

# Modelli analitici per lo studio della risposta dinamica di paratie flessibili soggette ad azioni sismiche

Luca Lanzoni,\* Vincenzo Fioravante,\*\* Enrico Radi,\* Antonio Tralli\*\*

## Sommario

Nel presente lavoro vengono presentati due modelli analitici sviluppati per descrivere la complessa interazione dinamica fra il terreno e una paratia incastrata alla base.

Per superare i limiti dei metodi pseudostatici suggeriti dagli Eurocodici, i modelli sviluppati consentono di valutare il contenuto in frequenza del sisma di progetto, la rigidità della paratia e le proprietà elastiche e di permeabilità del terreno, e inoltre di simulare il comportamento dinamico dell'insieme terreno-opera di sostegno in presenza di una forzante comunque variabile nel tempo, applicando la trasformata discreta di Fourier (D.F.T.). La risposta dinamica dell'interazione di terreni poco permeabili come i limi argillosi è simulata con un modello di tipo visco-elastico, mentre per i terreni a grana grossa si adotta un modello costitutivo del tipo poro-visco-elastico.

Sono qui descritte le equazioni costitutive dei due modelli. Viene infine presentata la risposta del modello ad alcuni accelerogrammi registrati durante eventi sismici e, ove possibile, essa viene comparata con i risultati riportati nella letteratura tecnica.

## 1 Introduzione

L'Eurocodice 8 (parte 5, Appendice E) e le recenti "Norme tecniche per il progetto sismico di opere di fondazione e di sostegno dei terreni" (punto 4.4) da esso derivate suggeriscono di verificare la sicurezza delle opere di sostegno con una analisi pseudostatica basata su classici lavori di Mononobe e Okabe [MONONOBE e MATUO, 1929; OKABE, 1924] e successive varianti [SEED e WHITMAN, 1970; RICHARD e ELMS, 1979; NADIM e WHITMAN, 1983]. È da osservare che in questo tipo di analisi implicitamente si assumono spostamenti orizzontali della parete sufficienti a mobilitare la resistenza limite del terreno e quindi almeno dell'ordine del  $0.1 \div 0.4\%$  dell'altezza della paratia [CLOUGH e DUNCAN, 1990], spesso dunque superiori a quelli massimi ipotizzabili in zone a bassa sismicità.

In anni più recenti lo studio delle paratie soggette ad azioni sismiche è stato affrontato integrando le equazioni del moto in uno strato semi-ilimitato di terreno contenuto da una parete verticale ed assumendo per esso un'equazione costitutiva di tipo viscoelastico lineare. Questa ipotesi appare realistica in presenza di azioni sismiche di bassa intensità (e.g. in zona sismica 3, vedi O.P.C.M.

n.3274/2003) e di spostamenti orizzontali moderati. In un primo gruppo di lavori la parete era supposta rigida ed incastrata alla base [WOOD, 1973; VELETSOS e YOUNAN, 1994]. È tuttavia stato osservato che le pressioni e le corrispondenti sollecitazioni fornite da questo tipo di analisi risultano da 2.5 a 3 volte superiori rispetto a quelle derivate attraverso i criteri dell'analisi limite. Pertanto, le soluzioni ottenute in campo elastico vengono spesso ritenute troppo conservative e trovano un impiego limitato in ambito progettuale. Tuttavia, se si prende in considerazione anche la deformabilità della parete [VELETSOS e YOUNAN, 1997; YOUNAN e VELETSOS, 2000] si può ottenere, come peraltro è ragionevole aspettarsi, una notevole riduzione delle azioni dinamiche e delle sollecitazioni. Del resto la deformabilità elastica della parete è elemento essenziale nelle analisi statiche, in particolare nel caso in cui queste siano realizzate con palancole metalliche.

Un modello costitutivo di tipo visco-elastico lineare è tuttavia rappresentativo solo per alcuni tipi di terreni di interesse, ad esempio i terreni argillosi che, da un punto di vista idraulico, sono praticamente impermeabili. Invece i materiali granulari (ghiaie, sabbie) o le rocce porose sono caratterizzati da una notevole conducibilità idraulica e per essi appare più opportuno un modello costitutivo poro-visco-elastico [RADI *et al.*, 2004]. Nella letteratura tecnica solo molto recentemente sono comparsi lavori [THEODORAKOPOULOS *et al.*, 2001; THEODORAKOPOULOS, 2003] in cui con tale modello viene studiato

\* Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria, Università di Modena e Reggio Emilia, Reggio Emilia

\*\* Dipartimento di Ingegneria, Università di Ferrara, Ferrara

uno strato semi-illimitato con una parete rigida di contenimento.

Nel presente lavoro si illustra un diverso modello poro-visco-elastico sviluppato per il terreno e se ne studia l'interazione con una paratia deformabile.

Inizialmente viene presentato il modello analitico per lo studio della risposta dinamica di una paratia elastica flessibile incastrata alla base a sostegno di uno strato semi-illimitato di terreno omogeneo ed isotropo, avente comportamento elastico lineare o visco-elastico lineare. Successivamente viene discusso il modello poro-visco-elastico introdotto da Biot e costituito da uno scheletro solido isotropo saturo, in cui i vuoti sono considerati comunicanti; vengono derivate le equazioni che reggono il problema e se ne rappresenta una soluzione in serie di seni.

Nel sesto paragrafo vengono confrontate le risposte dei diversi modelli in presenza di una forzante di tipo armonico, mentre nel settimo paragrafo viene utilizzata la teoria delle trasformate discrete di Fourier per ottenere la risposta ad una sollecitazione non periodica. Infine nell'ultimo paragrafo la risposta del modello viscoelastico all'accelerogramma N-S del terremoto di El Centro viene confrontata con risultati presenti in letteratura [VELETSOS e YOUNAN, 1997]; inoltre viene discussa la risposta del sistema agli accelerogrammi di due eventi sismici recenti [Assisi, 1997; Novellara (RE), 1996].

## 2. Paratia flessibile in terreno elastico

### Relazioni di base

#### EQUAZIONI DI CAMPO

Si considera (Fig. 1) una paratia flessibile incastrata alla base, a sostegno di uno strato semi-illimitato di terreno omogeneo e isotropo, avente comportamento elastico lineare.

Tale sistema, sottoposto alla base ad una sollecitazione armonica  $\ddot{\mathbf{x}}(t) = A e^{i\omega t}$ , dove  $A$  ne indica l'ampiezza, si considera in stato piano di deformazione ( $u_3 = 0$ ); si ammette inoltre che la parete, di rigidità costante lungo l'altezza, aderisca in ogni punto allo strato di terreno sostenuto.

Il modulo di elasticità tangenziale  $G$  del terreno viene assunto costante nel tempo. La rigidità della paratia, indicata nel seguito con  $D_p$ , risulta come ben noto:

$$D_p = \frac{E_p t_p^3}{12(1-\nu_p^3)} \quad (1)$$

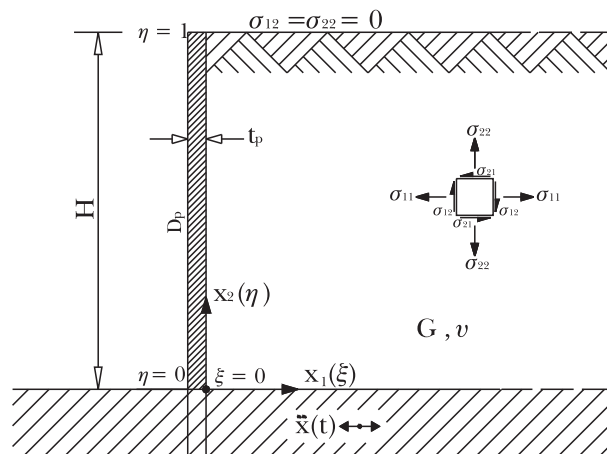


Fig. 1 – Paratia infissa a contenimento di uno strato semi-illimitato di terreno elastico.

Fig. 1 – Flexible earth cantilever diaphragm wall retaining a semi-infinite elastic soil layer.

dove:

$E_p$ : modulo di Young della paratia;

$t_p$ : spessore della paratia;

$\nu_p$ : coefficiente di Poisson della paratia

Nel seguito, per rendere la notazione più compatta, viene adottata la seguente simbologia per gli operatori differenziali:

divergenza:  $\Delta$ ; gradiente:  $\nabla$ ; Laplaciano:  $\nabla^2$

Il simbolo (" $\partial$ ") denota l'operazione di derivazione rispetto alle variabili spaziali, mentre il punto (" $\dot{\phantom{x}}$ ") rappresenta la derivata temporale; in grassetto vengono indicate le grandezze vettoriali; infine gli indici denotano le componenti scalari delle grandezze cui sono applicati. Indicando con  $\mathbf{u}$  lo spostamento di un punto arbitrario appartenente al piano  $x_1x_2$  rispetto alla base, funzione delle coordinate  $x_1$ ,  $x_2$  e del tempo, le equazioni costitutive possono scriversi nella forma [GRAFF, 1991]:

$$\sigma_{ij} = 2G \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} + \hat{\lambda} \Delta u \delta_{ij} \quad \text{con } i, j = 1, 2; \quad (2)$$

indicando con  $\hat{\lambda} = 2G\nu/(1-2\nu)$  la costante di Lamè e con  $\nu$  il coefficiente di Poisson del terreno;  $\delta_{ij}$  rappresenta il delta di Kronecker.

Si indica con  $\rho$  la densità del terreno e con  $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_1 + 0\hat{\mathbf{x}}_2)$  l'accelerazione alla base del sistema, agente solo in direzione orizzontale ( $\hat{\mathbf{x}}_1$  e  $\hat{\mathbf{x}}_2$  sono i versori degli assi corrispondenti); pertanto l'equazione di Navier si può scrivere nel modo seguente:

$$(\hat{\lambda} + G)\nabla\Delta\mathbf{u} + G\nabla^2\mathbf{u} = \rho(\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{x}}) \quad (3)$$

Poiché l'accelerazione  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  agisce in direzione orizzontale, VELETSOS e YOUNAN, [1994] hanno semplificato il problema trascurando la componente

verticale di tensione  $\sigma_{22} = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu) \cdot u_{2,2} + \nu \cdot u_{1,1}]$ ;  
 sotto tale ipotesi l'equazione di Navier (3) in direzione orizzontale assume la forma:

$$\psi^2 u_{1,11} + u_{1,22} = \rho \cdot (\ddot{u} + \ddot{x}(t)) / G \quad (4)$$

avendo posto

$$\psi^2 = \frac{2-\nu}{1-\nu} \quad (5)$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

– Il campo di spostamento alla base dello strato viene imposto uguale a zero:

$$u_1(x_1, x_2, t) = u_2(x_1, x_2, t) = 0 \text{ per } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0 \quad \forall t. \quad (6a)$$

– Lo spostamento orizzontale del terreno a contatto con la parete coincide con lo spostamento orizzontale  $w$  della stessa:

$$w(x_2, t) = u_1(x_1, x_2, t) \text{ per } x_1 = 0 \text{ e } 0 \leq x_2 \leq H \quad \forall t. \quad (6b)$$

– In assenza di un precarico  $p_0$  applicato all'estradosso del rilevato, deve risultare:

$$\sigma_{12}(x_1, x_2, t) = \sigma_{22}(x_1, x_2, t) = 0 \text{ per } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = H \quad \forall t. \quad (6c)$$

Questa ipotesi può essere modificata imponendo alla componente verticale di tensione  $\sigma_{22}$  in superficie di eguagliare un eventuale precarico  $p_0$ .

