

### Teoria dello Stato Critico e Metodo degli Elementi Finiti.

A.M. BRITTO, M.J. GUNN - *Critical State Soil Mechanics via Finite Elements*. Ellis Horwood Series in Civil Engineering, Chichester, John Wiley & Sons, 1987, pp. 488.

Il testo è essenzialmente una descrizione del CRISP, il programma di calcolo agli elementi finiti elaborato dagli autori a partire dai primi anni Ottanta. Questo codice di calcolo, già molto diffuso nell'ambiente geotecnico italiano, utilizza modelli costitutivi ricavati nell'ambito della teoria dello stato critico (CRISP è l'acronimo di Critical State Program).

Fra le virtù del CRISP vi è sicuramente quella di essere un programma «aperto», ovvero un codice di calcolo a cui l'utente può apportare modifiche e miglioramenti. Fra i suoi limiti vi è quello di essere dotato di strumenti di pre e post-processing poco soddisfacenti (praticamente assenti per le analisi tridimensionali); ciò rende piuttosto lunghe e farraginose sia le procedure da eseguire per l'input dei dati che quelle di interpretazione e controllo dei risultati delle analisi. Molti degli utenti del CRISP hanno infatti avvertito la necessità di migliorare questa parte del programma, magari adattando altri moduli di pre e post-processing disponibili in commercio.

Rispetto alla versione del CRISP a cui si riferisce il testo (pubblicato nel 1987), in quella attuale sono implementati un maggior numero di modelli costitutivi e di tipi di elementi.

Nel primo capitolo del libro vengono brevemente richiamati i concetti principali della meccanica del continuo: la definizione delle tensioni e delle componenti di deformazione, le equazioni di equilibrio, le equazioni di congruenza ed il legame costitutivo elastico lineare. Si passa alla meccanica delle terre introducendo il concetto di tensione effettiva e l'impiego delle costanti elastiche per la descrizione del comportamento dei terreni. Il capitolo è concluso da un breve cenno ai moti di filtrazione ed alla teoria della consolidazione.

La teoria dello stato critico viene introdotta nel secondo capitolo; essa è anticipata da un'essenziale esposizione della teoria della plasticità. Viene fatto un brevissimo cenno ai più importanti criteri di snervamento (Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager), alle leggi di incrudimento ed ai criteri di flusso. Un paragrafo viene dedicato all'esposizione del postulato di stabilità di Drucker e nel successivo vengono discusse le implicazioni cinematiche dell'applicazione della «condizione di

normalità» alla superficie di Mohr-Coulomb.

Il modello elasto-plastico Cam-clay è descritto in maniera chiara, ma troppo essenziale per chi non è mai entrato in contatto con la teoria dello stato critico. Sono fornite le equazioni che interpretano i risultati delle prove di compressione isotropa: quella della curva di normale consolidazione e quella delle curve di scarico e ricarico. Viene poi introdotta la linea di stato critico e la superficie di snervamento.

Le ipotesi che sono alla base del Cam-clay ed il procedimento per ricavare l'espressione della superficie di snervamento, vengono discussi solo dopo aver illustrato alcune possibili applicazioni di tale modello; in particolare come le equazioni fornite in questa sezione possano essere impiegate per calcolare i percorsi di sollecitazione e le componenti di deformazione nelle prove di compressione triassiale drenata e non drenata.

Nella parte del capitolo dove vengono discussi i due diversi tipi di comportamento associati alla *dry side* (campioni fortemente sovraconsolidati) ed alla *wet side* (campioni normal-consolidati o leggermente sovraconsolidati) della curva di snervamento del Cam-clay, viene fatto cenno alla superficie di Hvorslev. Fra l'altro si legge: «Although the Hvorslev equation may be useful in some contexts, our experience is that it does not have any advantages over Cam-clay when used with finite elements». Tre anni dopo la pubblicazione di questo testo gli autori hanno comunque aggiunto ai modelli costitutivi del CRISP un Cam-clay costituito nella sua *dry side* da una superficie di snervamento del tipo di Hvorslev (modello di Schofield).

