

SOLLECITAZIONI FLESSIONALI NELLE PAVIMENTAZIONI IN CALCESTRUZZO DI CEMENTO PRECOMPRESSE ESTERNAMENTE

P. FERRARI (*)

SOMMARIO: L'Autore studia le sollecitazioni flessionali nelle pavimentazioni in calcestruzzo di cemento precompresse esternamente, caricate con forze distribuite su un'area circolare e poggiate su sottofondi che reagiscono con pressioni proporzionali ai cedimenti.

I. - Tra le diverse tecniche di precompressione delle pavimentazioni in calcestruzzo di cemento, in questi ultimi anni, specialmente per le piste aeroportuali, si è andato notevolmente affermando il sistema di precompressione esterna, perchè conduce ad una considerevole economia di cavi di acciaio.

Con questo sistema, mentre l'eventuale precompressione trasversale è ottenuta con i cavi tradizionali, la precompressione longitudinale viene realizzata mediante martinetti inseriti in giunti trasversali della pavimentazione, disposti ad intervalli che possono raggiungere i 330 m (pista dell'aeroporto di Bruxelles), e viene equilibrata da due spalle ubicate alle estremità della pavimentazione.

Il calcolo di queste pavimentazioni viene generalmente condotto in modo analogo alle altre pavimentazioni precompresse, salvo a tener conto del rischio di sollevamento delle lastre. Tuttavia qualche osservazione è da farsi circa il calcolo del loro carico limite.

In una precedente nota ⁽¹⁾ si è posto in evidenza il fatto che il calcolo delle pavimentazioni in calcestruzzo precompresso non può essere condotto in regime elastico, perchè il calcestruzzo precompresso, quando venga sottoposto a sollecitazioni flessionali, ha

un comportamento sotto certi aspetti molto vicino a quello dei solidi elasto-plastici. E si è visto che il carico limite di queste pavimentazioni, inteso come il carico al di là del quale hanno inizio le grandi deformazioni della lastra di calcestruzzo, può essere determinato partendo dalla teoria dei corpi rigido-plastici.

In questo modo si è ritenuto che al disotto del carico limite la pavimentazione sia assimilabile ad una lastra rigida sottoposta al carico delle ruote ed alla reazione del terreno, perchè la variazione di configurazione geometrica è in realtà tanto piccola da non influire in misura sensibile sullo stato tensionale.

Però nelle pavimentazioni precompresse esternamente la presenza dello sforzo normale nella lastra dà luogo, in seguito ai cedimenti, a sollecitazioni flessionali che incrementano quelle che sarebbero dovute ai soli carichi esterni.

Si pone perciò il problema di conoscere l'entità di questi incrementi, allo scopo di controllare la validità dell'ipotesi di rigidità della lastra anche per le pavimentazioni precompresse esternamente.

In questa nota si studia il comportamento di una lastra indefinita, poggiata su un sottofondo che reagisce con pressioni proporzionali ai cedimenti, caricata da una forza esterna ripartita su una superficie circolare e sottoposta ad uno sforzo normale lungo una certa direzione. Il calcolo viene condotto nella ipotesi che la lastra si comporti elasticamente, perchè è evidentemente necessario tener conto delle deformazioni: i risultati ottenuti, pur partendo da questa ipotesi generalmente non verificata nella realtà, per-

(*) Prof. Ing. Paolo FERRARI, libero Docente ed Assistente Ordinario di Costruzioni di Strade, Ferrovie ed Aeroporti nella Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli.

(1) Cfr. P. FERRARI, *Il carico limite delle pavimentazioni in calcestruzzo precompresso*, Ingegneria Civile (in corso di pubblicazione).

mettono tuttavia di avere una idea sufficientemente chiara circa l'entità degli incrementi di sollecitazione dovuti allo sforzo normale.

2. - Si consideri, in un primo momento, una lastra di dimensioni in pianta infinitamente grandi e di spessore h , poggiata sul sottofondo e caricata, in un punto qualsiasi della sua faccia superiore, da una forza concentrata P .