La soluzione del problema in esame viene di solito cercata mediante separazione delle variabili, assumendo di tipo armonico le funzioni incognite [VELETOS e YOUNAN, 1997].

Indicando con  $\omega$  la pulsazione e con  $\xi = x_1/H$ ,  $\eta = x_2/H$  le coordinate adimensionali, lo spostamento orizzontale del terreno è rappresentato nella forma:

$$u_1(x_1, x_2, t) = U(\xi, \eta) e^{i\omega t} \quad (7)$$

dove l'ampiezza  $U(\xi, \eta)$  dello spostamento orizzontale può essere rappresentata in serie di Fourier:

$$U(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(\xi) \sin(\lambda_k \eta) \quad (8)$$

essendo  $\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}$

Nella (8) si utilizza una serie di soli seni, in virtù delle condizioni al contorno.

Sostituendo la (7) nella (4), tenendo conto della (8), si giunge alla seguente equazione per la funzione incognita  $U_k(\xi)$ , che rappresenta l'ampiezza del generico modo di oscillare:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi^2 U_k''(\xi) - (\lambda_k^2 - \lambda^2) U_k(\xi)) \sin(\lambda_k \eta) = CH \quad (9)$$

ove i simboli  $C$  e  $\lambda$  indicano i rapporti adimensionali:

$$\lambda^2 = \frac{\rho \omega^2 H^2}{G}; \quad C = \frac{\rho AH}{G} \quad (10)$$

L'apice nella (9) indica l'operazione di derivazione rispetto alla coordinata  $\xi$ .

Sviluppando in serie di seni il termine costante  $CH$ , dalla (9) si perviene all'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine per la generica funzione  $U_k(\xi)$ :

$$\psi^2 U_k''(\xi) - (\lambda_k^2 - \lambda^2) U_k(\xi) = 2CH / \lambda_k \quad (11)$$

L'integrale della (11) si può esprimere nella forma:

$$U(\xi, \eta) = 2CH \sum_{k=1}^{\infty} (A_k e^{-\alpha_k \xi} - C_k) \sin(\lambda_k \eta) \quad (12)$$

essendo:

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\psi} \sqrt{\Lambda_k}; \quad C_k = \frac{1}{\lambda_k^3 \Lambda_k}; \quad \Lambda_k = 1 - \phi_k^2;$$

$$\phi_k = \frac{1}{(2k-1)} \frac{\omega}{\omega_1}; \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2H} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (13)$$

Nella (12) i termini  $A_k$  rappresentano le costanti di integrazione, da determinare, mentre  $\omega_1$  può essere interpretata come la pulsazione fondamentale di una mensola deformabile elasticamente a taglio, avente gli stessi valori di  $\rho$  e di  $G$  del terreno.

Si osservi che, per valori di  $\phi_k > 1$ , i termini  $\alpha_k$  sono immaginari. Se invece  $\phi_k \leq 1$  il corrispondente  $\alpha_k$  è reale: in tal caso non si ha dissipazione e la componente orizzontale del vettore spostamento cresce all'aumentare della distanza dalla parete, raggiungendo il valore massimo per  $\xi = 1$ . L'assenza di termini immaginari nella soluzione implica che, per tale regime di pulsazioni, non viene dissipata energia attraverso la riflessione e la propagazione di onde verso la regione illimitata (*radiation damping*).

Si osservi che, indipendentemente dal valore del rapporto  $\omega/\omega_1$ :  
 per  $k = 1$

$$\phi_k = \phi_1 = \omega/\omega_1, \quad \lambda_k = \lambda_1 = \pi/2, \quad \Lambda_k = \Lambda_1 = 1 - (\omega/\omega_1)^2,$$

$$\alpha_k = \alpha_1 = \frac{\pi}{2\psi} \sqrt{1 - (\omega/\omega_1)^2},$$

$$C_k = C_1 = \frac{8}{\pi^3 [1 - (\omega/\omega_1)^2]};$$

per  $k \neq 1$

$$\phi_k = \phi \neq 0, \quad \lambda_k = \lambda \neq 0, \quad \Lambda_k = \Lambda \neq 1, \quad \alpha_k = \alpha \neq 0, \quad C_k = C \neq 0,$$

Inoltre  $C_k \neq 0$  se  $\phi_k = 1$ : ciò accade per  $\omega/\omega_1 = 1$  e  $k = 1$ , oppure per  $\omega/\omega_1 = 3$  e  $k = 2$ , ecc..., e si ha risonanza del sistema.



## EQUAZIONE DEL MOTO DELLA PARETE

L'equazione della linea elastica della paratia, supposta di massa trascurabile e soggetta all'azione orizzontale agente alla base ed alle pressioni trasmesse dallo strato semi-illimitato di terreno, si può esprimere nella forma:

$$D_p = \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \sigma_{11} \quad (14)$$

ove, in virtù del legame costitutivo elastico lineare:

$$\sigma_{11} = 2G(\psi^2 - 1)u_{1,1} \quad (15)$$

In analogia con la (7), lo spostamento della parete e la componente orizzontale di tensione vengono cercati nella forma:

$$w(x_2, t) = W(\eta)e^{i\omega t}; \quad \sigma_{11}(x_1, x_2, t) = S_{11}(\xi, \eta)e^{i\omega t} \quad (16)$$

dove  $W(\eta)$  e  $S_{11}(\xi, \eta)$  rappresentano le ampiezze delle corrispondenti funzioni.

Derivando la (12) rispetto alla variabile  $x_1$

$\left(\frac{\partial(\dots)}{\partial x_1} = \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} \frac{1}{H}\right)$  e sostituendo l'espressione ottenuta nella (15), l'ampiezza della componente orizzontale di tensione nel terreno può essere scritta nella forma:

$$S_{11}(\xi, \eta) = -4CG(\psi^2 - 1) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k e^{-\alpha_k \xi} \sin(\lambda_k \eta) \quad (17)$$

Le sollecitazioni nella paratia possono essere valutate di conseguenza. Indicando con  $T$  e  $M$  rispettivamente il taglio e il momento flettente sulla parete, dalla (17) si ottiene:

$$T(\eta) = -4CGH(\psi^2 - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \alpha_k}{\lambda_k} \cos(\lambda_k \eta) \quad (18)$$

$$M(\eta) = -4CGH^2(\psi^2 - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \alpha_k}{\lambda_k^2} [(-1)^k + \sin(\lambda_k \eta)] \quad (19)$$

L'equazione della linea elastica consente di valutare gli spostamenti della parete.

Se si sostituisce la seconda delle (16) nella (14), ricordando la (17), si ottiene l'equazione differenziale per l'ampiezza  $W(\eta)$ :

$$D_p \frac{\partial^4 W(\eta)}{\partial \eta^4} = -4CGH^4(\psi^2 - 1) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k \sin(\lambda_k \eta) \quad (20)$$

La (20) può essere integrata imponendo le condizioni di incastro perfetto alla base della parete (è anche possibile, nel medesimo modo, mettere in conto un incastro cedevole alla base della parete [VELETSOS *et al.*, 1995]); così facendo si trova la soluzione nella forma:

$$W(\eta) = 2CH \sum_{k=1}^{\infty} A_k W_k \left[ \sin(\lambda_k \eta) - \lambda_k \eta - \frac{(-1)^k}{2} (\lambda_k \eta)^2 \right] \quad (21)$$

dove il termine  $W_k$  nella (21) risulta pari a:

$$W_k = -2d_w (\psi^2 - 1) \frac{\alpha_k}{\lambda_k^4} \quad (22)$$

avendo indicato con  $d_w$  il rapporto:

$$d_w = \frac{G \cdot H^3}{D_p} \quad (23)$$

Il parametro adimensionale  $d_w$  rappresenta il rapporto tra la rigidezza dello strato di terreno rispetto a quella della paratia.

La determinazione delle costanti di integrazione  $A_k$  è possibile imponendo la condizione al contorno (6b) e utilizzando le (12) e (21); se ne omette per brevità il calcolo esplicito.

### 3. Paratia flessibile in terreno viscoelastico lineare

Nel caso viscoelastico il modulo di taglio del terreno assume la forma complessa  $G^* = G(1 + i\delta)$ , ove il parametro  $\delta$ , rappresentativo del comportamento viscoso, viene detto coefficiente dissipativo.

Le soluzioni del problema risultano in questo caso sempre di natura complessa, ad indicare la capacità del sistema viscoelastico di dissipare comunque energia.

Il problema viene descritto attraverso relazioni del tutto analoghe alle precedenti sostituendo  $G$  con  $G^*$  in tutte le equazioni.

Nel caso in esame i termini  $\Lambda_k$  non si annullano, e i coefficienti  $A_k$ ,  $C_k$ , da cui dipendono le ampiezze delle funzioni incognite, assumono un valore finito anche per valori dei rapporti  $\omega/\omega_1 = 1, 3, 5$ , ecc...

### 4. Confronto fra elastico e viscoelastico lineare

#### 4.1. Risposta ad una sollecitazione pseudostatica

I due tipi di terreno elastico e viscoelastico presentano ovviamente la stessa risposta a carichi statici ovvero, nel caso in esame, a sollecitazioni dette "pseudostatiche" (accelerazioni alla base caratterizzate da pulsazione  $\omega \neq 0$ )

Nei grafici di figura 2 vengono riportati, per  $v=1/3$  e al variare del parametro  $d_w$ , i rapporti adimensionali caratterizzanti le ampiezze dello spostamento, del taglio e del momento flettente sulla parete, e definiti nel modo seguente:

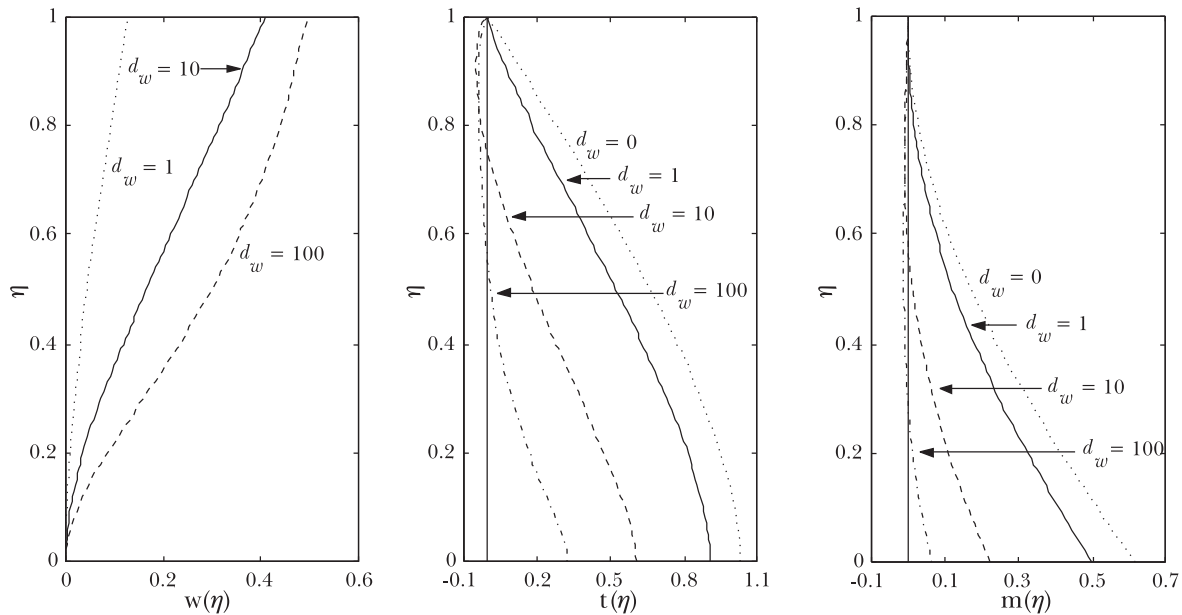


Fig. 2 – Variazioni lungo l’altezza a) dello spostamento orizzontale, b) del taglio e c) del momento flettente della parete, per diversi valori della flessibilità relativa  $d_w$ .  
 Fig. 2 – Variation along the wall a) of the horizontal displacement b) of the shear force c) of the bending moment of the wall, for different values of the relative flexibility  $d_w$ .

