della limitazione di tale semispazio elastico prodotta da un piano rigido.

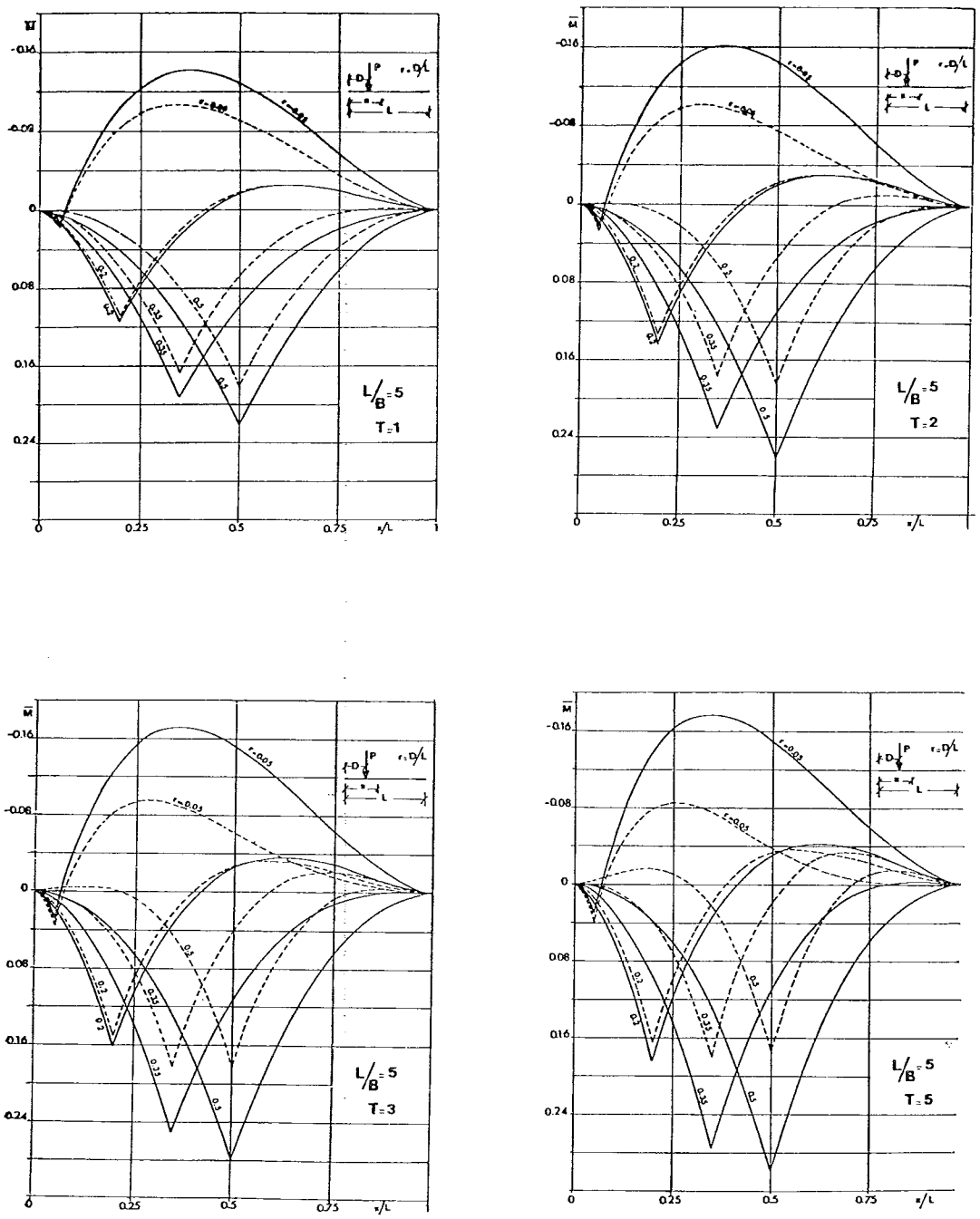

Fig. 3. - Diagrammi dei momenti in fase elastica ed elasto-viscosa per L/B=5 e T=1, 2, 3, 5.

essendo M (x, t) il momento flettente prodotto dai carichi applicati e dalla reazione del mezzo elastico, t il tempo di applicazione dei carichi stessi.

Schematizzando il comportamento viscoso del conglomerato secondo il modello di invecchiamento, ossia $\Phi(t, \tau) = \Phi(\tau)$ (2), derivando rispetto al tempo t risulta:

$$-EJ\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^2\,\partial t} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial t} + M(x,t)\,\Phi(t). \qquad (2)$$

(2) Ad esempio: $\Phi(\tau) = \varphi_{\infty}\,\beta\,e^{-\beta(\tau - t_0)}$ essendo φ_{∞} e β parametri di noto significato [MIGLIACCI, 1971].