Gli assi x ed y siano contenuti nel piano medio della lastra, con origine O nel punto di applicazione di P . Nel piano medio della lastra agisca anche uno sforzo normale diretto nel senso dell'asse x , la cui intensità, per unità di lunghezza parallela ad y , si indica con N .

Siano:

$w(x, y)$ lo spostamento del generico punto di coordinate x, y .

E e ν rispettivamente il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson del materiale costituente la lastra.

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ la rigidezza flessionale di una striscia di lastra di larghezza unitaria.

K la costante di reazione del sottofondo.

Si assumono positivi forza e spostamenti se diretti verso il basso. Oltre alle forze già considerate, agisce ancora sulla faccia inferiore della lastra la reazione del terreno $-Kw$. L'equazione che risolve il problema, in queste condizioni è, come è noto (2):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{K}{D} w = 0 \quad (1)$$

Per la soluzione della (1) si estende al caso della lastra indefinita il metodo seguito dal LEVY (3) per lo studio della piastra rettangolare appoggiata sui quattro lati. Poniamo perciò la funzione $w(x, y)$ sotto forma di integrale di FOURIER in y , limitato al solo termine in coseno per la evidente simmetria della w rispetto all'asse x :

$$w(x, y) = \int_0^\infty F(x, \lambda) \cos \lambda y \, d\lambda \quad (2)$$

essendo $F(x, \lambda)$ una funzione della sola x e del parametro λ .

Sostituendo la (2) in (1), si ottiene immediatamente, per ciascun valore del parametro λ , una relazione del tipo:

$$F^{IV} + \left(\frac{N}{D} - 2\lambda^2 \right) F^{II} + \left(\lambda^4 + \frac{K}{D} \right) F = 0 \quad (3)$$

avendo indicato con F^i la derivata i -esima di F rispetto ad x .

Ponendo:

$$\frac{N}{2D} - \lambda^2 = \mu \quad (4)$$

$$\lambda^4 + \frac{K}{D} = \rho$$

la (3) diviene:

$$F^{IV} + 2\mu F^{II} + \rho F = 0 \quad (5)$$

L'equazione caratteristica della (5) è:

$$p^2 + 2\mu p^2 + \rho = 0 \quad (6)$$

Nell'ipotesi che risulti (ed in pratica è sempre verificato):

$$\sqrt{\frac{K}{D}} \geq \frac{N}{2D}$$

si può scrivere:

$$2\beta^2(\lambda) = \sqrt{\rho} + \mu \quad (7)$$

$$2\gamma^2(\lambda) = \sqrt{\rho} - \mu$$

Per cui si ha:

$$\rho = (\beta^2 + \gamma^2)^2 \quad \mu = (\beta^2 - \gamma^2)$$

e quindi la (6) si scrive:

$$p^4 + 2(\beta^2 - \gamma^2)p^2 + (\beta^2 + \gamma^2)^2 = 0$$

Risolvendo si ottiene:

$$p = \pm (\gamma \pm i\beta)$$

Gli integrali particolari indipendenti della (5) sono dunque:

$$\begin{aligned} F_1 &= e^{\gamma(\lambda)x} [\cos \beta(\lambda)x + i \operatorname{sen} \beta(\lambda)x] \\ F_2 &= e^{\gamma(\lambda)x} [\cos \beta(\lambda)x - i \operatorname{sen} \beta(\lambda)x] \\ F_3 &= e^{-\gamma(\lambda)x} [\cos \beta(\lambda)x + i \operatorname{sen} \beta(\lambda)x] \\ F_4 &= e^{-\gamma(\lambda)x} [\cos \beta(\lambda)x - i \operatorname{sen} \beta(\lambda)x] \end{aligned}$$

Limitiamoci a considerare, stante la simmetria, una soluzione valida per metà lastra comprendente il semiasse x positivo: poichè all'infinito $w(x, y)$ si annulla, deve risultare, per $x = \infty$, $F(x, \lambda) = 0$. La soluzione della (5) che soddisfa tale condizione è:

$$F(x, \lambda) = e^{-\gamma(\lambda)x} [A(\lambda) \cos \beta(\lambda)x + B(\lambda) \operatorname{sen} \beta(\lambda)x]$$

(2) Cfr. TIMOSHENKO and WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, Mc Graw-Hill, New York 1959, pag. 378.