$$w(\eta) = -\frac{W(\eta)}{CH}; \quad t(\eta) = -\frac{T(\eta)}{CGH}; \quad m(\eta) = \frac{M(\eta)}{CGH^2}; \quad (24)$$

Le sollecitazioni massime si hanno per la parete rigida ( $d_w = 0$ ), mentre per valori anche modesti della flessibilità  $d_w$  le stesse diminuiscono rapidamente, in particolare il momento flettente [VELETSOS e YOUNAN, 1997]. Nel caso di pareti rigide le sollecitazioni ottenute considerando un terreno elastico risultano da 2,5 a 3 volte superiori rispetto a quelle fornite dai metodi all’equilibrio limite (ad esempio, il metodo di M.O.). Per questo le soluzioni ottenute in campo elastico vengono scarsamente impiegate in ambito progettuale e trovano invece largo utilizzo i criteri dell’analisi limite, anche se sono necessari spostamenti considerevoli e paratie flessibili per inescare la rottura e la formazione dei cunei di spinta [CLOUGH e DUNCAN, 1990].

4.2. Risposta ad una sollecitazione armonica

Differenze anche significative fra la risposta di un terreno di tipo elastico ed uno viscoelastico si hanno invece per sollecitazioni puramente armoniche.

In figura 3 sono rappresentati i fattori di amplificazione dinamica per il taglio alla base, ossia del rapporto  $t_0(\omega)/t_0(0)$  al variare della pulsazione  $\omega$  (l’indice  $_0$  indica valori calcolati al piede della parete), ottenuti per  $d_w$  pari a 1 e 100 e per valori usuali del coefficiente viscoso  $\delta$ . In tale rappresentazione viene messa in evidenza sia la parte reale che quella immaginaria.

Il modello viscoso fornisce valori finiti per  $\omega/\omega_1 = 1, 3, 5, \text{ ecc....}$ . Il picco più elevato si ha per  $\omega/\omega_1 = 1$ , il che conferma la predominanza del primo modo di vibrare rispetto agli altri. Un aumento dello smorzamento  $\delta$  induce, come è ovvio, una diminuzione dell’amplificazione, ma non influenza in modo significativo la risposta per frequenze distanti da quella naturale.

Per valori del rapporto  $\omega/\omega_1 = 1$  il fattore di amplificazione cresce all’aumentare del parametro  $d_w$ .

In figura 4 sono rappresentati gli andamenti della pressione sulla parete, ossia del rapporto adimensionale  $p(\eta) = -\frac{S_{11}(0,\eta)}{\rho AH}$ ; in corrispondenza delle prime 2 forme modali, per  $d_w = 10$  e  $\delta = 0.2$ . Dalla figura si rileva come a un aumento del rapporto  $\omega/\omega$  corrisponda una sensibile diminuzione dei valori della pressione  $p(\eta)$ .

5. Paratia flessibile in terreno poroviscoelastico lineare

Relazioni di base

I terreni a grana grossa (sabbie e ghiaie) sono sistemi multifase costituiti da una parte solida porosa, i cui interstizi sono occupati da fluido. Per cogliere il comportamento meccanico di questi materiali è quindi necessario descrivere l’interazione tra le fasi presenti.



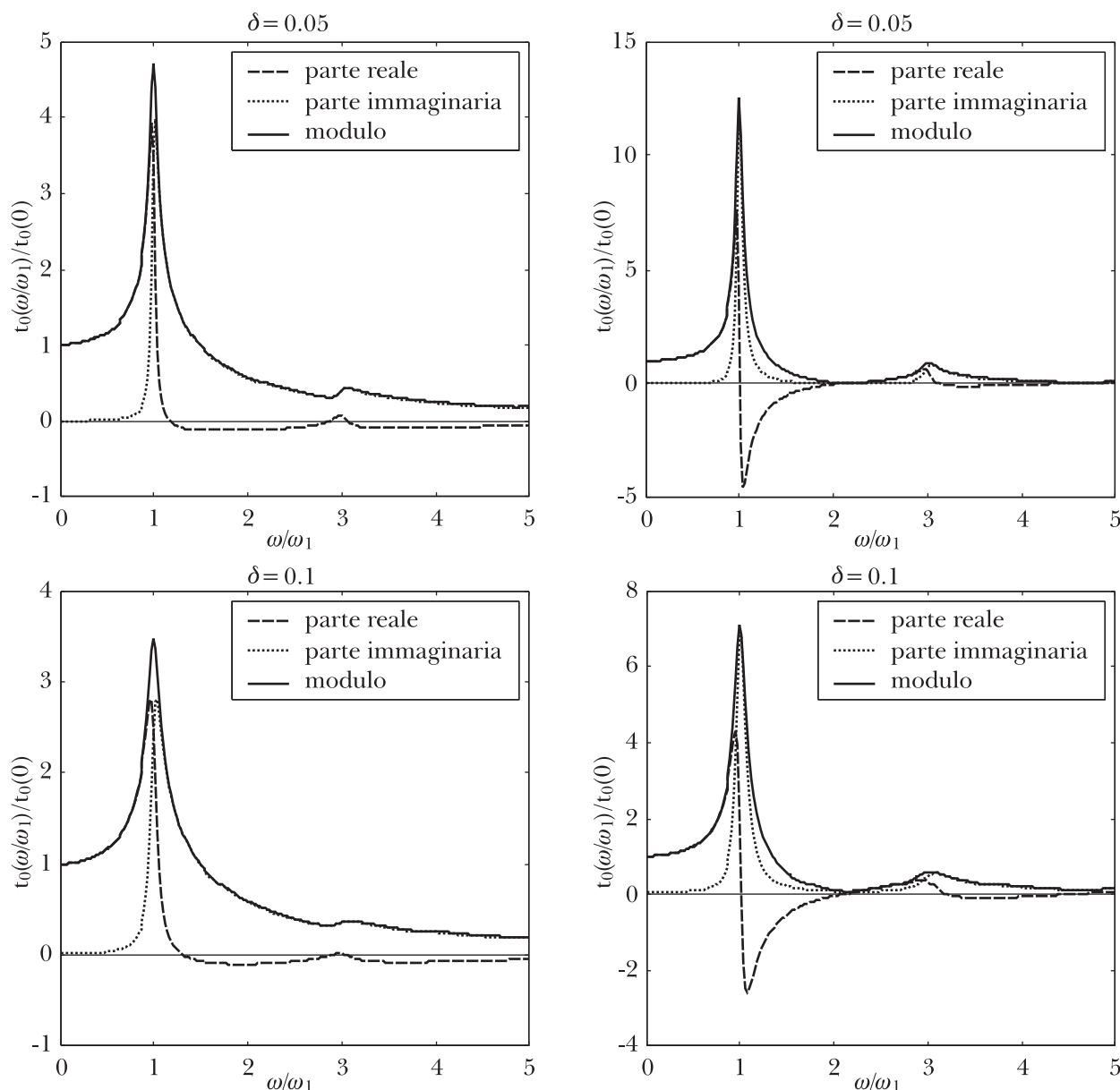


Fig. 3 – Fattori di amplificazione dinamica per il taglio alla base della parete per diversi valori della flessibilità relativa  $d_w$  e del coefficiente viscoso  $\delta$ .

Fig. 3 – Amplification factors for the base shear forces at the wall for different values of the relative flexibility  $d_w$  and soil damping factor  $\delta$ .

Il modello poro(visco)elastico introdotto da BIOT [1941] è costituito da uno scheletro solido isotropo saturo, in cui i vuoti sono considerati tra loro comunicanti.

Se si indica con  $n$  la porosità, ( $n = \text{volume dei vuoti/volume totale}$ ), utilizzando gli apici  $s, w$  per indicare grandezze relative rispettivamente alla fase solida e liquida, le densità apparenti delle 2 fasi si possono scrivere come:

$$\rho^s = (1-n)\rho_s; \quad \rho^w = n\rho_w \quad (25)$$

I legami costitutivi per le 2 fasi si possono rappresentare nella forma [LORET e HARIRECHE, 1991]:

$$\sigma_{ij}^s = 2G^* \frac{u_{ij}^s + u_{ji}^s}{2} + (\lambda_s \Delta \mathbf{u}^s + \lambda_{sw} \Delta \mathbf{u}^w) \delta_{ij} \quad (26)$$

$$\sigma_{ij}^w = -np_{ij} = (\lambda_{sw} \Delta \mathbf{u}^s + \lambda_w \Delta \mathbf{u}^w) \text{ con } i, j = 1, 2. \quad (27)$$

dove:  $G^*$  è il modulo di elasticità tangenziale del solido,  $\lambda_s, \lambda_w$ , e  $\lambda_{sw}$  sono parametri adottati nel modello poroelastico lineare sviluppato da Biot,  $\sigma^s$  e  $\sigma^w$  rappresentano rispettivamente la tensione efficace e la pressione neutra, mentre  $\mathbf{u}^s$  e  $\mathbf{u}^w$  denotano i campi di spostamento relativo delle fasi rispetto alla base.