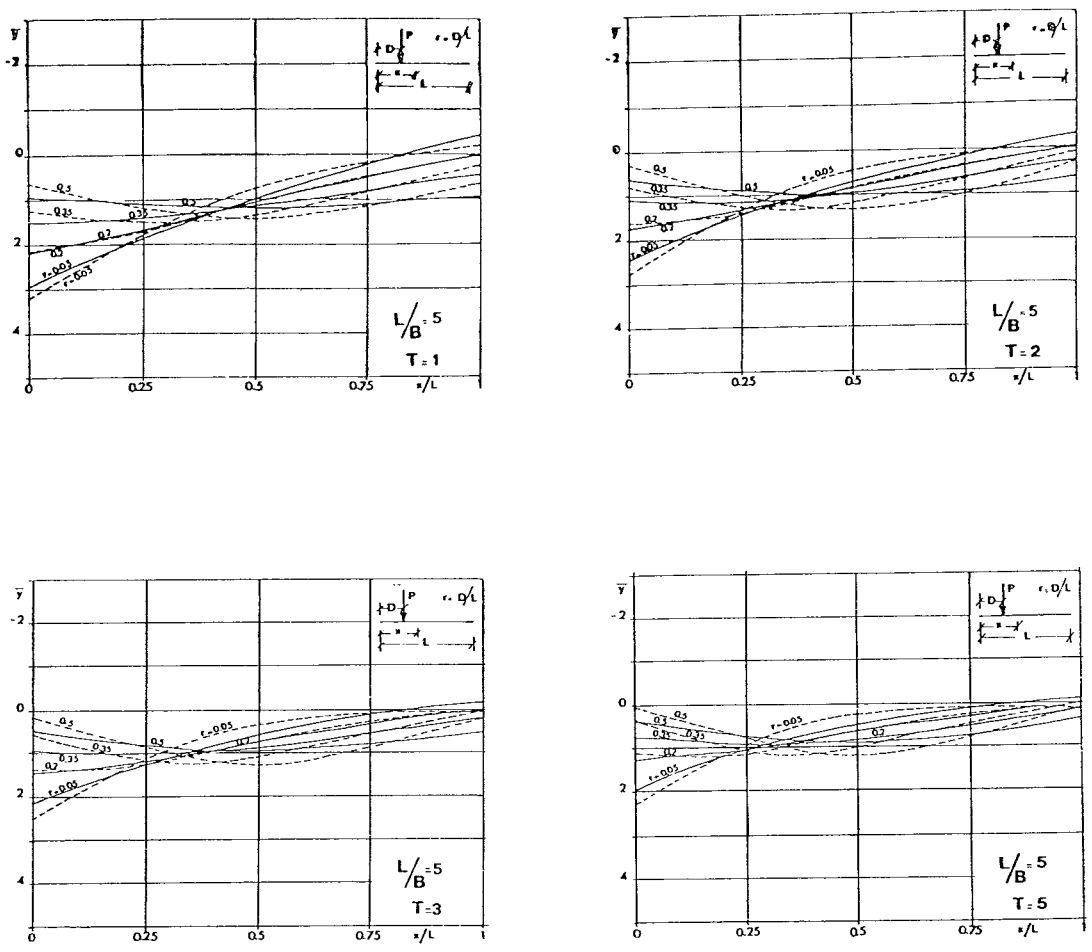

Fig. 4. - Diagrammi degli spostamenti verticali in fase elastica ed elasto-viscosa per L/B=5 e T=1, 2, 3, 5.

Discretizzando la trave in un numero n di conci di uguale lunghezza c (fig. 2), si ottiene la soluzione col procedimento delle differenze finite.

Per valori di c sufficientemente piccoli, la reazione del terreno può essere supposta uniformemente distribuita sulla lunghezza c con risultante R_i nel baricentro del singolo concio. Allora alla (2) sostituiamo la [3]:

$$-\frac{\partial y_{i-1}}{\partial t} + 2\frac{\partial y_i}{\partial t} - \frac{\partial y_{i+1}}{\partial t} = \frac{c^2}{EJ}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\sum_{s=1}^{i} R_s\,(s-1)\;c - \frac{\partial}{\partial t}\sum_{r=1}^{j} P_r\,(x_i - x_r) + \right.$$

$$\left. \left(\sum_{s=1}^{i} R_s\,(s-1)\,c + \sum_{r=1}^{j}(x_i - x_r)\right)\Phi\,(t)\right],$$

$$(i = 2, \ldots n = 1) \qquad (3)$$

Operando anche per riguardo al tempo con le differenze finite, dalla (3) si ottiene:

$$-\,y_{i-1}\,(t+\Delta t) + y_{i-1}\,(t) + 2y_i\,(t+\Delta t) +$$

$$-\,2y_i\,(t) - y_{i+1}\,(t+\Delta t) + y_{i+1}\,(t) =$$

$$= \frac{c^2}{EJ}\left[\sum_{s=1}^{j}\left(R_s\,(t+\Delta t) - R_s\,(t)\right)(s-1)\,c + \right.$$

$$\left. -\sum_{r=1}^{j}\left(Q_r\,(t+\Delta t) - Q_r\,(t)\right)(x_i - x_r)\right] +$$

$$+\left[\sum_{s=1}^{i} R_s\,(t)\,(s-1)\,c + \sum_{r=1}^{j} Q_r\,(t)\,(x_i - x_r)\right]$$

$$\Phi\,(t)\,\Delta t,\ (i = 2, \ldots, n-1). \qquad (3')$$

[3] Nella sommatoria contenente le P_r, di queste vanno considerate solo quelle alla sinistra di x_i ossia aventi $x_2 < x_i$.