(3) Cfr. TIMOSHENKO and WOINOWSKY-KRIEGER, *op. cit.*, pag. 113.

da cui risulta:

$$w(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma(\lambda)x} [A(\lambda) \cos \beta(\lambda)x + B(\lambda) \sin \beta(\lambda)x] \cos \lambda y d\lambda \quad (8)$$

Per la determinazione delle quantità $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ si osserva innanzitutto che, stante la simmetria di w rispetto all'asse y , risulta:

$$\left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$$

Derivando pertanto la (8) ed eguagliando a zero per $x = 0$, si ha:

$$B(\lambda) = A(\lambda) \frac{\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)}$$

Ponendo $A'(\lambda) = \frac{A(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ e sostituendo nella (8),

questa diviene:

$$w(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} A' [\beta \cos \beta x + \gamma \sin \beta x] \cdot \cos \lambda y d\lambda \quad (9)$$

La quantità $A'(\lambda)$ viene determinata attraverso la condizione che la risultante delle forze di taglio Q_x (*) nell'intorno infinitesimo del punto di applicazione della forza P è pari a $-P/2$:

$$\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} [Q_x(x, y)]_{x=0} dy = -\frac{P}{2} \quad (10)$$

Poniamo $[Q_x(x, y)]_{x=0}$ sotto forma di integrale di FOURIER:

$$[Q_x(x, y)]_{x=0} = \int_0^{\infty} C(\lambda) \cos \lambda y d\lambda \quad (11)$$

essendo

$$C(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [Q_x(x, y)]_{x=0} \cos \lambda x dx$$

Osservando che $[Q_x(x, y)]_{x=0}$ per ragioni di simmetria è nullo in tutto l'intervallo $[y = +\infty, y = -\infty]$ tranne che nell'intorno infinitesimo di semi-

(*) Q_x è la forza di taglio per unità di lunghezza misurata lungo y , agente sulla superficie normale all'asse x .

dimensione ε del punto di applicazione di P , e tenendo presente la (10), risulta immediatamente.

$$C(\lambda) = -\frac{P}{2\pi}$$

per cui la (11) diventa:

$$[Q_x(x, y)]_{x=0} = -\frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda y d\lambda \quad (12)$$

Ma, d'altra parte, l'espressione di Q_x in funzione di w è:

$$Q_x(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (13)$$

Sostituendo nella (13) l'espressione (9) di w e derivando, si ha:

$$[Q_x(x, y)]_{x=0} = -2D \int_0^{\infty} A' \beta \gamma [\beta^2 + \gamma^2] \cos \lambda y d\lambda \quad (14)$$

Eguagliando (12) e (14) si ricava

$$\frac{P}{2\pi} = 2D A' \beta \gamma [\beta^2 + \gamma^2]$$

da cui

$$A' = \frac{P}{4\pi D} \frac{1}{\beta \gamma [\beta^2 + \gamma^2]}$$

e quindi

$$w(x, y) = \frac{P}{4\pi D} \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \frac{1}{\beta \gamma [\beta^2 + \gamma^2]} [\beta \cos \beta x + \gamma \sin \beta x] \cos \lambda y d\lambda \quad (15)$$

L'espressione del momento M_x in un punto generico della piastra è:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

Sostituendo l'espressione (15) di w ed eseguendo le derivazioni, la (16) diventa:

$$M_x = -\frac{P}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\gamma x}}{\beta \gamma (\beta^2 + \gamma^2)} [\gamma (\beta^2 + \gamma^2 - \nu \lambda^2) \cdot \sin \beta x - \beta (\beta^2 + \gamma^2 + \nu \lambda^2) \cos \beta x] \cos \lambda y d\lambda \quad (17)$$