Il moto relativo della fase liquida rispetto alla fase solida genera sforzi di natura viscosa, che

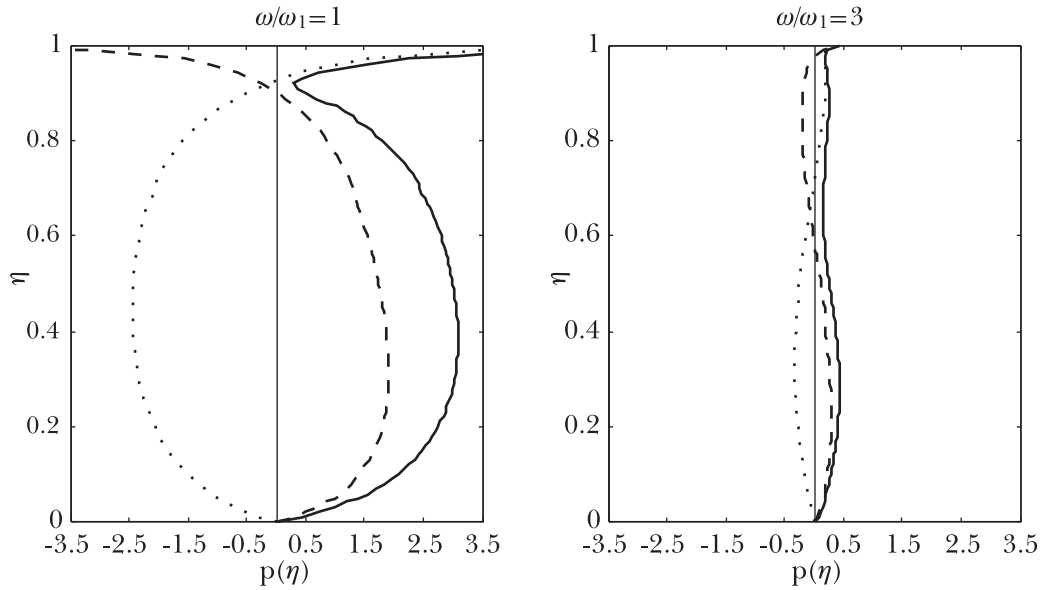


Fig. 4 – Andamenti della pressione sulla parete per a)  $\omega/\omega_1 = 1$ , b)  $\omega/\omega_1 = 3$ , per  $d_w = 10$  e  $\delta = 0.2$ . Le curve tratteggiate rappresentano la parte reale (----) e immaginaria (.....); quelle continue il modulo.  
 Fig. 4 – Vertical variation of horizontal pressure on the wall for a)  $\omega/\omega_1 = 1$ , b)  $\omega/\omega_1 = 3$ , for  $d_w = 10$  and  $\delta = 0.2$ . The dashed lines describe the real part (----), and the imaginary part (.....); the solid lines depict the absolute value.

nell'ipotesi di permeabilità isotropa possono essere espressi nella forma [BOWEN, 1976]:

$$\pm \frac{n^2}{\hat{k}} (\dot{u}^w - \dot{u}^s) \quad (28)$$

essendo  $\hat{k} = k/\gamma$  il coefficiente di permeabilità,  $k$ , per unità di peso specifico del fluido,  $\gamma$  (le cui dimensioni sono  $[L^3 TM^{-1}]$ ). Il parametro  $n^2/\hat{k}$ , nel seguito indicato con  $\hat{\xi}$ , si assume costante e indipendente dalla frequenza della forzante.

Il sistema oggetto di studio è rappresentato in figura 5: la superficie della parete e la base a contatto col terreno si considerano impermeabili. Come nei casi precedenti, il sistema è sottoposto a una sollecitazione armonica orizzontale  $\ddot{x}(t)$  agente alla base, e si trova in stato piano di deformazione.

Equazioni di campo

Trascurando le forze per unità di massa e tenendo conto della (28), le equazioni del moto per le due fasi si possono scrivere come segue:

$$G^* \nabla^2 \mathbf{u}^s + (G^* + \lambda_s) \nabla \Delta \mathbf{u}^s + \lambda_{sw} \nabla \Delta \mathbf{u}^w - \hat{\xi} (\dot{u}^s - \dot{u}^w) = \rho^s (\ddot{u}^s + \ddot{x}) \quad (29)$$

$$-n \nabla p + \hat{\xi} (\dot{u}^s - \dot{u}^w) = \rho^w (\ddot{u}^w + \ddot{x}) \quad (30)$$

La (29) esprime l'equazione di Navier per la fase solida; la (30) è la legge di Darcy in forma dinamica. [THEODORAKOPOULOS *et al.*, 2001]

Poiché l'accelerazione  $\ddot{x}(t)$  agisce in direzione orizzontale, è possibile semplificare il problema trascurando la componente verticale di tensione totale [VELETSOS e YOUNAN, 1994]; ossia si impone  $\sigma_{22} = \sigma_{22}^s - np = 0$ . Sotto tale ipotesi, dalle equazioni del moto si ricava la relazione seguente:

$$2G^* u_{2,2}^s + \lambda_s \Delta u^s + \lambda_{sw} \Delta u^w - np = 0 \quad (31)$$

Riscrivendo la (27), si può esprimere la divergenza dello spostamento della fase fluida nella forma:

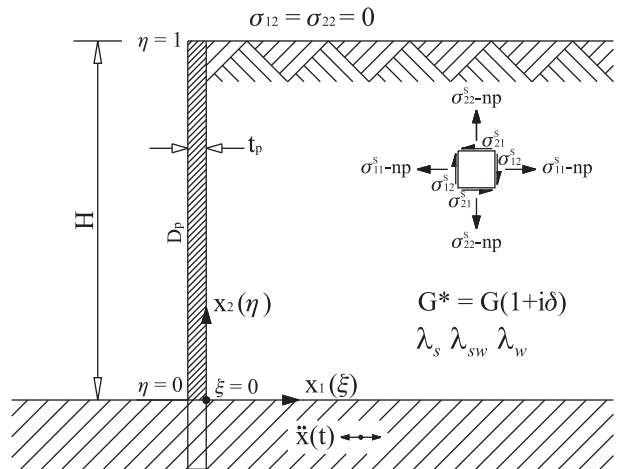


Fig. 5 – Paratia infissa a contenimento di uno strato semi-illimitato di terreno poroviscoelastico.  
 Fig. 5 – Flexible earth cantilever diaphragm wall retaining a semi-infinite poroviscoelastic soil layer.



$$\Delta \mathbf{u}^w = - \frac{np + \lambda_{sw} \Delta \mathbf{u}^s}{\lambda_w} \quad (32)$$

Sostituendo la (32) nella (31) si ricava l'espressione di  $u_{2,2}^s$ :

$$u_{2,2}^s = \frac{np(\lambda_w + \lambda_{sw}) - u_{1,1}^s(\lambda_s \lambda_w - \lambda_{sw}^2)}{(2G^* + \lambda_s)\lambda_w - \lambda_{sw}^2} \quad (33)$$

Sostituendo la (33) nella (27) è possibile scrivere:

$$u_{2,2}^w = -u_{1,1}^w - \frac{np(2G^* + \lambda_s + \lambda_{sw}) + 2G^*\lambda_{sw}u_{1,1}^s}{(2G^* + \lambda_s)\lambda_w - \lambda_{sw}^2} \quad (34)$$

Inoltre, sostituendo le espressioni di  $u_{2,2}^s$  e  $u_{2,2}^w$  nell'equazione di equilibrio (29) in direzione orizzontale si ricava la (35), mentre applicando l'operatore divergenza ad entrambi i membri della (30) si trova la (36); infine la (37) è semplicemente l'equazione di Darcy (30) scritta nella sola direzione orizzontale:

$$\begin{aligned} & [(4G^* + 3\lambda_s)\lambda_w - 3\lambda_{sw}^2]G^*u_{1,1}^s + [\lambda_w(G^* + \lambda_s) - \lambda_{sw}(G^* + \lambda_{sw})]np_{,1} + \\ & + [(2G^* + \lambda_s)\lambda_w - \lambda_{sw}^2][G^*u_{1,2,2}^s + \hat{\xi}(u_{1,1}^w - u_{1,1}^s) - \rho^s(i_{1,1}^s + \ddot{x})] = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & 2G^*\hat{\xi}(\lambda_w + \lambda_{sw})u_{1,1}^s + \hat{\xi}(2G^* + \lambda_s + \lambda_w + 2\lambda_{sw})np + 2G^*\lambda_{sw}\rho^w u_{1,1}^s + \\ & + \rho^w(2G^* + \lambda_s + \lambda_{sw})np - [(2G^* + \lambda_s)\lambda_w - \lambda_{sw}^2]n\nabla^2 p = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$np_{,1} + \hat{\xi}(u_{1,1}^w - u_{1,1}^s) + \rho^w(u_{1,1}^w + \ddot{x}) = 0 \quad (37)$$

Le (35), (36) e (37) costituiscono un sistema di 3 equazioni alle derivate parziali nelle 3 incognite  $u_{1,1}^s$ ,  $u_{1,1}^w$ ,  $p$ .

#### Condizioni al contorno

– Il campo di spostamento alla base dello strato viene assunto uguale a zero per entrambe le fasi:

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^s(x_1, x_2, t) = \mathbf{u}^w(x_1, x_2, t) = 0 \\ & \text{per } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0 \quad \forall t. \end{aligned} \quad (38a)$$

– Lo spostamento orizzontale del terreno e del fluido a contatto con la parete coincide con lo spostamento orizzontale della stessa:

$$\begin{aligned} & u_{1,1}^s(x_1, x_2, t) = u_{1,1}^w(x_1, x_2, t) = w(x_2, t) \\ & \text{per } x_1 = 0 \text{ e } 0 \leq x_2 \leq H \quad \forall t. \end{aligned} \quad (38b)$$

– In assenza di precarico all'estradosso del rilevato deve risultare  $p = 0$  e  $\sigma_{22} = 0$ . Nel seguito solo questa ultima condizione viene esplicitamente

imposta, come recentemente proposto [THEODORAKOPOULOS *et al.*, 2001]:

$$\begin{aligned} & \sigma_{12}(x_1, x_2, t) = \sigma_{22}(x_1, x_2, t) = 0 \\ & \text{per } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = H \quad \forall t \end{aligned} \quad (38c)$$

Anche nel caso in esame la soluzione viene cercata mediante separazione delle variabili, assumendo di tipo armonico le funzioni incognite.

Introducendo le coordinate adimensionalizzate  $\xi = x_1/H$ ,  $\eta = x_2/H$ , le grandezze incognite vengono cercate nella forma:

$$\begin{aligned} & u_{1,1}^s(x_1, x_2, t) = U(\xi, \eta)e^{i\omega t} \\ & u_{1,1}^w(x_1, x_2, t) = W(\xi, \eta)e^{i\omega t} \\ & p(x_1, x_2, t) = P(\xi, \eta)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (39)$$

In maniera del tutto analoga al caso precedente, le ampiezze delle funzioni incognite assumono la forma:

$$U(\xi, \eta) = CH \sum_{k=1}^{\infty} U_k(\xi) \sin(\lambda_k \eta); \quad (40a)$$

$$W(\xi, \eta) = CH \sum_{k=1}^{\infty} W_k(\xi) \sin(\lambda_k \eta); \quad (40b)$$

$$nP(\xi, \eta) = CG \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\xi) \sin(\lambda_k \eta); \quad (40c)$$

essendo

$$C = \rho_s \frac{AH}{G^*} \quad (41)$$

Sostituendo le (40) nella (37) e moltiplicando per  $-H/CG^*$ , si ha per il generico termine:

$$P_k' + \frac{i\omega\hat{\xi}H^2}{G^*}(W_k - U_k) - \frac{\rho^w\omega^2H^2}{G^*}W_k + \frac{2}{\lambda_k} \frac{\rho^w\ddot{x}H}{CG^*} = 0 \quad (42)$$