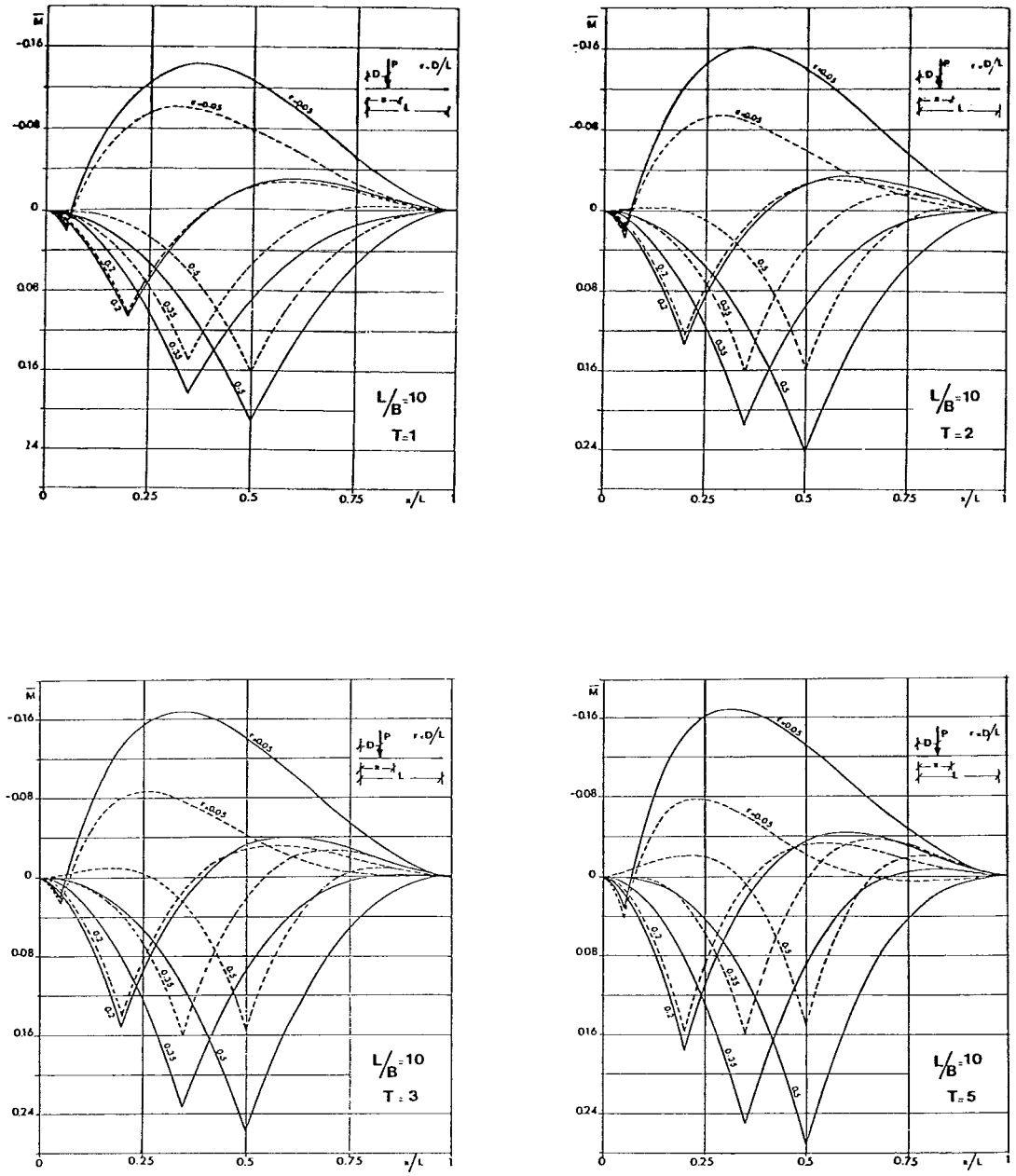

Fig. 5. - Diagrammi dei momenti in fase elastica ed elasto-viscosa per L/B=10 e T=1, 2, 3, 5.

Per l'equilibrio globale si possono poi scrivere le due equazioni:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{j=1}^{m} P_j \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i d_i = \sum_{j=1}^{m} P_j d_j, \qquad (5)$$

con:

$$d_i = L - x_i$$
$$d_j = L - x_j,$$

mentre in relazione al modello considerato per il terreno può scriversi:

$$y_i = \sum_{h=1}^{n} y_{ih} R_h \quad (i = 1, ..., n) \qquad (6)$$

nella quale i coefficienti y_{ih} sono ricavati mediante la relazione di ZEMOTCHKIN [1962]:

$$y_{ih} = \frac{1 - \mu_o^2}{E_o \pi c} F_{ih} \qquad (7)$$

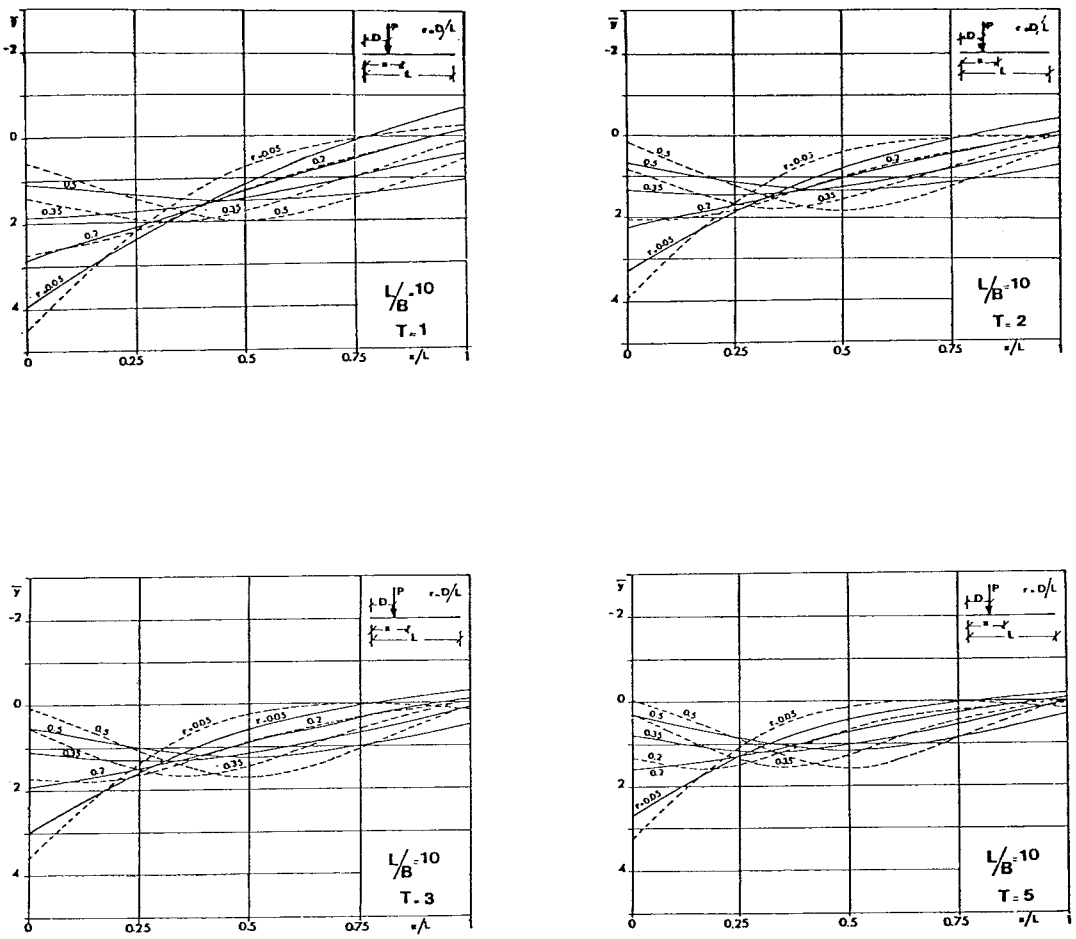

Fig. 6. - Diagrammi degli spostamenti verticali in fase elastica ed elasto-viscosa per L/B=10 e T=1, 2, 3, 5.

ove:

- μ_o, E_o rappresentano le caratteristiche elastiche del terreno (coefficiente trasversale e modulo elastico),

- F_{ih} è un parametro funzione della modalità di carico e della posizione del punto in cui si calcola il cedimento y.

Le (3') associate alle (4), (5) e (6) costituiscono un sistema algebrico lineare la cui soluzione può essere ottenuta mediante processo iterativo partendo dal tempo iniziale $t = t_o$ nel quale la soluzione coincide con quella elastica [HETENY, 1964], ciò naturalmente per una assegnata legge di variazione di carichi P_j nel tempo (4).

3. Analisi del comportamento di travi soggette ad una forza concentrata

Ai fini applicativi, riveste particolare interesse l'analisi del comportamento di travi soggette ad un solo carico concentrato applicato ad una determinata ascissa x dall'origine, potendosi da tale soluzione ricavare ovviamente quella relativa a più carichi concentrati. Si fa quindi riferimento al sistema di cui al punto 2) in presenza appunto di una forza di valore costante ($P = P(t) = cost.$) posta all'ascissa x.

Nel calcolo, la trave è stata suddivisa in un numero di conci $n = 50$, il che ha assicurato un'ottima stabilità della soluzione sulla base di un appropriato test di convergenza.

Per ogni condizione di carico, si sono ricavati i valori del momento M e dello spostamento verticale y, adimensionalizzati come sotto indicato:

$$M = \bar{M}\, Pl \tag{8}$$

$$y = \bar{y}\,\frac{P\,(1 - \mu_o^2)}{lE_o} \tag{9}$$

(4) Per quanto concerne l'aspetto computazionale, può utilmente vedersi la nota GATTI, IORI [1980].