Quindi il momento dM_x prodotto in un punto x , y da un carico $p dx dy$ ripartito su un'area infinitesima $dx dy$ nell'intorno dell'origine è dato ovviamente da:

$$dM_x = - \frac{p dx dy}{4 \pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma x}}{\beta \gamma (\beta^2 + \gamma^2)} [(\gamma (\beta^2 + \gamma^2 - \nu \lambda^2) \cdot \text{sen } \beta x - \beta (\beta^2 + \gamma^2 + \nu \lambda^2) \cos \beta x] \cos \lambda y d\lambda$$

Lo stesso valore assume evidentemente il momento prodotto nel punto O da un carico ripartito su una area infinitesima nell'intorno del punto x , y .

Se sulla pavimentazione agisce un carico P uniformemente ripartito su un'area circolare di raggio r , il momento M_x in corrispondenza del punto centrale di tale area è lo stesso che si avrebbe qualora il carico fosse ripartito su un'area quadrata di lato

$$2a = \frac{r}{0,57} \quad (5).$$

Posto $p = \frac{P}{4a^2}$ il carico per unità di superficie caricata, tale momento è dato da:

$$M_{x_0} = - \frac{P}{\pi} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma x}}{\beta \gamma (\beta^2 + \gamma^2)} \cdot [\gamma (\beta^2 + \gamma^2 - \nu \lambda^2) \text{sen } \beta x - \beta (\beta^2 + \gamma^2 + \nu \lambda^2) \cos \beta x] \cos \lambda y d\lambda \quad (18)$$

Sostituendo a β e γ le rispettive espressioni ricavabili dalle (4) e (7), e ponendo:

$$\phi_x = - \frac{1}{2 \pi a^2} \int_0^\infty \frac{e^{fa} (K_1 f - K_2 R) \text{sen } Ra - e^{fa} (K_1 R + K_2 f) \cos Ra + K_1 R + K_2 f}{R^2 + f^2} \frac{\text{sen } \lambda a}{S \lambda} d\lambda \quad (20)$$

Procedendo allo stesso modo per il momento M_y , e ponendo:

$$K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D} + \frac{N}{2D} - \lambda^2} \left(\lambda^2 - \nu \sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D}} \right)$$

$$f = - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D} + \lambda^2 - \frac{N}{2D}}$$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D} + \lambda^2 - \frac{N}{2D}} \left(\sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D}} - \nu \lambda^2 \right)$$

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D} - \lambda^2 + \frac{N}{2D}} \left(\sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D}} + \nu \lambda^2 \right)$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D} + \frac{N}{2D} - \lambda^2}$$

$$S = \sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D}} \sqrt{\frac{K}{D} - \frac{N^2}{4D^2} + \frac{N}{D} \lambda^2}$$

la (18), avendo invertito l'ordine di integrazione, si trasforma:

$$M_{x_0} = - \frac{2 p}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{S} \int_0^a \cos \lambda y dy \int_0^a e^{-fx} \cdot [K_1 \text{sen } Rx - K_2 \cos Rx] dx \quad (19)$$

Eseguendo ancora le due integrazioni fra limiti finiti che compaiono nella (19), questa diviene:

$$M_{x_0} = P \phi_x$$

dove

$$K_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D} - \frac{N}{2D} + \lambda^2} \left(\lambda^2 - \nu \sqrt{\lambda^4 + \frac{K}{D}} \right)$$

si ha:

$$M_{y_0} = P \cdot \phi_y$$

dove

(5) Cfr. TIMOSHENKO and WOINOWSKY-KRIEGER, *op. cit.*, pag. 275.

$$\phi_y = \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^\infty \frac{e^{fa} (K_3 f - K_4 R) \cos Ra + e^{fa} (K_3 R + K_4 f) \sin Ra - K_3 f + K_4 R}{R^2 + f^2} \frac{\sin \lambda a}{S\lambda} d\lambda \quad (21)$$

3. - Nelle figure 1, 2, 3, 4 è riportato l'andamento delle funzioni ϕ_x e ϕ_y ($^\circ$) per quattro valori della

rigidezza D ($D = 1,2 \cdot 10^8; 1,7 \cdot 10^8; 2,4 \cdot 10^8; 3,1 \cdot 10^8 \text{ Kg cm}^2/\text{cm}$), per diversi valori della costante di sottofondo K ed al variare dello sforzo normale N, quando il carico è ripartito su una superficie circolare di raggio $r = 38 \text{ cm}$.