Si introducono i rapporti:

$$Z = \frac{\omega\hat{\xi}H^2}{G^*}; \quad R_s = \rho^s \frac{\omega^2H^2}{G^*}; \quad R_w = \rho^w \frac{\omega^2H^2}{G^*}; \quad (43 \text{ a,b,c})$$

e i parametri reali:

$$A_s = \rho^s \frac{\ddot{x}H}{CG^*}; \quad A_w = \rho^w \frac{\ddot{x}H}{CG^*}; \quad L_s = \frac{\lambda_s}{G^*}; \quad (44 \text{ a,b,c,d,e})$$

$$L_w = \frac{\lambda_w}{G^*}; \quad L_{sw} = \frac{\lambda_{sw}}{G^*};$$

Sostituendo le (40) nella (35) e nella (36), moltiplicando rispettivamente per  $H/CG^*$  e per  $H^2/CG^*$  e tenendo conto delle (43) e (44), le espressioni precedenti divengono:

$$P_k' + iZ(W_k - U_k) - R_w W_k + \frac{2}{\lambda_k} A_w = 0 \quad (45)$$



$$[(4+3L_s)L_w-3L_{sw}^2]U_k''+[L_w(1+L_s)-L_{sw}(1+L_{sw})]P_k'+$$

$$+[(2+L_s)L_w-L_{sw}^2]\left[-\lambda_k^2 U_k+iZ(W_k-U_k)+R_s U_k-\frac{2}{\lambda_k}A_s\right]=0 \quad (46)$$

$$-[(2+L_s)L_w-L_{sw}^2](P_k''-\lambda_k^2 P_k)+2[(L_w+L_{sw})iZ-L_{sw}R_w]U_k'+$$

$$+[(2+L_s+L_{sw})(iZ-R_w)+(L_w+L_{sw})iZ]P_k=0 \quad (47)$$

Come si può notare, le uniche grandezze che dipendono direttamente dalla pulsazione  $\omega$  sono i parametri  $Z$ ,  $R_s$  e  $R_w$  (43). Se si introduce la pulsazione fondamentale  $\omega_1$  come funzione della densità intrinseca della matrice solida  $\rho_s$ , ossia:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2H} \sqrt{\frac{G}{\rho_s}} \quad (48)$$

si può esplicitare la dipendenza dei parametri dal rapporto  $\omega/\omega_1$ , ovvero:

$$Z = \frac{\pi}{2} \frac{\chi}{(1+i\delta)} n^2 \frac{\omega}{\omega_1}; \quad R_s = \frac{(1-n)}{(1+i\delta)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2; \quad (49)$$

$$R_w = \frac{n\rho_w}{(1+i\delta)\rho_s} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$$

essendo:

$$\chi = \frac{H}{k \sqrt{G\rho_s}} \quad (50)$$

Dalla (45) si può ricavare l'espressione di  $W_k-U_k$ , che sostituita nella (46) e moltiplicando per  $(iZ-R_w)$  porge:

$$[(4+3L_s)L_w-3L_{sw}^2](iZ-R_w)U_k''+[(2+L_s)L_w-L_{sw}^2] \cdot$$

$$\cdot \left[ (R_s-\lambda_k^2)(iZ-R_w)+iZR_w \right] U_k - \frac{2}{\lambda_k} \left( iZ(A_s+A_w)-A_sR_w \right) + \quad (51)$$

$$- [iZ(L_w-L_{sw})+R_w((1+L_s)L_w-(1+L_{sw})L_{sw})]P_k'=0$$

Scrivendo le ampiezze dello spostamento e della pressione nella forma:

$$U_k(\xi) = C_k e^{-\alpha_k \xi} + V_k; \quad P_k(\xi) = D_k e^{-\alpha_k \xi} \quad (52)$$

le (51), (47) divengono rispettivamente:

$$\{[(4+3L_s)L_w-3L_{sw}^2](iZ-R_w)\alpha_k^2+[(2+L_s)L_w-L_{sw}^2] \cdot$$

$$\cdot [(R_s-\lambda_k^2)(iZ-R_w)+iZR_w]\}C_k + \quad (53)$$

$$+ [iZ(L_w+L_{sw})+R_w((1+L_s)L_w-(1+L_{sw})L_{sw})]\alpha_k D_k = 0$$

$$- 2\alpha_k [(L_w+L_{sw})iZ-L_{sw}R_w]C_k + \{[(2+L_s+L_{sw})(iZ-R_w)+$$

$$+(L_w+L_{sw})iZ]-[(2+L_s)L_w-L_{sw}^2](\alpha_k^2-\lambda_k^2)\}D_k = 0 \quad (54)$$

Il sistema costituito dalle (53), (54) ammette soluzioni anche non banali se e soltanto se il determi-

nante dei suoi coefficienti è nullo; imponendo tale condizione si perviene alla seguente equazione bi-quadratica in  $\alpha_k$ :

$$a\alpha_k^4 + b_k\alpha_k^2 + c_k = 0 \quad (55)$$

L'equazione fornisce le 2 radici aventi parte reale positiva:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{-b_k - \sqrt{b_k^2 - 4ac_k}}{2a}}; \quad \beta_k = \sqrt{\frac{-b_k + \sqrt{b_k^2 - 4ac_k}}{2a}} \quad (56)$$

Le espressioni delle ampiezze dello spostamento e della pressione diventano allora:

$$U_k(\xi) = A_k e^{-\alpha_k \xi} + B_k e^{-\beta_k \xi} + V_k; \quad P_k(\xi) = C_k e^{-\alpha_k \xi} + D_k e^{-\beta_k \xi} \quad (57)$$

#### Equazione del moto della parete

L'equazione della linea elastica per la parete risulta, analogamente al caso precedente:

$$D_p \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \sigma_{11} \quad (58)$$

ove, con  $\sigma_{11} = \sigma_{11}^s - np$  si è indicata la componente orizzontale di tensione totale. Tale tensione, utilizzando le (26), (27) e le espressioni di  $u_{2,2}^s$  e  $u_{2,2}^w$  unitamente all'ipotesi di perfetta aderenza tra terreno e parete può essere scritta come:

$$\sigma_{11} = 2G \frac{2((G^* + \lambda_s)\lambda_w - \lambda_{sw}^2)u_{1,1}^s - (\lambda_w + \lambda_{sw})np}{(2G + \lambda_s)\lambda_w - \lambda_{sw}^2} \quad (59)$$

Sostituendo le (57) per  $\xi = 0$  nella (59), la (58) assume la forma:

$$\frac{D_p}{2G^*H^3} \frac{\partial^4 w(\eta)}{\partial \eta^4} = CH \sum_{k=1}^{\infty} \cdot \quad (60)$$

$$\cdot \frac{2((1+L_s)L_w-L_{sw}^2)U_k(0)-(L_w+L_{sw})P_k(0)}{(2+L_s)L_w-L_{sw}^2} \sin(\lambda_k \eta)$$

L'integrazione della (60), con le condizioni al contorno che rappresentano le condizioni di incastro perfetto alla base della paratia, consente di determinare l'espressione dell'ampiezza dello spostamento della parete; per brevità se ne omette il calcolo.

L'ampiezza  $S_{11}(\xi, \eta)$  della componente orizzontale di tensione totale si ricava immediatamente, sostituendo le (57) nella (59). Una volta ottenuta la funzione  $S_{11}(\xi, \eta)$ , in maniera del tutto analoga al caso precedente, è possibile risalire per equilibrio alle funzioni taglio  $T(\eta)$  e momento flettente  $M(\eta)$  sulla parete.



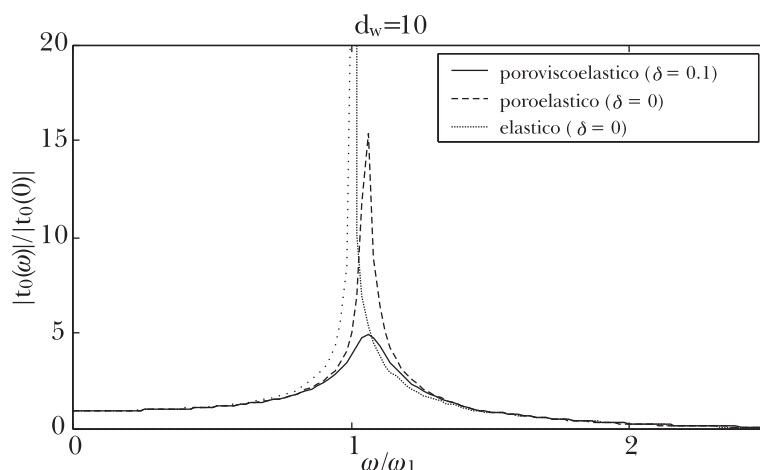


Fig. 6 – Fattori di amplificazione dinamica per il taglio alla base per  $d_w = 10$ . Per il materiale poroso si è assunto:  $H = 8[m]$ ,

$\hat{k} = 10^{-6}[m^3s/Kg]$ ,  $n = 0.1$ .

Fig. 6 – Amplification factors for the base shear force at the wall for  $d_w = 10$ . For poroelastic model it has been assumed:  $H = 8[m]$ ,

$\hat{k} = 10^{-6}[m^3s/Kg]$ ,  $n = 0.1$ .

Le costanti di integrazione, come per il modello elastico, possono essere determinate in forma chiusa.

## 6. Confronto tra materiale viscoelastico e poroviscoelastico lineare

La risposta a carichi statici del sistema poroviscoelastico è del tutto simile alla risposta pseudostatica del modello elastico. Nel seguito viene dunque discussa unicamente la risposta ad azioni armoniche.

### 6.1. Variabilità dei parametri nel modello poroviscoelastico

I parametri  $\lambda_s$ ,  $\lambda_{sw}$ , e  $\lambda_w$  che caratterizzano il comportamento del modello poroelastico sono funzioni dei moduli di comprimibilità delle fasi.

È al di fuori dello scopo del presente lavoro indagare l'influenza dei vari parametri che caratterizzano la risposta dinamica di un terreno poroviscoelastico. Nel confrontare i risultati ottenuti dal modello poroelastico rispetto a quelli forniti dal modello viscoelastico si farà riferimento ai parametri di un particolare tipo di terreno, definito in letteratura *Berea sandstone* e diffusamente studiato [RICE e CLEARY, 1976]. In particolare, indicando con  $K_s$ ,  $K_w$  e  $K$  i moduli di comprimibilità rispettivamente della fase solida, di quella fluida e della miscela, si assume:

$K_s = 36000[MPa]$ ,  $K_w = 3300[MPa]$ ,  $K = 8841 [MPa]$ ;

mentre il modulo di elasticità tangenziale  $G$  del solido viene assunto pari a  $6000 [MPa]$ .

Indicando con  $n$  la porosità e facendo le posizioni:

$$\kappa = 1 - \frac{K}{K_s}; \quad B^{-1} = + \frac{n}{\kappa} \left( \frac{K}{K_w} - \frac{K}{K_s} \right) \quad (61)$$

si calcolano le costanti di Lamé tramite le relazioni seguenti:

$$\lambda_w = \frac{BK n^2}{\kappa(1-\kappa B)}; \quad \lambda_{sw} = \left( \frac{\kappa}{n} - 1 \right) \lambda_w; \quad \lambda_s = K - \frac{2}{3}G + \frac{\lambda_{sw}^2}{\lambda_w} \quad (62)$$

### 6.2. Risposta armonica

La figura 6 illustra l'andamento dei fattori amplificativi per il taglio alla base, per i valori della flessibilità relativa  $d_w$  e del coefficiente di viscosità  $\delta$  indicati, e per un rilevato di altezza  $H = 8m$  assumendo, per il modello poro(visco)elastico,  $\hat{k} = 10^{-6} [m^3s/Kg]$ ,  $n = 0.1$ . Si osservi che in corrispondenza ad una forzante di pulsazione pari a quella fondamentale ( $\omega/\omega_1 = 1$ ) il modello poroelastico fornisce una risposta limitata, pur assumendo nulla la viscosità del solido. Ciò è dovuto alla viscosità del fluido in moto relativo rispetto allo scheletro solido, funzione del coefficiente di permeabilità e della porosità del sistema ( $\hat{\xi} = n^2/\hat{k}$ ). Ovviamente, l'eventuale presenza di una dissipazione viscosa dello scheletro solido, rappresentata da un valore del coefficiente  $\delta > 0$ , riduce ulteriormente il fattore di amplificazione.