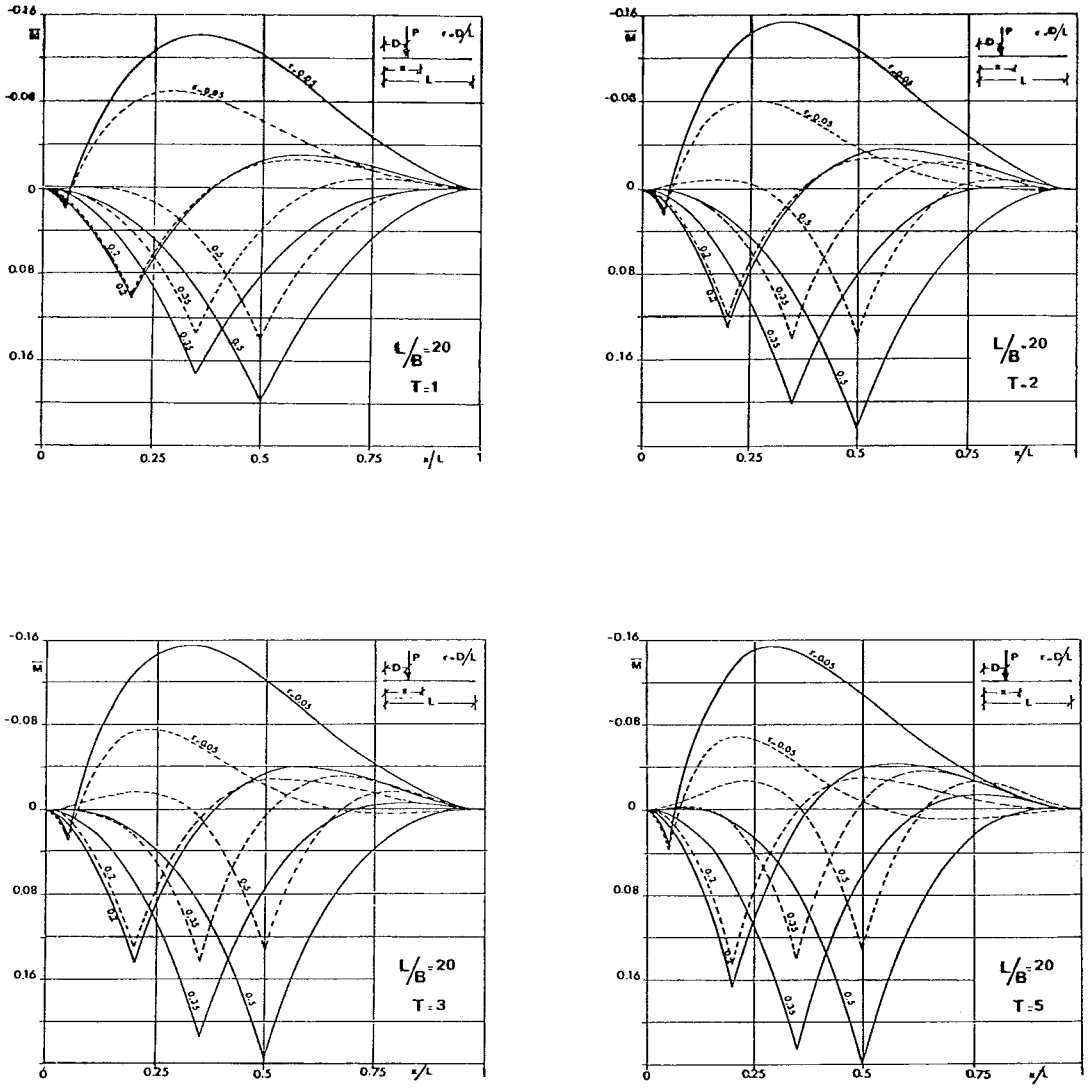

Fig. 7. - Diagrammi dei momenti in fase elastica ed elasto-viscosa per L/B=20 e T=1, 2, 3, 5.

con:

$$l = \sqrt[3]{\frac{2EJ\,(1 - \mu_o^2)}{BE_o}}$$

Tale adimensionalizzazione ha lo scopo di generalizzare l'impiego dei risultati, la singola trave essendo definita dalla rigidezza relativa

$$T = \frac{\pi\, E_o\, BL^3}{32\,(1 - \mu_o^2)\, EJ} \qquad (10)$$

E_o, μ_o = caratteristiche elastiche del terreno

EJ = rigidezza della trave

B = larghezza della trave

L = lunghezza della trave

Nell'analisi, si sono considerate travi aventi rapporti L/B = 5, 10, 20, 50 a ciascuna dei quali sono state associate rigidezze relative T = 1, 2, 3, 5; il carico è stato posizionato alle ascisse x = 0,05; 0,2; 0,35; 0,5 L.

I risultati sono rappresentati nei grafici delle figure 3÷10. Le curve a tratto continuo corrispondono alla soluzione elastica ([5]), quelle tratteggiate alla soluzione elasto-viscosa a tempo infinito (con $\varphi\infty = 3$) e per un tempo t_o di applicazione del carico coincidente col tempo di maturazione del conglomerato.

Dall'esame dei grafici risulta evidente la ridistribuzione per effetto viscoso dei momenti lungo la trave e la diminuzione dei loro massimi assoluti.

Si manifesta anche un aumento della defor-

([5]) È da sottolineare la perfetta coincidenza della soluzione elastica con quella ottenuta da BROWN nel '69.