($^\circ$) I valori delle funzioni ϕ_x e ϕ_y riportati in diagramma sono stati ottenuti calcolando, a mezzo di un calcolatore elettronico, gli integrali delle (20) e (21).

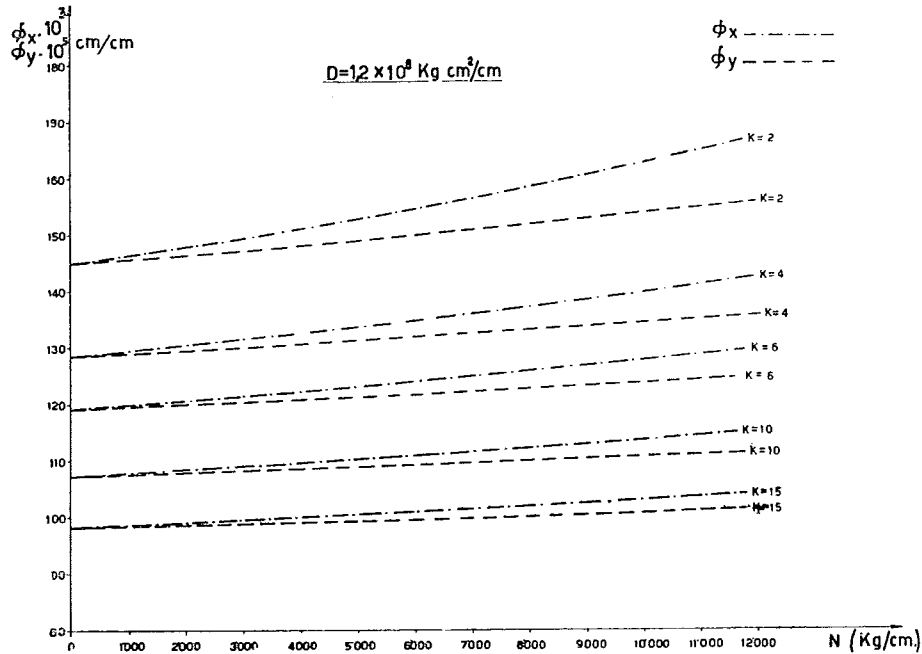


Fig. 1.