La figura 7 mostra, per i valori della permeabilità  $\hat{k}$  e del coefficiente viscoso  $\delta$  indicati, come il valore di picco della risposta fornita dal modello poroviscoelastico diminuisca al crescere della po-

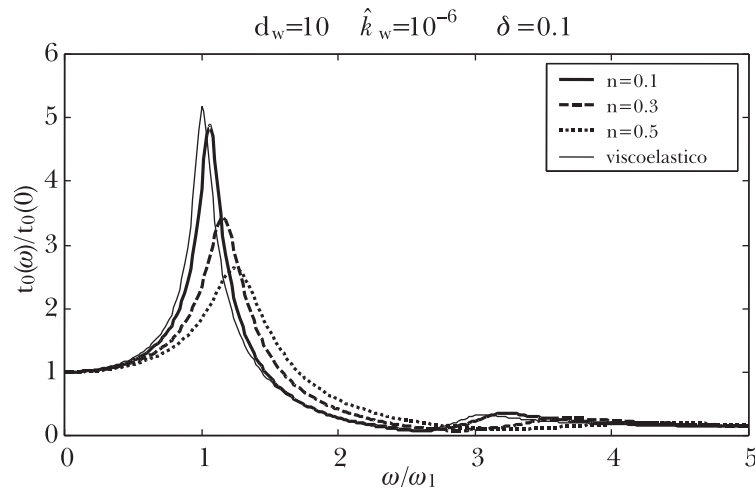


Fig. 7 – Fattori di amplificazione dinamica per il taglio alla base per  $d_w = 10$ ,  $\delta = 0.1$ . Per il materiale poroso si è assunto:  $H = 8[m]$ ,  $\hat{k} = 10^{-6}[m^3s/Kg]$ .  
 Fig. 7 – Amplification factors for base shear at the wall for  $d_w = 10$ ,  $\delta = 0.1$ . For poroelastic model it has been assumed:  $H = 8[m]$ ,  $\hat{k} = 10^{-6}[m^3s/Kg]$ .

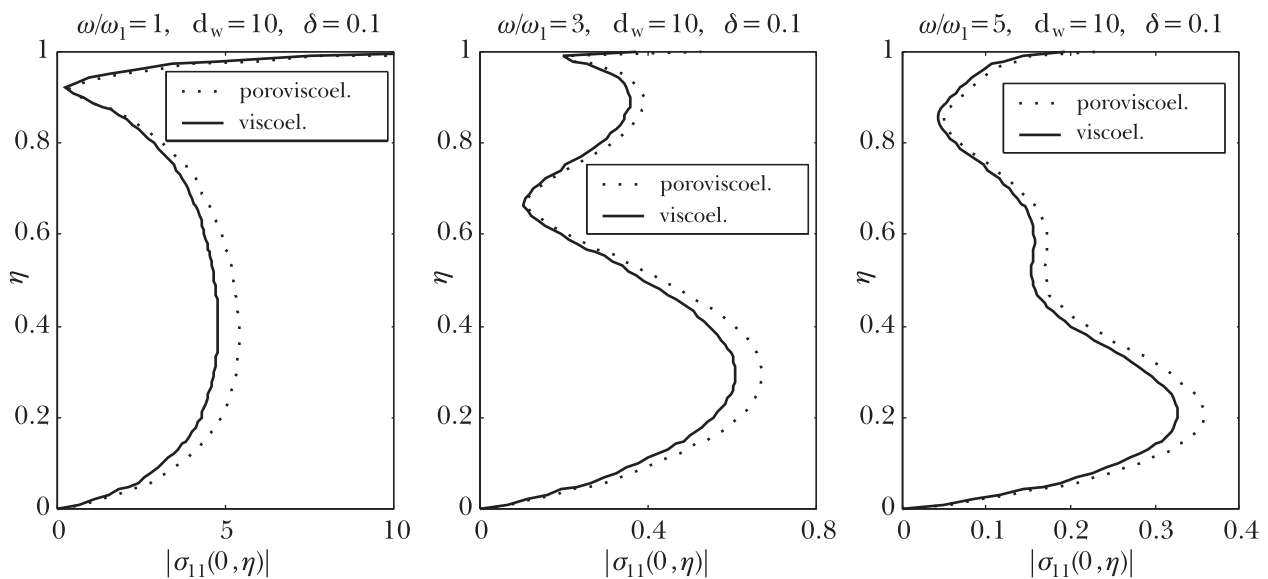


Fig. 8 – Andamento del modulo delle pressioni orizzontali sulla parete per  $d_w = 10$ ,  $\delta = 0.1$ , in corrispondenza delle prime 3 forme modali. Le curve continue rappresentano la risposta del modello viscoelastico, quelle tratteggiate si riferiscono al modello poroviscoelastico.  
 Fig. 8 – Vertical variation of horizontal stress at the wall for  $d_w = 10$ ,  $\delta = 0.1$ , for various values of ratio  $\omega/\omega_1$ . The solid lines depict the results of viscoelastic model; the dashed lines describe the results of the poroelastic model.

rosità  $n$ . Ciò è una conseguenza delle dissipazioni prodotte dal moto del fluido rispetto allo scheletro solido, proporzionali al quadrato della porosità. Inoltre si constata, al crescere di  $n$ , una traslazione dei picchi di risposta verso valori crescenti delle ascisse; infatti all'aumentare della porosità si ha una diminuzione della massa dello scheletro solido e quindi un aumento della pulsazione naturale del sistema.

Si osservi che, per lo stesso valore della viscosità dello scheletro solido, il terreno poroviscoelastico dissipa più energia rispetto a quello viscoelastico, a conferma di quanto asserito precedentemente.

In figura 8 sono rappresentati i moduli della componente orizzontale di tensione sulla parete alle prime 3 frequenze di risonanza, per il valore della flessibilità  $d_w = 10$  e per un coefficiente di viscosità  $\delta = 0.1$  (per il modello poroviscoelastico si è assunto

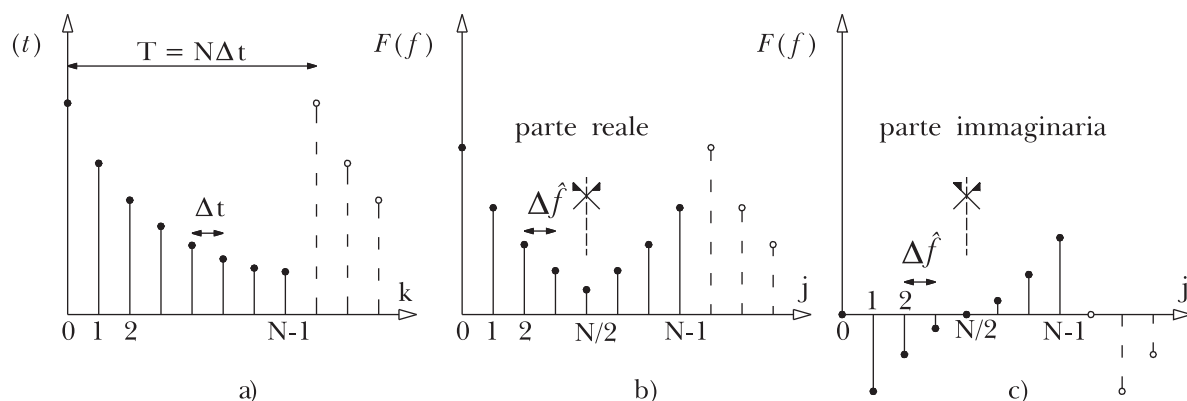


Fig. 9 – Parte reale b) e parte immaginaria c) della trasformata di Fourier di un segnale generico  $f(t)$ .

Fig. 9 – Real part b) and imaginary part c) of the Fourier transform of an arbitrary signal  $f(t)$ .

$n, \hat{k} \neq 0$ ). Come si può notare, le 2 modellazioni forniscono risultati comparabili, anche se la soluzione del modello poroviscoelastico, relativa al “Berea sandstone” che presenta una densità e un modulo di taglio elevati, tende a fornire risultati superiori rispetto a quella del modello viscoelastico.

## 7. Risposta ad una sollecitazione transitoria

La risposta dinamica di sistemi aventi comportamento lineare, soggetti a una forzante arbitraria comunque variabile nel tempo, può essere valutata utilizzando il metodo delle trasformate discrete di Fourier (D.F.T.). Il grande successo di tale tecnica è dovuto all'utilizzo di alcuni algoritmi, indicati con l'acronimo F.F.T. (Fast Fourier Transform), che consentono di calcolare in maniera molto efficiente la trasformata di un segnale fornito per punti. In virtù della supposta linearità del sistema, la risposta viene determinata sovrapponendo gli effetti provocati dalla sollecitazione transitoria nel dominio delle frequenze.

Infatti è possibile, dato un segnale generico, determinarne il contenuto in frequenza  $\hat{f}$  scomponendolo in armoniche di periodo assegnato; e può essere definita la trasformata e l'antitrasformata di Fourier (63) e (64) di una funzione generica del tempo  $\tilde{f}(t)$  nel modo seguente [Fourier Transforms, SNEDDON, 1950]:

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}(\tilde{f}) \quad (63)$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{F}) \quad (64)$$

ove la variabile reale  $\omega = 2\pi \hat{f}$  rappresenta la pulsazione.

Peraltro, come ben noto, per i diversi terremoti sono disponibili gli accelerogrammi rilevati durante gli eventi sismici e costituiti da un insieme di valori

discreti; la distanza temporale che intercorre tra la rilevazione di 2 punti successivi della sollecitazione registrata è detta *intervallo di campionamento*.

Sia  $\Delta t$  l'intervallo di campionamento di una funzione reale assegnata  $f$ , rappresentata nel dominio del tempo da  $N$  punti (da 0 a  $N-1$ ). La funzione  $f$  si assume periodica, con periodo  $T$  pari a  $N\Delta t$ ; sia inoltre  $t_k$  il  $k$ -esimo istante di tempo, pari a  $k\Delta t$  ( $0 \leq k \leq N-1$ ). Se si assume  $\Delta t = 1$ , le (63), (64) possono essere facilmente applicate al caso discreto nel seguente modo [PRESTINI, 1996] (Fig. 9):

$$F(j\Delta\hat{f}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-2\pi i k j / N} \quad 0 \leq j \leq N-1 \quad (65)$$

$$f(k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F(j\Delta\hat{f}) e^{-2\pi i k j / N} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (66)$$

La (65) fornisce i valori della trasformata discreta dei valori  $f(k\Delta t)$  come combinazioni lineari di armoniche; si noti che si ottengono  $N$  valori di  $F$ , e che tutti i termini della funzione  $f$  concorrono a determinare ogni valore della trasformata  $F$ . L'intervallo di frequenza  $\Delta\hat{f}$ , per il Teorema di Nyquist, risulta definito come:

$$\Delta\hat{f} = \frac{1}{N\Delta t} \quad (67)$$

Il problema può essere formulato nel modo seguente.

Sia  $\ddot{x}_g(t_k)$  l'accelerazione al piede del diaframma, fornita per punti, e sia  $N$  il numero totale di punti.

Si vuole determinare la risposta  $x(t)$  del sistema terreno-parete descritto nei paragrafi 2.1, 3.