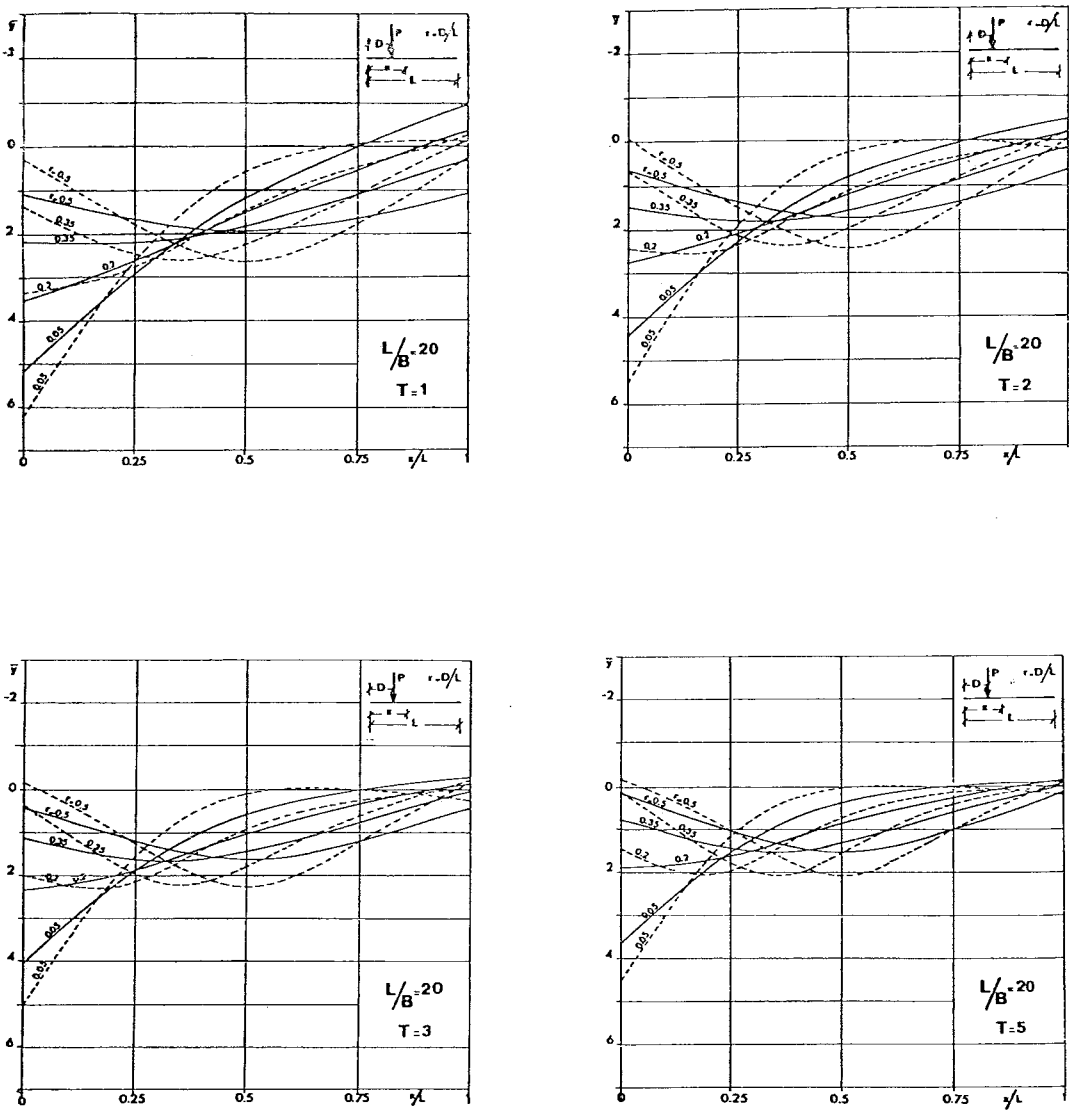

Fig. 8. - Diagrammi degli spostamenti verticali in fase elastica ed elasto-viscosa per L/B=20 e T=1, 2, 3, 5.

mazione in corrispondenza delle zone di applicazione del carico, aumento tanto più marcato quanto più la trave è deformabile.

Si osserva inoltre la marcata influenza della posizione del carico lungo l'asse della trave. Infatti, per tutte le rigidezze considerate e per i diversi rapporti L/B, la soluzione viscosa si discosta da quella elastica in maniera accentuata allorché il carico è posto verso gli estremi oppure verso la zona centrale della trave.

Per contro, per il valore di r = 0,2, la differenza tra le due soluzioni risulta molto modesta.

I numerosi grafici elaborati costituiscono pertanto un valido ausilio al progettista nell'analisi del comportamento nel tempo della struttura di fondazione.

In casi particolari i risultati ottenuti possono fornire altresì utili indicazioni per la scelta più idonea della lunghezza della fondazione, in relazione alla posizione del carico, al fine di ridurre al minimo le variazioni dei cedimenti conseguenti all'effetto viscoso.

4. Estensione al caso di strato elastico poggiante su base rigida

Come è noto [SHERIF, KOENIG, 1975], il comportamento di una struttura di fondazione viene meglio approssimato considerando per il terreno un modello a due strati di cui quello inferiore rigido.