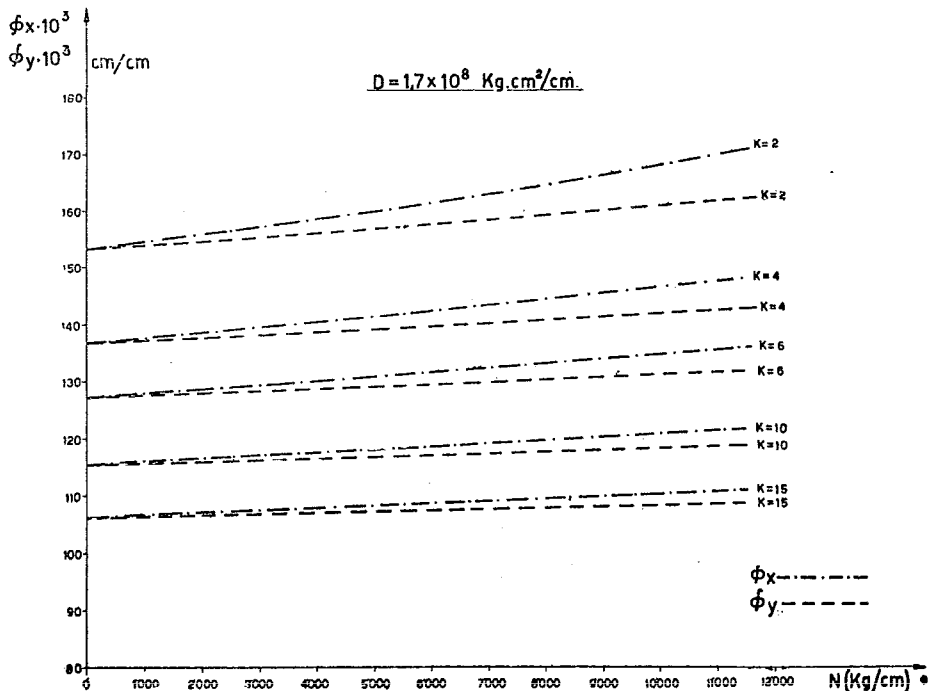


Fig. 2.

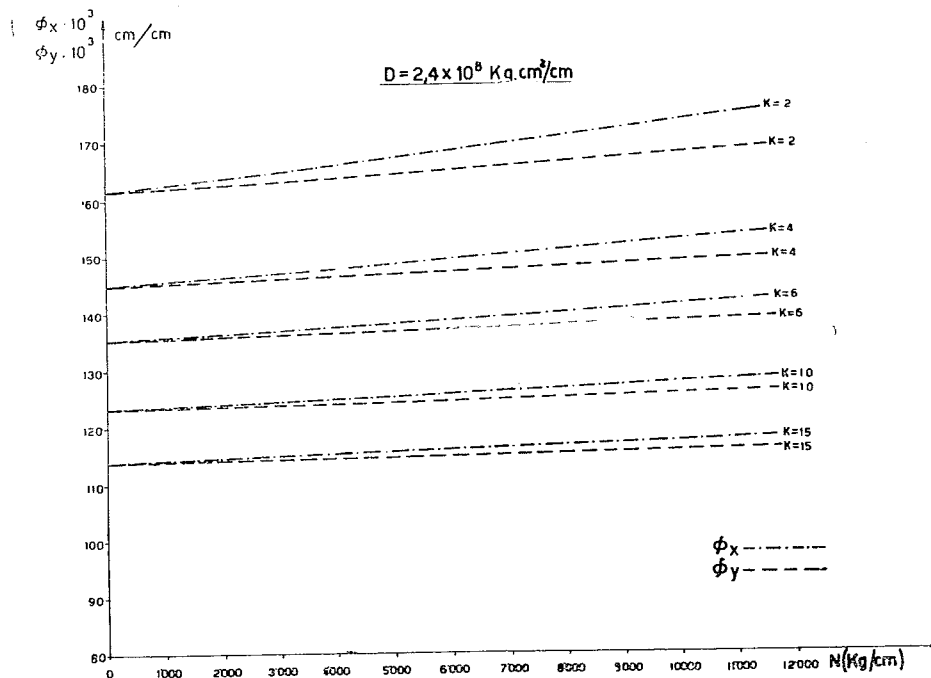


Fig. 3.