– Si calcola innanzitutto la trasformata  $X_g(\omega_k)$  dei valori della sollecitazione tramite la (65), ove le pulsazioni sono definite come:

$$\omega_k = k\Delta\omega = k \frac{2\pi}{N\Delta t}; \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (68)$$

- Si costruisce quindi la sequenza  $T_r$ , data dai valori della *funzione di trasferimento* in corrispondenza delle pulsazioni determinate tramite la (68), ossia [VELETSOS e VENTURA, 1985]:

$$\begin{aligned} T_r &= T(\omega_r) & 0 \leq r \leq N/2 \\ T_r &= \bar{T}(\omega_{N-r}) & 1+N/2 \leq r \leq N-1 \end{aligned} \quad (69)$$

Non occorre calcolare  $T_r$  per tutte le frequenze dello spettro, ma ci si arresta alla pulsazione massima  $\omega_{MAX} = \pi/\Delta t$ ; i valori per le pulsazioni negative vengono ricostruiti per simmetria.

- Si esegue il prodotto tra la funzione trasferimento, calcolata come si è detto, e la trasformata  $X_g(\omega_k)$ , e si costruisce il vettore:

$$X_r = F_r T_r \quad 0 \leq r \leq N-1 \quad (70)$$

avendo posto  $F_r = X_g(\omega_r)$

- Applicando la (66) si trova la soluzione  $x$  come una sequenza di  $N$  valori:

$$x_k = x(k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{i2\pi kr/N} \quad (71)$$

Si osservi che nei paragrafi precedenti sono state ricavate le funzioni spostamento, taglio ecc. del sistema nel dominio delle frequenze, cioè le funzioni di trasferimento delle grandezze di interesse. È allora possibile, dato un accelerogramma  $\ddot{x}_g(t)$ , determinare la risposta del sistema.

Infatti, se si costruisce il vettore:

$$A_r = \sum_{k=0}^{N-1} \ddot{x}_g(k\Delta t) \cdot e^{-i(2\pi \cdot k \cdot r)/N} \quad (72)$$

si può ottenere, ad esempio, lo spostamento in sommità della parete applicando la formula:

$$\begin{aligned} w_k = w(k\Delta t) &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} A_r w_r e^{i2\pi kr/N}; \\ w_r &= W(\eta=1, \omega/\omega_r) \end{aligned} \quad (73)$$

## 8. Alcune applicazioni

### 8.1. Confronto con i risultati di letteratura

Si riporta in figura 10 la componente N-S dell'accelerogramma registrato durante il terremoto di El Centro (Maggio 1940, California). I valori in ordinata rappresentano le accelerazioni espresse in parti dell'accelerazione di gravità  $g$ .

In figura 11 è riportato l'andamento dei valori massimi del taglio sulla paratia ottenuti per il modello viscoelastico descritto al paragrafo 2.1, adimensionalizzati secondo il termine  $\rho a_{MAX} H^2$ , al variare del periodo naturale  $T_1$  del sistema parete-terreno sottoposto al terremoto di El Centro. La curva ottenuta viene confrontata con quella riportata in [VELETSOS e YOUNAN, 1997]: il grafico è relativo a un valore della flessibilità  $d_w = 0$  e a un coefficiente  $\delta = 0.1$ . Questi autori hanno assunto un coefficiente dissipativo  $\xi$  pari al 4% per il materiale costituente il diaframma, che nel presente lavoro si è trascurato per ottenere sollecitazioni approssimate per eccesso; si rileva comunque una buona concordanza tra i risultati, validando così il metodo esposto.

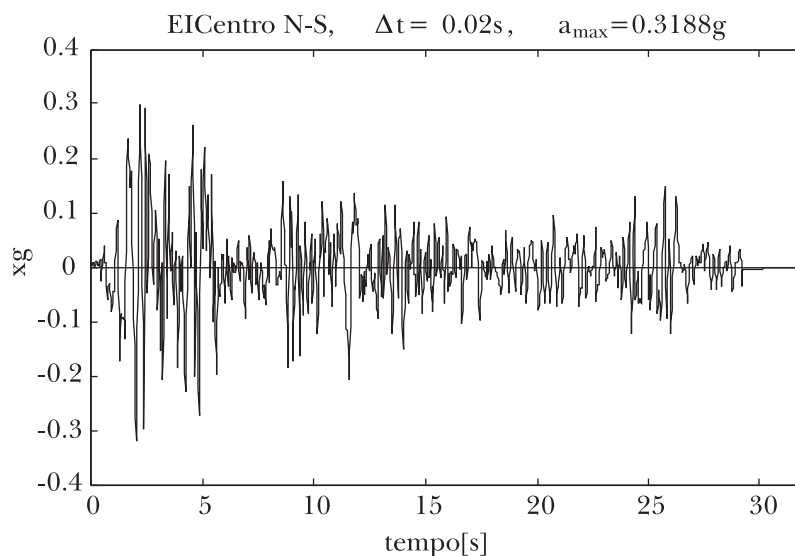


Fig. 10 – Accelerogramma della componente N-S del terremoto di El Centro, campionato a 0.02 s.; l'accelerazione massima risulta  $a_{max} = 0.3188g$ .

Fig. 10 – Ground motion record of the N-S component of the 1940 El Centro earthquake, sample at 0.02 s.; the peak acceleration results  $a_{max} = 0.3188g$ .

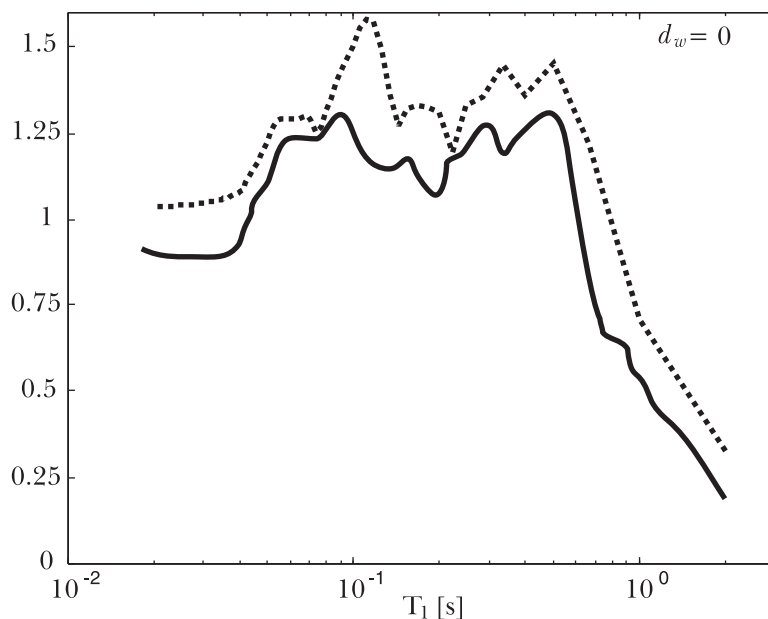


Fig. 11 – Andamento dei valori massimi del taglio alla base della parete per  $d_w = 0$  e per diversi valori del periodo naturale  $T_1$ : la curva tratteggiata si riferisce al modello riportato nel presente lavoro; la curva a tratto continuo è stata rilevata dal lavoro citato di VELETSOS e YOUNAN [1997].

Fig. 11 – Variation of the maximum base shear stress at the wall for  $d_w = 0$ , varied with natural period  $T_1$ : dashed line depicts the results of the viscoelastic model presented in the present work; the solid lines is acquired by VELETSOS and YOUNAN [1997].

In figura 12 è rappresentato l'andamento nel tempo del taglio alla base della paratia assumendo i seguenti parametri:  $d_w = 10$ ;  $\delta = 0.1$ ;  $\omega_1 = 10$  [rad/s]; considerando il terreno viscoelastico e il "Berea Sandstone", sottoposta all'accelerogramma di El Centro. Si sono ottenuti i valori massimi seguenti:

per il modello viscoelastico

$$t_{\max} = 1.019 \rho a_{\max} H^2, \text{ dopo } 2.14\text{s};$$

per il modello poroviscoelastico

$$t_{\max} = 0.5442 \rho a_{\max} H^2 \text{ dopo } 2.04 \text{ s.}$$

È da osservare che il valore della densità intrinseca  $\rho_s$  risulta più elevato della densità  $\rho$ . Ad esempio, assumendo per un terreno a grana fine, tipico di un deposito alluvionale, una densità pari a 1700 [Kg/m<sup>3</sup>] e per il modello poroelastico una densità intrinseca  $\rho_s = 2400$  [Kg/m<sup>3</sup>], per un rilevato alto 8 [m] il modello viscoelastico fornisce  $t_{\max} \blacktriangleright 34680$  [Kg/m], mentre dal secondo modello si trova  $t_{\max} \blacktriangleright 27760$  [Kg/m].

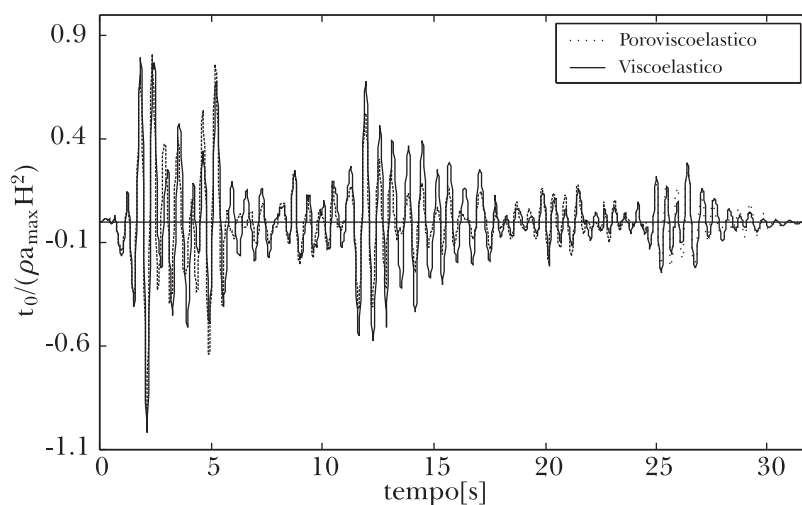


Fig. 12 – Andamento del taglio al piede della paratia per il modello poroviscoelastico e viscoelastico.

Fig. 12 – Base shear stress at the wall obtained by poroelastic model and viscoelastic model.

### 8.2 Comportamento di paratie flessibili soggette a terremoti di bassa intensità

Si considera la paratia in acciaio riportata in figura 13, a sostegno di un rilevato di altezza 6.50 [m], avente un momento d'inerzia pari a  $J_p = 3.2 \cdot 10^{-4} [\text{m}^4/\text{m}]$  e un modulo elastico  $E_p = 2.06 \cdot 10^5 [\text{MPa}]$ . La presenza del tirante non è simulata, tuttavia si suppone che il suo effetto sia

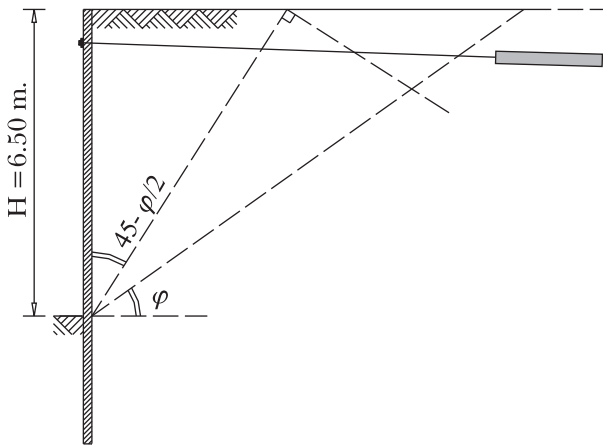


Fig. 13 – Paratia in acciaio a sostegno di un rilevato di altezza 6.5 metri.