Peraltro, tale modello comporta un onere

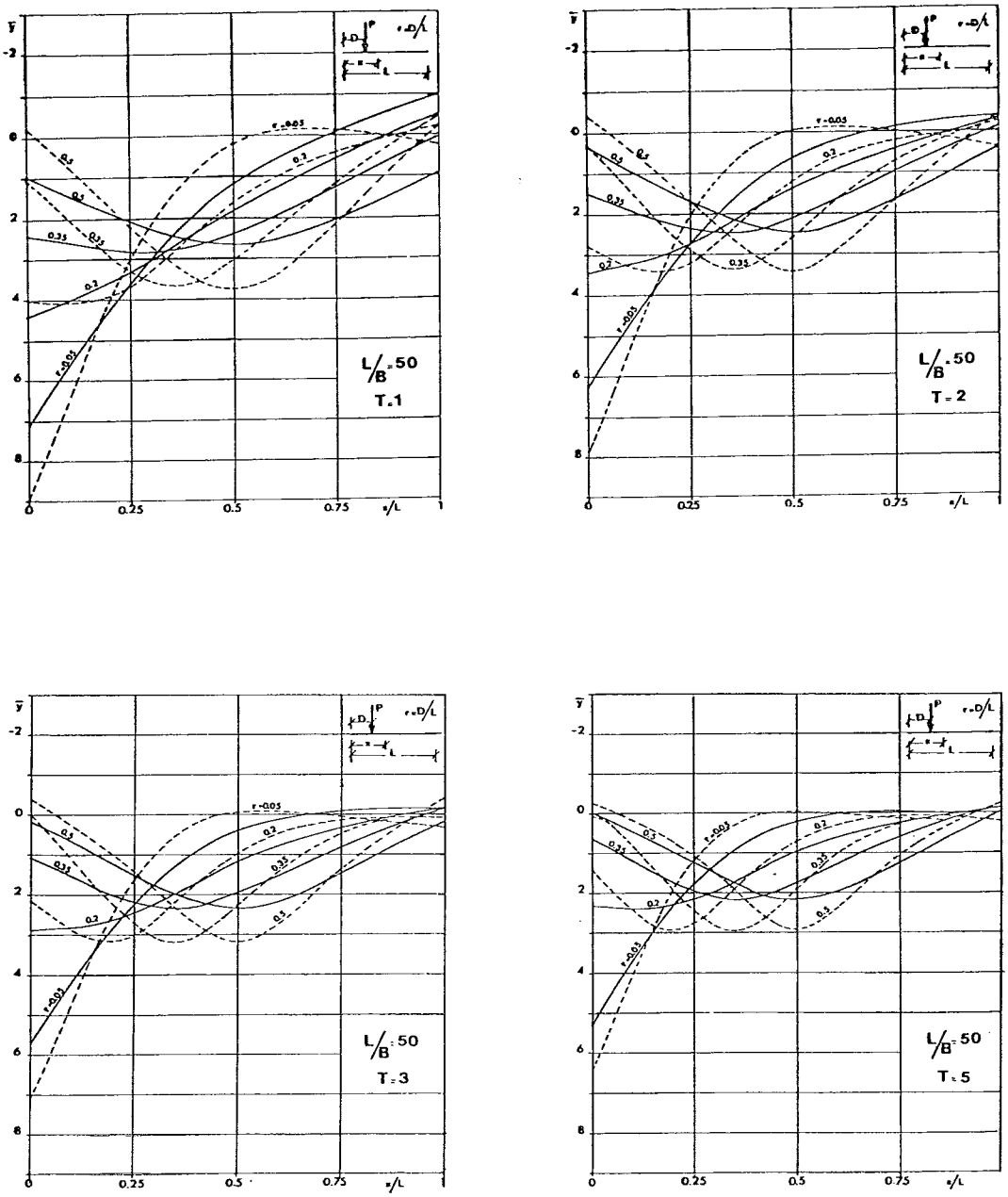

Fig. 9. - Diagrammi dei momenti in fase elastica ed elasto-viscosa per L/B=50 e T=1, 2, 3, 5.

computazionale non indifferente per la determinazione dei coefficienti di influenza [BURMISTER, 1945, 1956].

Si può tuttavia procedere in forma approssimata ritenendo di poter descrivere il comportamento dello strato superiore deformabile tramite la soluzione del semispazio elastico.

All'uopo, la deformazione dello strato deformabile è stata assunta uguale alla differenza tra la deformazione in superficie e quella che si ha in corrispondenza alla quota del supposto strato rigido, entrambe calcolate con la teoria del semispazio elastico.

In effetti, la differenza tra la soluzione così ottenuta e quella corretta è contenuta entro limiti accettabili. A titolo di confronto è stato esaminato il caso di una trave avente rapporto L/B = 20 e rigidezza relativa T = 3 poggiante su uno strato deformabile di spessore 2B, usando come coefficienti di influenza, sia quelli ricavati secondo il metodo approssimato descritto, sia quelli desunti dalla tabellazione di Gi-

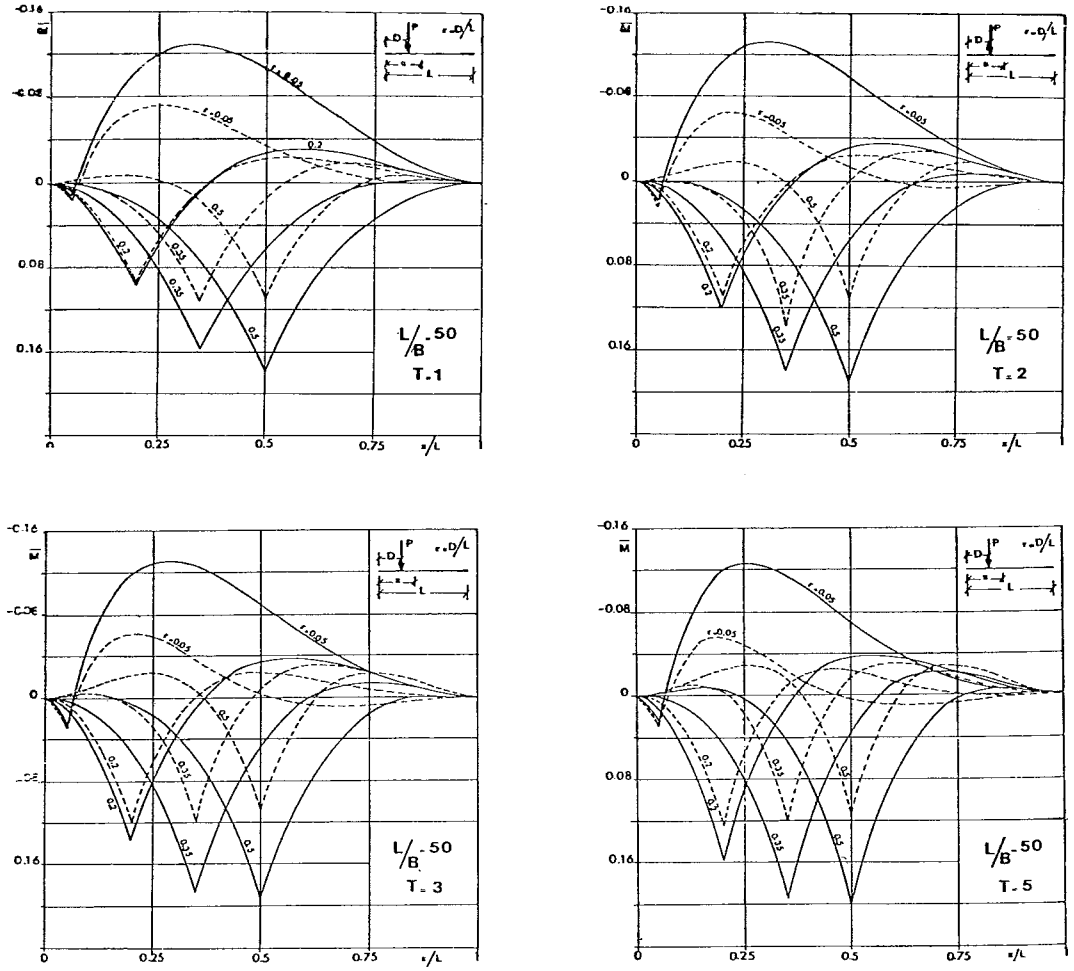

Fig. 10. - Diagrammi degli spostamenti verticali in fase elastica ed elasto-viscosa per L/B=50 e T=1, 2, 3, 5.