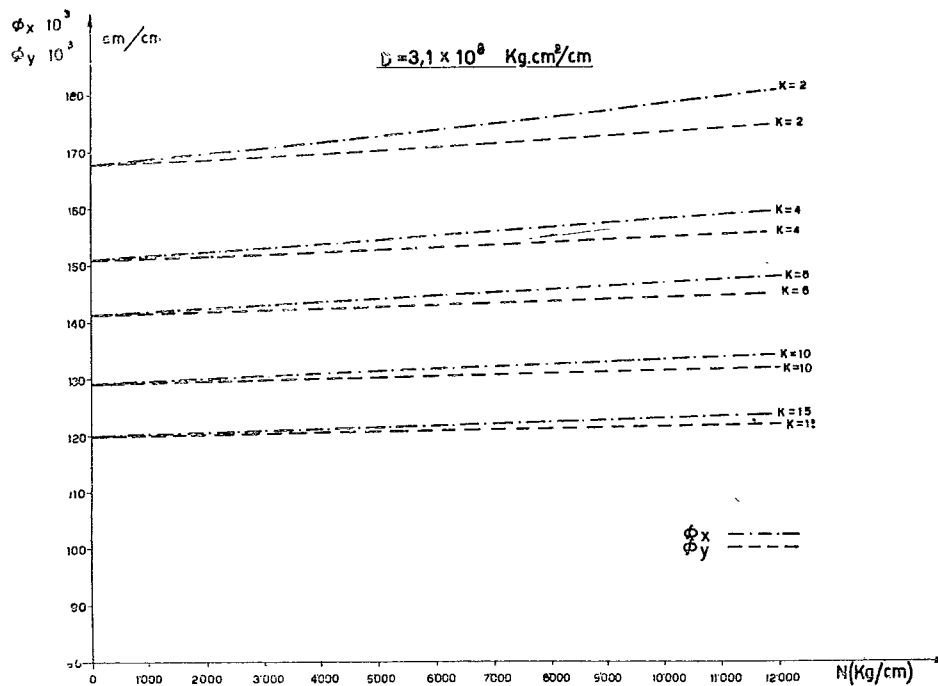


Fig. 4.

Dall'esame di tali figure si può osservare che l'incremento di momento è tanto maggiore quanto più debole è la rigidità della pavimentazione e quanto più bassa è la costante di reazione del sottofondo.

Se si considera una pavimentazione di spessore $h = 16$ cm, costruita con un calcestruzzo avente $E =$

$= 3,5 \cdot 10^5$ Kg/cm², $\nu = 0,24$ ⁽¹⁾, si ricava una rigidità $D = 1,2 \cdot 10^8$ Kg cm²/cm. Tale pavimentazione sia poggiata su un sottofondo caratterizzato da una costante $K = 4$ Kg/cm³, e sia sottoposta ad un carico

⁽¹⁾ ROAD RESEARCH LABORATORY, *Concrete road*, London 1955, pag. 155.

$P = 45$ t ripartito su una superficie circolare di raggio $r = 38$ cm; immaginiamo che in seguito alla precompressione ed alla dilatazione termica impedita (propria del sistema di precompressione esterna con spalle fisse) il calcestruzzo sopporti una sollecitazione di compressione pari alla sua resistenza $\sigma_R = 400$ Kg/cm², da cui $N = 400 \times 16 = 6.400$ Kg/cm.

In tali condizioni, tra le più sfavorevoli in cui può venire a trovarsi una pavimentazione precompressa, dalla fig. 1 si ricava che il momento M_{x_0} assume il valore:

$$M_{x_0} = 0,01352 \cdot 45.000 = 6.084 \text{ Kg cm/cm}$$

mentre in assenza di sforzo normale lo stesso momento sarebbe stato pari a:

$$M_{x_0} = 0,01285 \cdot 45.000 = 5.782 \text{ Kg cm/cm}$$

L'incremento di momento dovuto allo sforzo normale è quindi del 5,2 %.

Se si tien conto del fatto che generalmente lo sforzo normale nelle pavimentazioni è sensibilmente inferiore a quello qui considerato, si può concludere che gli incrementi di momento flettente dovuti allo sforzo normale si possono senz'altro trascurare.

FLEXIONAL STRESSES IN CONCRETE PAVEMENTS EXTERNALLY PRESTRESSED

Summary: The Author studies the flexional stresses in the concrete pavements externally prestressed, charged by loads distributed on circular areas, and constructed on subgrades reacting with pressures proportional to the deflexions.

CONTRAINTES FLEXIONALES DANS LES CHAUSSÉES EN BÉTON PRÉCONTRAINTE EXTERNEMENT

Sommaire: L'Auteur étudie les contraintes flexionales dans les chaussées en béton, précontraintes externement, chargées par des forces distribuées sur des surfaces circulaires, et posées sur des sols de fondation qui réagissent avec des pressions proportionnelles aux déflexions.