Fig. 13 – Flexible retaining diaphragm of height 6.5 m.

tale da garantire la condizione di perfetta aderenza tra parete e terreno.

Il terreno viene assunto sia di tipo viscoelastico che poroviscoelastico: per entrambi ci si riferisce a dati dedotti sperimentalmente e relativi a siti della provincia di Ferrara, al fine di poter confrontare la risposta fornita dalle modellazioni [LANZONI *et al.*, 2005].

Per il modello viscoelastico lineare si è ottenuto:

$$d_w \cong 200, v = 1/3, \delta = 0.1, G = 50 [\text{MPa}],$$

$$\rho = 1700 [\text{Kg}/\text{m}^3], \omega_1 \cong 40 [\text{rad}/\text{s}];$$

mentre dal modello poroviscoelastico lineare risulta:

$$d_w \cong 300, \delta = 0.1, n = 0.4, \hat{k} = 1.02 \cdot 10^{-9} [\text{m}^3/\text{Kg}],$$

$$G = 74 [\text{MPa}], \rho_s = 2400 [\text{Kg}/\text{m}^3], \omega_1 \cong 42 [\text{rad}/\text{s}],$$

$$K_s = 36000 [\text{MPa}], K_w = 1900 [\text{MPa}], K = 81 [\text{MPa}].$$

La struttura si considera sottoposta a 2 terremoti avvenuti recentemente, di bassa intensità ma di contenuto in frequenza sensibilmente diverso, il sisma di Novellara dell'Ottobre 1996 (componente N-S,  $t = 0.01 \text{ s}$ ,  $a_{\text{max}} = 0.1423 \text{ g}$ ) e il terremoto di Assisi del Settembre 1997 (componente N-S,  $t = 0.005 \text{ s}$ ,  $a_{\text{max}} = 0.1890 \text{ g}$ ).

In figura 14 sono riportati gli andamenti del taglio sulla parate negli istanti in cui si registrano le

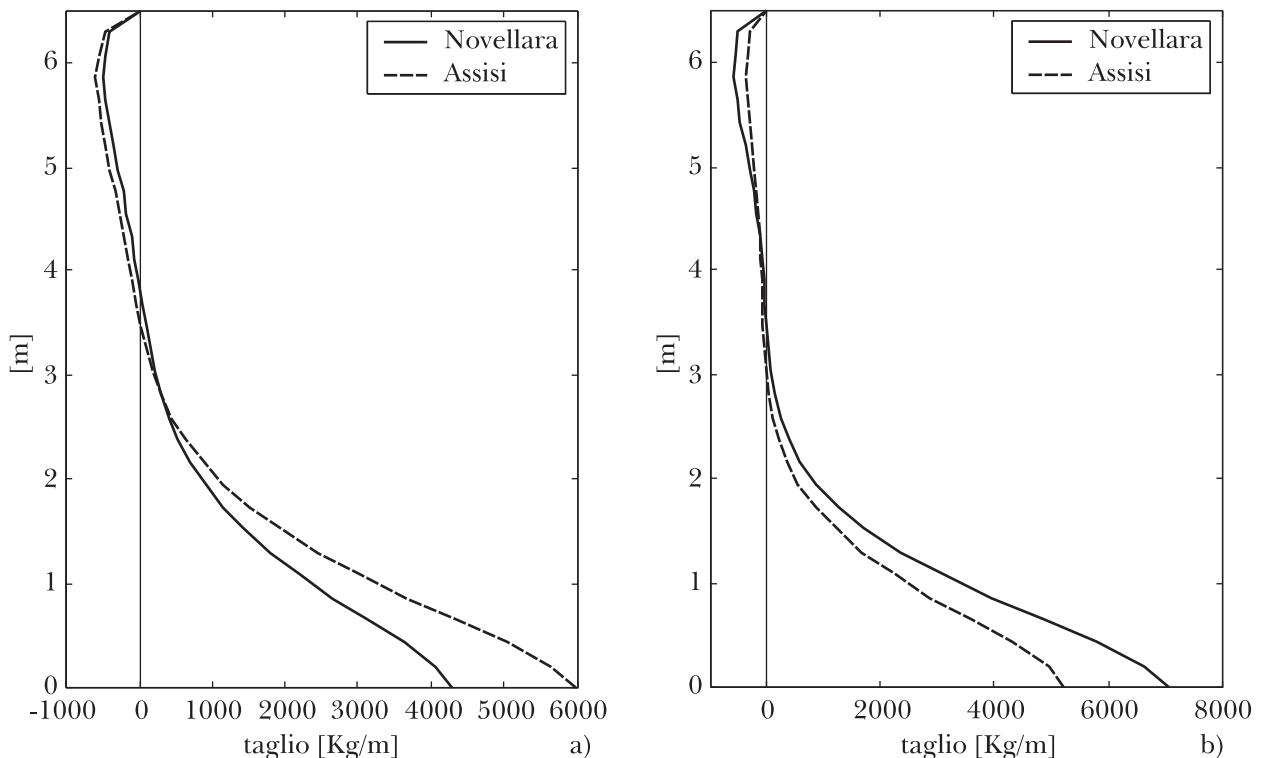


Fig. 14 – Sollecitazioni taglianti sulla parete: a) risultati del modello viscoelastico; b) risultati del modello poroviscoelastico.  
Fig. 14 – Vertical variations of shear stress at the wall: a) results of the viscoelastic model; b) results of the poroviscoelastic model.

massime sollecitazioni al piede (5.38 s. per il sisma di Novellara, 5.34 s. per quello di Assisi); la figura 14a riporta i risultati ottenuti dal modello viscoelastico, mentre quelli forniti dal modello poroviscoelastico sono rappresentati in figura 14b. È interessante notare come l'analisi dinamica fornisca sollecitazioni più gravose per il sisma di Assisi nel caso del modello viscoelastico, mentre accade il contrario per il modello poroviscoelastico. Ciò conferma l'opportunità di adottare modelli che tengano conto delle effettive proprietà del terreno, oltre che della flessibilità dell'opera.

## 9. Bibliografia

- BIOT M.A. (1941) – *General theory of three-dimensional problems consolidation*. J. Appl. Phys., 12, pp. 155-164.
- BOWEN R.M. (1982) – *Compressible porous media models by use of the theory of mixture*. International Journal of Engineering Science, 20(6), pp. 697-735.
- CLOUGH G.W., DUNCAN J.M. (1990) – *Earth Pressure*. In H.Y.Fang (Ed.), *Foundation Engineering Handbook*, pp. 223-235, Chapman & Hall.
- (pr) EN 1998-1 (2003). *Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance – Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings*. CEN European Committee for Standardization, Bruxelles, Belgium.
- (pr) EN 1998-5 (2003) – *Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance – Part 5: Foundations, retaining structures and geotechnical aspects*. CEN European Committee for Standardization, Bruxelles, Belgium, December 2003, final draft.
- GRAFF K.F. (1991) – *Wave motion in elastic solids*. Dover Publications.
- LANZONI L., FIORAVANTE V., RADII E., TRALLI A. (2005) – *Sulla risposta dinamica di paratie flessibili incastrate soggette a sollecitazioni sismiche in depositi alluvionali*. Rivista Italiana di Geotecnica, n. 2 pp. 31-45.
- LORET B., HARIRECHE O. (1991) – *Acceleration waves, flutter instabilities and stationary discontinuities in inelastic porous media*. J. Mech. Phys. Solids, vol. XXXIX, n. 5, pp. 569-606.
- MONONOBE N., MATUO H. (1929) – *On the determination of earth pressures during earthquakes*. Proc. World Engrg. Congr., Tokio, Japan, vol. IX, n. 388.
- NADIM F., WHITMAN R.V. (1983) – *Seismic induced movement of retaining walls*. Journal of Geotechnical and Engineering Division, ASCE, 109(7), pp. 915-931.
- OKABE S. (1924) – *General theory of earth pressure and seismic stability of retaining wall and dam*. J. Japan. Soc. Civ. Engrs. 12(1).
- O.P.C.M. n. 3274, 20 marzo 2003: *Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica; allegato 4: Norme tecniche per il progetto sismico di opere di fondazione e di sostegno dei terreni*.
- PRESTINI E. (1996) – *Applicazioni dell'analisi armonica*. Hoepli.
- RADII E., FIORAVANTE V., TRALLI A. (2004) – *Sulla risposta dinamica di paratie soggette a sollecitazioni sismiche*. XI Congresso Nazionale "L'ingegneria Sismica in Italia".
- RICE J.R., CLEARY M.P. (1976) – *Some basic stress-diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressible constituents*. Rev. Geophys. Space Phys., 14, pp. 227-241.
- RICHARDS J., ELMS D.G. (1979) – *Seismic behaviour of gravity retaining walls*. Journal of Geotechnical and Engineering Division, ASCE, 105(4), pp. 449-464.
- SEED H.B., WHITMAN R.V. (1970) – *Design of earth retaining structures for dynamic loads*. Proc. Spec. Conf. on Lateral Stresses and Des. of Earth Retaining Struct, ASCE, pp. 103-147.
- SNEDDON I. (1995) – *Fourier Transforms*. Dover Publications.
- THEODORAKOPOULOS D.D. (2003) – *Dynamic pressures on a pair of rigid walls retaining poroelastic soil*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 23(1), pp. 41-51.
- THEODORAKOPOULOS D.D., CHASSIAKOS A.P., BESKOS D.E. (2001) – *Dynamic pressures on rigid cantilever walls retaining poroelastic soil media. Part I. First method of solution*. Soil Dyn. Earthquake Engrg., vol. XXI, n. 4, pp. 315-338.
- VELETOS A.S., PARIKH V.H., YOUNAN A.H. (1995) – *Dynamic response of a pair of walls retaining a viscoelastic solid*. Earthquake Engrg. Struct. Dyn., vol. XXIV, pp. 1567-1589.
- VELETOS A.S., VENTURA C.E. (1985) – *Dynamic analysis of structures by the DFT method*. Journal of Structural Engineering, vol. CXI, n. 12.
- VELETOS A.S., YOUNAN A.H. (1997) – *Dynamic response of cantilever retaining walls*. J. Geotech. Geoenv. Engrg., ASCE, vol. CXXIII, n. 2, pp. 161-172.
- VELETOS A.S., YOUNAN A.H. (1994) – *Dynamic soil pressures on rigid vertical walls*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 23(3), pp. 275-301.
- WOOD J.H. (1973) – *Earthquake-induced pressures on rigid wall structure*. Report EERL 73-05, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology.
- YOUNAN A.H., VELETOS A.S. (2000) – *Dynamic response of flexible retaining walls*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 29, pp. 1815-1844.



## **Analytical models for the dynamic analysis of flexible cantilever diaphragm walls subjected to seismic actions**

### **Summary**

*Two analytical models for the study of the complex dynamic interaction between flexible retaining walls and the soil are presented. The developed models account for the energy content of the reference earthquake and of the wall flexibility to overcome the limitations of the pseudostatic methods suggested by the Eurocodes.*

*The models can take into account also the elastic stiffness and the permeability of the soil and simulate the dynamic interaction between soil and the retaining wall for a generic time dependent loading condition by means of the Discrete Fourier Transform (D.F.T.).*

*Two different constitutive models have been developed: a viscoelastic one for low permeable clayey soils and a poro-viscoelastic one for permeable sandy soils.*

*The constitutive equations are here presented. Finally the results are provided considering a number of actual seismic accelerograms presented and compared, when possible, with those provided in the technical literature.*