Il capitolo è concluso dall'esposizione del «Cam-clay modificato», proposto da Burland e Roscoe tra il 1965 ed il 1968, e da un paragrafo di commento sul Cam-clay, di cui si vogliono evidenziare possibilità e limiti.

Nel terzo capitolo sono richiamati i principali concetti posti alla base del metodo degli elementi finiti. Vengono inizialmente forniti gli strumenti matematici: l'integrazione numerica, i polinomi di interpolazione di Lagrange ed il metodo variazionale di Galerkin. Con il metodo degli spostamenti viene studiato un semplice sistema costituito da molle elastiche; è mostrato il funzionamento di un programma in Fortran per la risoluzione matriciale di questo tipo di sistemi.

Viene introdotto il Principio dei Lavori Virtuali; tale principio, che secondo gli autori «...is regarded as difficult and/or obscure by

many engineers...», viene ricavato sia nel caso di struttura reticolare che in quello di continuo bidimensionale partendo dalle equazioni di equilibrio.

Il passo successivo è costituito dall'introduzione di alcuni tipi di elementi finiti: monodimensionali, triangolari a deformazione costante, triangolari a deformazione lineare. Per ciascuno è ricavata la matrice delle funzioni di forma e viene spiegata come si perviene alla matrice di rigidezza.

In conclusione di capitolo viene ricavata, per un generico elemento, la matrice «di rigidezza» nel caso di consolidazione bidimensionale. Sono trattate in modo abbastanza esauriente due applicazioni di un programma in Fortran per l'analisi della consolidazione monodimensionale; le soluzioni fornite da questo sono confrontate con quelle ottenute mediante sviluppo in serie di Fourier.

Il quarto capitolo fornisce al lettore un'introduzione al CRISP, di cui sono elencate le opzioni disponibili (tipi di analisi, modelli del terreno, tipi di elementi, tecniche non-lineari e condizioni al contorno). Un paragrafo è dedicato al commento del tipo di Fortran impiegato nel programma; un altro alla descrizione del metodo adottato per il dimensionamento delle matrici.

L'organizzazione della struttura del programma viene descritta in conclusione di capitolo. Sono illustrate le relazioni esistenti tra le routines di controllo, delle quali vengono commentati listati e funzioni.

Il quinto capitolo si apre con la descrizione delle routines impiegate nel CRISP per costruire la matrice che lega gli incrementi di tensione a quelli di deformazione, nei casi: mezzo elastico anisotropo, variazione lineare delle proprietà elastiche con la profondità, Cam-clay e Cam-clay modificato. Successivamente viene fornita una guida alla selezione dei valori da attribuire ai parametri del Cam-clay ed ai coefficienti di permeabilità orizzontale e verticale.

Nella sezione finale del capitolo viene discusso il problema della determinazione dello stato tensionale iniziale. Viene in particolare descritto il metodo empirico di Wroth per il calcolo di  $K_0$  e ne sono confrontati i risultati con quelli ottenuti dall'analisi della storia di un deposito di Cam-clay.

Il sesto capitolo descrive la parte «geometrica» del CRISP, ovvero la gestione da parte del programma dei dati di input riguardanti la geometria della mesh: numerazione e coordinate dei nodi, e loro connessione ai vertici

degli elementi. Qui come nelle altre parti del testo, i listati delle varie routines sono seguiti da note di chiarimento sulle funzioni svolte dai passi di programmazione.

Argomento del settimo capitolo è la gestione da parte del CRISP dei dati riguardanti lo stato tensionale e le condizioni al contorno esistenti in situ. Fra l'altro viene spiegato come il programma calcoli le tensioni iniziali nei punti di integrazione mediante interpolazione lineare dei valori di tensione forniti dall'utente in alcune selezionate posizioni. È illustrato come il programma verifichi l'equilibrio tra le tensioni in situ ed i carichi iniziali applicati sul sistema.