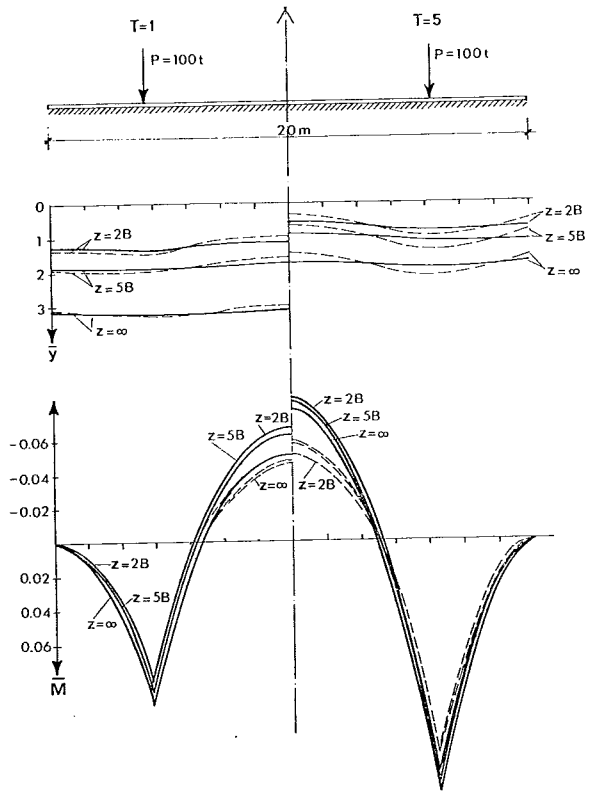

Fig. 11. - Confronto tra i diagrammi dei momenti e degli spostamenti verticali per travi con T = 1 e T = 5 caricate simmetricamente e poggianti su mezzo elastico di differente spessore.

ROUD [1973]. Le deformate differiscono fra loro in misura inferiore al 6%. Tale valore percentuale è risultato inoltre via via decrescente all'aumentare dello spessore dello strato deformabile.

Procedendo ancora secondo il metodo approssimato, è stato quindi esaminato il caso di una trave sottoposta a due carichi concentrati simmetrici (fig. 11) sempre con rapporto $L/B = 20$ ed avente rigidezza relativa $T = 1 \div 5$

Lo strato deformabile è stato assunto di spessore z = 2B; 5B.

A titolo di confronto, i risultati ottenuti sono stati diagrammati insieme alla soluzione relativa al semispazio elastico ($z = \infty$).

Le due soluzioni, quella elastica a tratto continuo e quella elasto-viscosa a trategggio, risultano ovviamente influenzate dallo spessore dello strato deformabile e dalla rigidezza relativa della trave. La loro divergenza, tuttavia, appare sempre abbastanza contenuta.

BIBLIOGRAFIA

BROWN P. T. (1969) - *Raft foundation. Post graduate course on analysis of the settlement of foundation.* School of Civ. Eng. Univ. of Sydney.

BURMISTER D. M. (1945) - *The general theory of stresses and displacements in layered soil systems.* J. Appl. Phys. 16, 296.

BURMISTER D. M. (1956) - *Stress and displacement characteristics of a two-layer rigid base soil system influence diagrams and practical applications.* Proc. Highw. Res. Board 35.

CESTELLI GUIDI C. (1980) - *Geotecnica e Tecnica delle fondazioni.* Vol. 2 Hoepli, Milano.

CHAMECKI S. (1978) - *Soil structure interaction in the analysis of raft foundations.* Zoth Polish solid mechanics conference. Porabka, Kozubnik (Poland).

GATTI G., IORI I. (1980) - *Influenza della viscosità nei problemi di interazione fondazione-terreno.* Rivista Italiana di Geotecnica XIV, 2, Aprile-Giugno.

GIROUD J. P. (1973) - *Tables pour le calcul des fondations.* Dunod, Paris.

HETENY M. (1946) - *Beams on elastic-foundation.* The University of Michigan Press Ann. Arbor, Mich.

MIGLIACCI A. (1971) - *Applicazione dei Principi di viscosità.* Quaderno n. 2 del Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in c.a. Tamburini Editore Milano.

SHERIF G., KOENIG G. (1975) - *Platten and Balken auf nachgiebigem Baugrund.* Springer Verlag.

KROL W. (1971) - *Statique des foundations en béton armé.* Dunod, Paris.

SUMMARY

The influence of concrete viscosity on the behaviour of continuous foundations.

The interaction between a plain-concrete foundation beam and elastic soils having either infinite thickness (elastic half-space) or finite thickness, is analysed in this paper, taking into account the creep effects in the beam.

The linear algebric equations of the problem are solved by means of the finite differences method via an iterative procedure. The load condition consists of a single concetrated force applied at midspan, the beam span being finite.

In the first part of the paper the attention is focused on beams having various stiffnesses with respect to the soil, which is introduced as an elastic half space; the effects of creep on vertical displacements and internal forces are analysed.

In the second part, the attention is focused on the combined effects of the beam creep and the thickness of the soil, which is introduced as an elastic layer, resting on a stiff bed.

The analysis, is based on the basic assumption that the behaviour of the elastic layer can be simulated through the difference between two elastic half spaces. It can be shown that when the thickness of the elastic layer is higher than the width of the foundation, this approximate solution is pratically equivalent to that obtained through a much more complex « exact » solution (perfectly stiff bed).

The results (displacements, benging moments) are plotted in dimensionless form, to the designer's advantage.