Le procedure di analisi seguite dal CRISP vengono trattate nel capitolo ottavo. È descritta la gestione degli incrementi in cui viene suddiviso il carico nel corso di un'analisi non lineare, la costruzione della matrice di rigidità dell'elemento e di quella globale, la risoluzione delle equazioni, il calcolo degli incrementi di tensione e di deformazione, il funzionamento delle subroutines che interrompono e riavviano l'analisi.

Il CRISP aggiorna il valore dei parametri di rigidità in funzione dello stato tensionale valutato dopo l'applicazione di ogni incremento di carico. Alla fine di ogni incremento non viene apportata alcuna correzione alle tensioni calcolate; pertanto si è costretti a suddividere il carico complessivo in un numero di incrementi maggiore di quello necessario nei programmi che impiegano una tecnica iterativa di approssimazione. Gli autori affermano che l'applicazione di tecniche iterative ai mo-

delli della teoria dello stato critico avrebbe fornito risultati non del tutto soddisfacenti.

Le più recenti versioni del CRISP effettuano, nelle analisi svolte con i modelli elastici perfettamente plastici, una correzione dello stato tensionale calcolato alla fine di ogni passo. Il numero degli incrementi di carico necessari è pertanto ridotto rispetto al caso in cui l'analisi sia eseguita con uno dei modelli costitutivi di tipo Cam-clay.

Nell'ultimo capitolo è fornita all'utente del CRISP una guida nella scelta dei dati di input, ovvero delle informazioni che descrivono la geometria della mesh, le proprietà dei materiali, le tensioni iniziali e le condizioni al contorno. Vengono dati suggerimenti circa i metodi di analisi, i controlli, la scelta delle dimensioni degli incrementi di carico, il tipo ed il numero di elementi finiti da usare, ecc.

Sono infine riportati esempi di applicazione del CRISP per la risoluzione di alcuni problemi di analisi drenata, non drenata e della consolidazione nelle ipotesi di mezzo elastico lineare, di mezzo elastico non omogeneo, di Cam-clay e di Cam-clay modificato. Due esempi illustrano come modellare con il CRISP la fase di costruzione di un rilevato e la realizzazione di uno scavo.

Nelle appendici sono forniti chiarimenti circa i messaggi di errore e una guida all'implementazione di un nuovo modello costitutivo o di un nuovo tipo di elemento finito.

Da questo breve riassunto si sarà compreso come il testo possa essere suddiviso in due parti; la prima di queste, consistente nei primi tre capitoli, dovrebbe richiamare quei concetti

utili alla comprensione della seconda, che è dedicata alla descrizione del funzionamento del CRISP.

Nella prima parte i concetti sono estremamente semplificati e trattati con il linguaggio ed il tono di chi si rivolge ad un neofita. In altre parole i primi tre capitoli sono costruiti più come una «introduzione» che come un «richiamo». L'intento è lodevole ma difficilmente realizzabile in poco più di cento pagine, a causa del numero e della complessità degli argomenti da affrontare. La seconda parte, dove viene illustrato il funzionamento del programma, è inevitabilmente destinata a chi ha già una certa dimestichezza con questi argomenti (teoria della plasticità, teoria dello stato critico, teoria degli elementi finiti in elasticità ed in plasticità, elementi di programmazione in Fortran, ecc.) e probabilmente risulta poco fruibile da chi, fino alla lettura del terzo capitolo, considera il Principio dei Lavori Virtuali come qualcosa di «difficult and/or obscure». Peraltro nei primi capitoli, la sfortunata posizione di qualche errore di stampa ha il probabile effetto di confondere le idee del neofita.

Il libro può risultare utile a chi si proponga di elaborare un suo programma agli elementi finiti che implementi modelli costitutivi della teoria dello stato critico. La sua consultazione è ovviamente consigliabile a chi abbia intenzione di apportare modifiche alla sua copia del CRISP oppure voglia semplicemente sapere di più circa gli algoritmi di calcolo utilizzati da Britto e Gunn.

Carlo Callari